3. *Ueber Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz; von Georg Wetzstein.*¹⁾

Gelegentlich einer Arbeit über innere Reibung von Lösungen, bei welcher die Methode der Strömung durch Capillaren verwendet wurde, zeigte sich zunächst bei Versuchen mit Ameisensäure, dass bei Anwendung verschiedener Drucke für den nach der Formel von Poiseuille unter Berücksichtigung des Hagenbach'schen Correctionsgliedes berechneten Coefficienten der inneren Reibung Zahlen erhalten wurden, die unter sich weit grössere Differenzen aufwiesen, als selbst relativ grosse Beobachtungsfehler bewirken konnten. Es war daher naheliegend, jene Arbeit vorläufig zu unterbrechen und die Aenderungen der so berechneten Coefficienten mit dem Drucke zum Gegenstande einer eingehenderen Untersuchung zu machen.

Die Untersuchung führte denn auch bei sämmtlichen verwendeten Substanzen zu dem Resultate, dass eine Abweichung von dem Poiseuille'schen Gesetze thatsächlich vorhanden ist, indem der berechnete Coefficient bei Anwendung höherer Drucke abnimmt, und zwar so, dass diese Abnahme für relativ niedrige Drucke ziemlich bedeutend ist, während er sich mit wachsendem Drucke einem Grenzwerthe nähert.

In dem *ersten Theile* der Dissertation sind die Abhandlungen, welche die Beziehung zwischen Druck und Reibungscoefficient behandeln, angeführt.

Der *zweite Abschnitt* soll meine Versuchsanordnung und den Apparat beschreiben; im *dritten* folgen dann die angestellten Versuche, welche im *vierten* durch Aufstellung einer Formel zu einem einheitlichen Ganzen vereinigt werden sollen. Dem

1) Auszug aus der Inaug.-Diss., München 1899.

fünften Abschnitt, der eine Erklärung der beobachteten Erscheinung zu geben versucht, folgt eine Zusammenstellung der gewonnenen Resultate.

I. Abschnitt.

Die älteren Untersuchungen, welche die Abhängigkeit der Viscosität vom Druck behandeln, rühren von Coulomb, Poiseuille und Darcy her. Sie sind eingehend in der Dissertation behandelt; hier sei erwähnt, dass schon aus den Versuchen von Poiseuille eine Abnahme des Reibungscoefficienten mit dem Druck nachgewiesen wurde, und dass Darcy auf die Rolle von Wirbelbewegungen bei diesen Erscheinungen hingewiesen hat.

Was die neueren Arbeiten¹⁾ auf diesem Gebiete betrifft, so untersuchen sie ausschliesslich den Einfluss der Dichte auf die Viscosität und zwar nur bei verhältnissmässig grossen Dichtigkeitsänderungen.

II. Abschnitt.

Zu den besten Arbeiten, was den Grad der erreichten Genauigkeit bei den im letzten Decennium publicirten Abhandlungen über innere Reibung betrifft, zählen die beiden Untersuchungen der Herren Thorpe und Rodger.²⁾

Aus diesem Grunde schien es zweckmässig, ihre Versuchsanordnung, die im grossen und ganzen der von Poiseuille folgt, im allgemeinen beizubehalten.

Das Princip dieser bei Untersuchungen über die Viscosität allenthalben benutzten Methode ist folgendes: Ein zwischen zwei Marken abgegrenztes Flüssigkeitsvolumen, das während aller Versuche constant bleibt, passirt unter einem gewissen Druck eine Capillare von bekannten Dimensionen; Aufgabe des Beobachters ist es, die Zeit zu bestimmen, die dazu nöthig ist, ferner den Druck zu messen, unter dem die Strömung vor sich geht, und dafür Sorge zu tragen, dass letzterer, sowie die

1) E. Warburg u. von Babo, Wied. Ann. **22**. p. 518. 1884; W. C. Röntgen, l. c. p. 510; J. Sachs, Inaug.-Diss. Freiburg i. B. 1883; R. Cohen, Wied. Ann. **45**. p. 666. 1892.

2) T. E. Thorpe u. J. W. Rodger, Phil. Trans. p. 397. 1894.

Temperatur während der Beobachtung möglichst constant bleiben.

Wegen der Bestimmung des von der Flüssigkeit im Apparat herrührenden Druckes (vgl. Dissertation p. 21—26) gab ich dem „Glischrometer“ der Herren Thorpe und Rodger folgende Gestalt (vgl. auch Fig. 1):

Statt der cylindrischen Form der Schenkel gab ich dem Theil derselben, welcher dazu bestimmt ist, das verwendete Flüssigkeitsvolumen aufzunehmen, die Gestalt einer Kugel, wodurch die Differenz des anfangs und des schliesslich wirkenden Druckes auf ca. $4 \cdot \rho$ cm reducirt wurde, wenn ρ die Dichte ist, was den Anforderungen auch vollständig genügt, indem ja die Aenderungen, wie Abschnitt III beweist, zumal bei höheren Drucken sehr geringe sind.

Die am Apparat an den beiden Schenkeln oben angeblasenen Kugeln mit den seitlichen Ansatzröhren sollen bei Untersuchungen von Lösungen das Eingiessen der zu lösenden Substanz ermöglichen, ohne dass deshalb der Apparat aus dem Bassin

herausgenommen zu werden braucht; bei den in dieser Arbeit

besprochenen Versuchen fanden dieselben keine Anwendung und waren deshalb stets geschlossen.

Ausser dieser Aenderung brachte ich noch eine andere wesentliche an, welche das Einschmelzen der Capillaren be-

(Apparat nach Thorpe und Rodger mit den nothwendigen Modificationen.)

v = arbeitendes Flüssigkeitsvolumen,
 $P + p$ = wirksamer Druck.

Fig. 1.

trifft; stätt dieselbe in der Mitte des Querstückes anzuschmelzen und sie damit der immerhin sehr grossen Gefahr des Geknicktwerdens und einer Veränderung der lichten Weite beim Anschmelzen anzusetzen, liess ich sie an den Enden nach Art der Befestigung der Thermometerröhrchen anblasen.

III. Abschnitt.

Im Folgenden sind die mit dem oben beschriebenen Apparat erhaltenen Resultate tabellarisch zusammengestellt.

Unter P ist der an den beiden Schenkeln L und R eines Wassermanometers am Anfang und am Ende eines jeden Versuches abgelesene Stand des Wassermeniscus eingetragen, um die Güte der einzelnen Beobachtungen zu charakterisiren; P_0 ist der durch die zwei Correctionen, die in § 14 besprochen wurden, verbesserte Druck. Die an dem Chronographen abgelesene Versuchsdauer ist t ; η' ist der aus dem reducirten Druck P_0 und der Zeit t berechnete Coefficient der Viscosität, also ohne Rücksicht auf den von der Flüssigkeit im Apparat ausgeübten mittleren Druck p ; statt η' ist an manchen Stellen auch dieser mittlere Druck p berechnet; die Hagenbach'sche Correctur ist mit δ , mit Δ der Fehler im Reibungscoefficienten bezeichnet, der durch einen Fehler von 0,02 cm in der Ablesung des Druckes und durch einen solchen von 0,2 sec in der Bestimmung der Zeit bedingt ist. η ist der aus der Poiseuille'schen Formel und den sämmtlichen Versuchsdaten einer Versuchsreihe erhaltene Werth für die innere Reibung, folglich $\eta = \eta' - \delta$ der gesuchte Coefficient mit Berücksichtigung der Hagenbach'schen Correctur.

Die einzelnen Versuche bei annähernd constantem Druck sind mit kleinen lateinischen Buchstaben, die einzelnen Versuchsgruppen bei verschiedenen Drucken aber derselben Temperatur und mit derselben Substanz sind mit arabischen Ziffern bezeichnet, während die Versuchsreihen, welche durch die Verschiedenheit der untersuchten Substanzen und der angewendeten Temperaturen ausgezeichnet sind, römische Ziffern tragen. k ist die Constante des benutzten Apparates:

$$k = \frac{\pi \cdot a^3 b^3}{4 v (a^2 + b^2) l}.$$

I. Versuchsreihe.

Wasser, destilliert, bei 15° C. Apparat; Capillare: $a = 0,04678$ cm,
 $b = 0,03742$ cm, $l = 19,7$ cm, Volumen $v = 0,604$ ccm; $\log k = 0,99409 - 8$.

$$1. P = 163,60, \quad \eta = 0,011294.$$

	P $R \quad L$	P_0	t	
a) ↓	190,37 — 26,56 190,37 — 26,56	} 163,64	11' 36,4''	$p_{a,b} = + 0,87$
b) ↑	190,37 — 26,56 190,35 — 26,58	} 163,62	11 44	
c) ↓	190,34 — 26,59 190,33 — 26,60	} 163,57	11 36,2	$p_{b,c} = + 0,84$
d) ↑	190,33 — 26,60 190,35 — 26,58	} 163,58	11 44,6	$p_{a,d} = + 0,86$
e) ↓	190,35 — 26,58 190,37 — 26,56	} 163,62	11 36,8	$p_{d,e} = + 0,87$

$$\bar{\eta} = 0,011308, \quad \delta = 0,000017, \quad A = 0,000005.$$

$$2. P = 121,50, \quad \eta = 0,011306.$$

a) ↓	168,80 — 47,32 168,84 — 47,28	} 121,40	15' 38,8''	$p_{a,b} = + 0,90$
b) ↑	168,85 — 47,27 168,89 — 47,23	} 121,50	15 52	
c) ↓	168,88 — 47,24 168,89 — 47,23	} 121,53	15 37,2	$p_{d,a} = 0,86$
d) ↑	168,90 — 47,22	121,56	15 51	$p_{c,d} = 0,90$

$$\bar{\eta} = 0,011319, \quad \delta = 0,000013, \quad A = 0,000004.$$

$$3. P = 48,32, \quad \eta = 0,011408.$$

a) ↓	131,64 — 83,29 131,65 — 83,28	} 48,31	39' 23 ''	$p_{a,b} = 0,90$
b) ↑	131,65 — 83,28 131,67 — 83,26	} 48,33	40 50,2	

$$\bar{\eta} = 0,011413, \quad \delta = 0,000005, \quad A = 0,000006.$$

4. $P = 24,29$, $\eta = 0,011590$.

	$\begin{matrix} P \\ R \quad L \end{matrix}$	P	t	
a) ↓	119,22—94,97 119,29—94,91	} 24,27	77' 54 "	$p = 0,83$
b) ↑	119,29—94,91 119,21—94,98			

 $\bar{\eta} = 0,011593$, $\delta = 0,000003$, $\Delta = 0,000009$.5. $P = 121,70$, $\eta = 0,011313$.

a) ↓	168,91—47,18 168,94—47,15	}	121,63	15' 39,4''	$p_{a,b} = 0,71$	
b) ↑	168,95—47,15 168,98—47,12					}
c) ↓	169,00—47,10 169,00—47,09	}	121,76	15 37,8		

 $\bar{\eta} = 0,011325$, $\delta = 0,000012$, $\Delta = 0,000004$.6. $P = 159,90$, $\eta = 0,011298$.

a) ↑	188,50—28,33 188,50—28,33	}	159,89	12' 0,4 "	$p_{a,b} = 0,71$
b) ↓	188,50—28,33 188,51—28,32				
c) ↓	188,51—28,31	159,91	12 0,6	$p_{b,c} = 0,75$	

 $\bar{\eta} = 0,011315$, $\delta = 0,000017$, $\Delta = 0,000004$.

Dass bei den Versuchsgruppen 4., 5., 6. die Werthe von p abnehmen, ist durch das Verdunsten des Wassers zu erklären, indem 4. am folgenden, 5. und 6. aber erst am übernächsten Tag beobachtet wurden.

II. Versuchsreihe.

Wasser, destilliert, bei 15° C.; Apparat II: Capillare $a = 0,06132$ cm;
 $b = 0,04599$ cm; $l = 4,6$ cm; Volumen $v = 3,88$ cm³; $\log k = 0,22491 - 7$.

1. $P = 167,76$ cm, $\eta = 0,011302$.

	$\begin{matrix} P \\ R \quad L \end{matrix}$	P_0	t	
a) ↓	192,60 – 24,61 192,60 – 24,61	} 167,77	6' 44,6''	$p_{a,b} = 0,10$ $p_{b,c} = 0,08$ $p_{c,d} = 0,08$
b) ↑	192,60 – 24,62	167,76	6 44,2	
c) ↓	192,60 – 24,62	167,76	6 44,6	
d) ↑	192,60 – 24,62	167,76	6 44,2	

$\bar{\eta} = 0,011387$, $\delta = 0,000085$, $\Delta = 0,000007$.

2. $P = 116,22$ cm, $\eta = 0,011326$.

a) ↓	166,30 – 49,93 166,30 – 49,93	} 116,22	9' 43''	$p_{a,b} = 0,09$ $p_{b,c} = 0,06$ $p_{c,d} = 0,06$
b) ↑	166,30 – 49,93	116,22	9 44	
c) ↓	166,30 – 49,93 166,31 – 49,92	} 116,23	9 43,4	
d) ↑	166,31 – 49,92	116,24	9 43,8	

$\bar{\eta} = 0,011365$, $\delta = 0,000059$, $\Delta = 0,000006$.

3. $P = 76,55$ cm, $\eta = 0,011358$.

a) ↓	146,19 – 69,57 146,20 – 69,56	} 76,54	14' 47''	$p_{a,b} = 0,06$ $p_{b,c} = 0,04$ $p_{c,d} = 0,04$
b) ↑	146,20 – 69,56	76,55	14 47,8	
c) ↓	146,20 – 69,56	76,55	14 46,4	
d) ↑	146,20 – 69,56	76,55	14 47,4	

$\bar{\eta} = 0,011400$, $\delta = 0,000041$, $\Delta = 0,000006$.

4. $P = 46,41$ cm, $\eta = 0,011418$.

a) ↓	130,70 – 84,32 130,71 – 84,31	} 46,32	24' 30''	$p = 0,05$
b) ↑	130,72 – 84,31 130,73 – 84,30	} 46,35	24 32	

$\bar{\eta} = 0,011441$, $\delta = 0,000023$, $\Delta = 0,000006$.

5. $P = 24,50$ cm, $\eta = 0,011543$.

	$\begin{matrix} P \\ R \quad L \end{matrix}$	P_0	t	
a) ↓	119,40—95,00 119,47—94,93	} 24,44	46' 41,4''	$p = 0,07$
b) ↑	119,47—94,92 119,51—94,88			

$$\bar{\eta} = 0,011555, \quad \delta = 0,000012, \quad A = 0,000005.$$

6. $P = 44,10$ cm, $\eta = 0,011424$.

a) ↑	129,50 – 85,50 129,60 – 85,40	} 44,04	25' 52''	$p = 0,07$
b) ↓	129,60 – 85,41 129,62 – 85,39			

$$\bar{\eta} = 0,011446, \quad \delta = 0,000022, \quad A = 0,000006.$$

III. Versuchsreihe.

Wasser, destilliert, bei 10° C.; Apparat: Capillare $a = 0,06129$ cm;
 $b = 0,04597$ cm; $l = 4,6$ cm; Volumen $v = 3,88$ cm³; $\log k = 0,22414 - 7$.

1. $P = 163,02$ cm, $\eta = 0,013068$.

	$\begin{matrix} P \\ R \quad L \end{matrix}$	P_0	t	η'
a) ↑	190,00–26,80 190,00–26,80	} 163,01	8'	0,013110
b) ↓	190,00–26,80 190,02–26,79			
c) ↑	190,02–26,79	163,04	8'	0,013106

$$\bar{\eta} = 0,013139, \quad \delta = 0,000071, \quad A = 0,000009.$$

2. $P = 123,27$ cm, $\eta = 0,013090$.

a) ↓	169,79–46,39 169,79–46,39	} 123,25	10' 38,8''	0,013191
b) ↑	169,79–46,40 169,80–46,39			
c) ↓	169,81–46,38 169,82–46,37	} 123,29	10 38,2	0,013183
d) ↑	169,82–46,37 169,80–46,39			

$$\bar{\eta} = 0,013144, \quad \delta = 0,000054, \quad A = 0,000008.$$

3. $P = 80,90$ cm, $\eta = 0,013123$.

	P $R \quad L$	P_0	t	η'
a) ↓	148,30 – 67,38 148,32 – 67,36	} 80,85	16' 15,2''	0,013210
b) ↑	148,32 – 67,36 148,36 – 67,32	} 80,91	16 6,6	0,013104
c) ↓	148,36 – 67,32 148,34 – 67,34	} 80,93	16 14,4	0,013213

$$\bar{\eta} = 0,013157, \quad \delta = 0,000034, \quad \Delta = 0,000008.$$

4. $P = 47,80$ cm, $\eta = 0,013171$.

a) ↑	131,40 – 83,55 131,40 – 83,55	} 47,80	27' 14,8''	0,013093
b) ↓	130,89 – 84,07 130,92 – 84,05	} 46,80	28 16	0,013299
c) ↑	130,92 – 84,04 130,92 – 84,04	} 46,82	27 49,2	0,013094
d) ↓	130,91 – 84,05 130,90 – 84,06	} 46,79	28 15,4	0,013291

$$\bar{\eta} = 0,013192, \quad \delta = 0,000021, \quad \Delta = 0,000009.$$

5. $P = 24,70$ cm, $\eta = 0,013331$.

a) ↑	119,49 – 94,80 119,50 – 94,79	} 24,67	53' 1,6''	0,013151
b) ↓	119,52 – 94,77 119,52 – 94,77	} 24,72	54 27,4	0,013533

$$\bar{\eta} = 0,013342, \quad \delta = 0,000011, \quad \Delta = 0,000012.$$

1) Die erste Beobachtung dieser Gruppe wurde längere Zeit vor den nachfolgenden gemacht, weshalb die Druckänderung zwischen a) und b) nicht stetig zu sein braucht.

IV. Versuchsreihe.

Aethyläther, über Natrium destillirt, bei 10°C ; Apparat: Capillare
 $a = 0,04956\text{ cm}$; $b = 0,03717\text{ cm}$; $l = 4,7\text{ cm}$; Volumen $v = 3,50\text{ ccm}$;
 $\log k = 0,89073 - 8$.

1. $P = 102,47\text{ cm}$, $\eta = 0,002528$.

	$\begin{matrix} P \\ R \quad L \end{matrix}$	P_0	t	η'
a) ↓	159,31—56,81 159,37—56,75	} 102,41	5' 26,8''	0,002602
b) ↑	159,37—56,75 159,38—56,74			
c) ↓	159,38—56,75	102,49	5' 27,2	0,002607
d) ↑	159,36—56,76 159,38—56,74	} 102,48	5' 26,0	0,002597

$$\bar{\eta} = 0,002600, \quad \delta = 0,000072, \quad A = 0,000002.$$

2. $P = 76,83\text{ cm}$, $\eta = 0,002545$.

a) ↓	146,34—69,50 146,37—69,47	} 76,80	ca. 7' 17,2''	0,002591
b) ↑	146,37—69,47 146,38—69,46			
c) ↓	146,39—69,45 146,40—69,44	} 76,84	7' 16,2	0,002606
d) ↑	146,39—69,45			
e) ↓	146,39—69,45	76,84	7' 16,4	0,002607

$$\bar{\eta} = 0,002599, \quad \delta = 0,000054, \quad A = 0,000002.$$

3. $P = 46,10\text{ cm}$, $\eta = 0,002571$.

a) ↓	130,59—84,49 130,64—84,44	} 46,09	12' 2,8''	0,002590
b) ↓	130,65—84,43 130,63—84,45			
c) ↑	130,62—84,47 130,63—84,46	} 46,10	12' 2,2	0,002589
d) ↓	130,61—84,48 130,61—84,48			

$$\bar{\eta} = 0,002603, \quad \delta = 0,000032, \quad A = 0,000002.$$

4. $P = 30,16$ cm, $\eta = 0,002589$.

	$\begin{smallmatrix} P \\ R \quad L \end{smallmatrix}$	P_0	t	η'
a) ↓	122,35—92,21 122,36—92,20	} 30,11	18' 44,8''	0,002633
b) ↑	122,36—92,20 122,38—92,18	} 30,14	18' 23,6	0,002586
c) ↓	122,38—92,18 122,39—92,17	} 30,18	18' 41,8	0,002633
d) ↑	122,40—92,17	30,20	18' 22	0,002588
$\bar{\eta} = 0,002610, \quad \delta = 0,000021, \quad \Delta = 0,000002.$				

5. $P = 19,59$ cm, $\eta = 0,002611$.

a) ↓	116,90—97,32 116,92—97,30	} 19,58	29 5,8''	0,002658
b) ↑	116,92—97,30 116,92—97,30	} 19,60	28' 21	0,002592
c) ↓	116,92—97,30 116,92—97,30	} 19,60	29' 5,2	0,002660
d) ↑	116,90—97,32 116,87—97,35	} 19,55	28' 33,6	0,002602
$\bar{\eta} = 0,002624, \quad \delta = 0,000013, \quad \Delta = 0,000003.$				

V. Versuchsreihe.

Chloroform bei 15° C; Apparat: Capillare $a = 0,04956$ cm; $b = 0,03717$ cm;
 $l = 4,7$ cm; Volumen $v = 3,50$ ccm; $\log k = 0,89073-7$.

1. $P = 131,45$ cm, $\eta = 0,005823$.

	$\begin{smallmatrix} P \\ R \quad L \end{smallmatrix}$	P_0	t	η'
a) ↓	174,00—42,35 174,00—42,35	} 131,48	9' 37,4''	0,005904
b) ↑	174,00—42,35 173,98—42,37	} 131,46	9 37,8	0,005906
c) ↓	173,98—42,37 173,98—42,37	} 131,43	9 38,2	0,005909
d) ↑	173,96—42,39 173,97—42,38	} 131,41	9 37,8	0,005906
$\bar{\eta} = 0,005906, \quad \delta = 0,000082, \quad \Delta = 0,000004.$				

2. $P = 85,31$ cm, $\eta = 0,005849$.

	$\begin{matrix} P \\ R \quad L \end{matrix}$	P_0	t	η'
a) ↓	$\begin{matrix} 150,50 - 65,22 \\ 150,51 - 65,21 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 85,20$	$14' 51,6''$	0,005907
b) ↑	$\begin{matrix} 150,51 - 65,21 \\ 150,51 - 65,21 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 85,20$	$14 \ 49,8$	0,005895
c) ↓	$\begin{matrix} 150,57 - 65,18 \\ 150,64 - 65,14 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 85,36$	$14 \ 50$	0,005907
d) ↑	$\begin{matrix} 150,65 - 65,14 \\ 150,70 - 65,09 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 85,46$	$14 \ 47,2$	0,005895

$$\bar{\eta} = 0,005901, \quad \delta = 0,000052, \quad \Delta = 0,000004.$$

3. $P = 47,19$ cm, $\eta = 0,005880$.

a) ↓	$\begin{matrix} 131,07 - 83,91 \\ 131,11 - 83,87 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 47,14$	$26' 56''$	0,005923
b) ↑	$\begin{matrix} 131,12 - 83,86 \\ 131,17 - 83,81 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 47,25$	$26 \ 44,6$	0,005895

$$\bar{\eta} = 0,005909, \quad \delta = 0,000029, \quad \Delta = 0,000004.$$

4. $P = 25,28$ cm, $\eta = 0,005921$.

a) ↓	$\begin{matrix} 119,80 - 94,49 \\ 119,82 - 94,47 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 25,28$	$50' 33''$	0,005962
------	--	--	------------	----------

Für $p = 0,11$, wie es sich aus den vorhergehenden Versuchen ergibt, folgt

$$\bar{\eta} = 0,005936, \quad \delta = 0,000015, \quad \Delta = 0,00005.$$

5. $P = 75,40$ cm, $\eta = 0,005850$.

a) ↑	$\begin{matrix} 145,57 - 70,10 \\ 145,58 - 70,09 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 75,40$	$16' 47,6''$	0,005907
b) ↓	$\begin{matrix} 145,57 - 70,09 \\ 145,56 - 70,10 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} 75,39$	$16 \ 44$	0,005885

$$\bar{\eta} = 0,005896, \quad \delta = 0,000046, \quad \Delta = 0,00004.$$

Berechnet man für die einzelnen Versuchsgruppen die Werthe des von dem Chloroform im Apparat herrührenden Druckes, so erhält man

1. $p = -0,03$, 2. $-0,09$, 3. $-0,11$, 5. $-0,14$,

also wachsende Werthe von $-p$, wie auch aus der Verdunstung des Chloroforms nothwendig folgt.

IV. Abschnitt.

Wenn man aus den in dem III. Abschnitt citirten Versuchsergebnissen die Aenderung des berechneten Coefficienten η mit dem Druck graphisch darstellt, so sieht man, dass sich diese Abhängigkeit vom Druck näherungsweise darstellen lässt durch eine Hyperbel, welche die η -Axe einerseits und eine Parallele zur P -Axe andererseits zu Asymptoten hat; die Hyperbel ist eine gleichseitige, weil ihre Asymptoten aufeinander senkrecht stehen, und lässt sich durch die Gleichung

$$P(\eta - a) = b$$

analytisch wiedergeben, wobei a den Abstand der horizontalen Asymptote von der eigentlichen P -Axe:

$$\eta = 0$$

angiebt, oder physikalisch gesprochen, den Grenzwert repräsentirt, dem sich der Reibungscoefficient mit wachsendem Drucke nähert. Die Constante b ist abhängig von den Dimensionen des Apparates und giebt ein Maass für die Krümmung der Curven, indem aus

$$P(\eta - a) = b$$

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

und daraus

$$\frac{d\eta}{dP} = -\frac{b}{P^2}; \quad \frac{d^2\eta}{dP^2} = +\frac{2b}{P^3}$$

und für den Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dP}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{dP^2}}$$

also

$$\varrho = \frac{P^3 \left(1 + \frac{b^2}{P^4}\right)^{3/2}}{2b}$$

folgt.

Für die Krümmung der Curven wird demnach

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2b \cdot P^2}{(b^2 + P^4)^{3/2}}.$$

Vernachlässigt man wegen der Kleinheit von b den Ausdruck b^2 gegenüber dem relativ grossen Werth von P^4 bei den angewendeten Drucken, so ergibt sich als annäherndes Maass für die Krümmung der einzelnen Curven der Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2b}{P^3}$$

also eine Proportionalität mit b für die verschiedenen Versuchsreihen, wenn man gleiche Drucke voraussetzt.

Um den Werth der Constanten a zu erhalten, bediente ich mich des nachfolgenden Näherungsverfahrens.

Ausgehend von einem Werthe a_1 , der kleiner ist als alle für die betreffende Substanz bei der Versuchstemperatur erhaltenen Reibungscoefficienten (die Hagenbach'sche Correctur bereits mit eingerechnet) und der, soweit man es aus der Zeichnung ersehen kann, die ja nur für Drucke von höchstens 180 cm Wasser noch Werthe von η angiebt, in der Nähe von $\eta = a$ liegt, setzt man

$$a = a_1 - z,$$

sodass

$$P \cdot (\eta - a_1 + z) = b$$

wird, wobei $\eta - a_1$ eine nicht zu grosse Zahl wird, mit der sich bequem rechnen lässt.

Wegen der unvermeidlichen Fehler, welche den einzelnen Versuchen anhaften, kann man nicht den einfachsten Weg einschlagen, nämlich aus zwei Versuchen z und b berechnen und dann die Uebereinstimmung der anderen Versuchsergebnisse mit den beiden zur Berechnung benutzten nachweisen; es empfiehlt sich vielmehr aus verschiedenen Paaren von Versuchen, indem man für je zwei Versuche b als gleich annimmt, die Werthe von z durch Elimination von b zu finden, den Mittelwerth zu nehmen, für diesen die Constante b aus jedem Versuch und aus dem Mittelwerth von b wiederum die z zu rechnen. Ist z_m der so gewonnene Mittelwerth, so stellt

$$\eta = a = a_1 - z_m$$

die andere Asymptote dar, und für jeden Werth P folgt ohne die geringste Schwierigkeit das zugehörige η aus der überaus einfachen Gleichung

$$\eta = \frac{b}{P} + a.$$

So gestaltet sich für die I. Versuchsreihe (vgl. auch Fig. 2), wenn man

$$a_1 = 0,011250$$

annimmt, die Zusammenstellung der Versuchsergebnisse wie folgt:

1. 163,6 $(44 + z) \cdot 10^{-6} = b$
2. 159,9 $(48 + z) \cdot 10^{-6} = b$
3. 121,7 $(63 + z) \cdot 10^{-6} = b$
4. 121,5 $(56 + z) \cdot 10^{-6} = b$
5. 48,3 $(158 + z) \cdot 10^{-6} = b$
6. 24,3 $(340 + z) \cdot 10^{-6} = b$

Fig. 2.

Als Mittelwerth von z erhält man:

$$z = 8,2 \cdot 10^{-6}.$$

Der Mittelwerth von b , der durch Einsetzen dieses Werthes von z in die obigen 6 Gleichungen sich ergibt, ist

$$b = 8260,6 \cdot 10^{-6}.$$

Für diesen Werth folgt als arithmetisches Mittel der Werthe von z die Zahl

$$z = 7 \cdot 10^{-6},$$

sodass die Aenderung der inneren Reibung mit dem Druck für diese Versuchsreihe dargestellt wird durch die Hyperbelgleichung:

$$\eta = \frac{0,0082606}{P} + 0,011243.$$

Um die Annäherung, mit welcher durch diese Gleichung die gewonnenen Versuchsergebnisse wiedergegeben werden, recht

Fig. 3.

in die Augen springen zu lassen, habe ich in der folgenden Tabelle die aus der Formel sich ergebenden Werte η_1 und die aus der Beobachtung folgenden η_2 bei dem angewendeten Druck P zusammengestellt und unter $\eta_1 - \eta_2$ die Differenzen beider eingetragen, während unter Δ wie in den Versuchs-

tabellen die bei den oben angenommenen Beobachtungsfehlern sich ergebenden Fehler von η aufgeführt sind; die Versuche sind zum Zwecke der grösseren Uebersichtlichkeit nach fallenden Drucken geordnet.

P	η_1 (berechnet)	η_2 (beobachtet)	$(\eta_1 - \eta_2) \cdot 10^6$	$A \cdot 10^6$
163,6	0,011293	0,011294	- 1	4
160,0	0,011293	0,011296	- 3	4
121,5	0,011311	0,011306	+ 5	4
121,7	0,011311	0,011312	- 1	4
48,3	0,011414	0,011408	+ 6	6
24,3	0,011583	0,011590	- 7	9

Der Umstand, dass die Differenzen zwischen den aus der Formel berechneten und den aus der Beobachtung sich ergebenden Werthen fast überall innerhalb der Fehlergrenzen liegen, beweist die Brauchbarkeit der aufgestellten Formel innerhalb der bei den Versuchen angewendeten Drucke.

Um zu zeigen, dass sich die Constanten a und b mit dem Apparat etwas ändern, dass aber die Abhängigkeit des η von P doch annähernd dieselbe bleibt, sei im Folgenden die II. Versuchsreihe (ebenfalls Wasser bei 15°C. , nur in einem Apparat mit einer kürzeren Capillare) derselben Rechnung unterzogen (vgl. auch Fig. 3). Aus den Versuchen entnehmen wir für

$$a_1 = 0,011270$$

1. $167,8 (32 + \varepsilon) \cdot 10^{-6} = b$
2. $116,2 (56 + \varepsilon) \cdot 10^{-6} = b$
3. $76,6 (89 + \varepsilon) \cdot 10^{-6} = b$
4. $46,4 (148 + \varepsilon) \cdot 10^{-6} = b$
5. $44,1 (154 + \varepsilon) \cdot 10^{-6} = b$
6. $24,5 (273 + \varepsilon) \cdot 10^{-6} = b$

Für die Werthe

$$b = 0,0068634$$

und

$$a = 0,0112664$$

liefert die Formel

$$\eta = \frac{0,0068634}{P} + 0,0112664$$

eine Annäherung, wie die folgende Tabelle sie zeigt:

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
167,8	0,011307	0,011302	+ 5	7
116,2	0,011326	0,011326	0	6
76,6	0,011356	0,011359	- 3	6
46,4	0,011415	0,011418	- 3	6
24,5	0,011546	0,011543	+ 3	5
44,1	0,011422	0,011424	- 2	6

Aus den beiden für die I. und II. Versuchsreihe erhaltenen Formeln folgt, dass sich bei der langen Capillare der I. Versuchsreihe wegen des grösseren Werthes von b eine stärkere Aenderung der inneren Reibung mit dem Druck bemerkbar macht, als bei der kurzen Capillaren der II. Versuchsreihe. Die Verschiedenheit der Werthe von a in den beiden Formeln ist wohl auf die Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Constanten der Apparate zurückzuführen. Die nachfolgende Tabelle liefert für die links stehenden Drucke die berechneten Zahlenwerthe η und η' , die aus den zwei Formeln für die erste bez. für die zweite Versuchsreihe hervorgehen; $\Delta\eta$ bez. $\Delta\eta'$ repräsentiren die durch die Beobachtungsfehler bedingten Ungenauigkeiten der Reibungscoefficienten, $\eta - \eta'$ die sich ergebenden Differenzen.

P	η	$\Delta\eta$	η'	$\Delta\eta'$	$\eta - \eta'$
30	0,011518	8	0,011495	5	23
40	0,011450	7	0,011438	6	12
50	0,011408	6	0,011403	6	5
60	0,011381	5	0,011380	6	1
70	0,011361	5	0,011364	6	- 3
80	0,011346	5	0,011352	6	- 6
90	0,011335	4	0,011342	6	- 7
100	0,011326	4	0,011335	6	- 9
120	0,011312	4	0,011323	6	- 11
140	0,011302	4	0,011315	7	- 13
160	0,011295	4	0,011309	7	- 14
180	0,011289	5	0,011304	9	- 15

Die III. Versuchsreihe (vgl. auch Fig. 4) für Wasser bei 10° C. liefert für

$$a_1 = 0,013030$$

$$b = 0,0073178$$

$$\kappa = 0,0000026$$

die Formel

$$\eta = \frac{0,0073178}{P} + 0,013027.$$

Fig. 4.

Die Uebereinstimmung zwischen den aus der Formel berechneten und den aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthen zeigt die Tabelle:

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
163,0	0,013072	0,013068	4	9
123,3	0,013087	0,013090	- 3	8
80,9	0,013118	0,013123	- 5	8
47,8	0,013180	0,013171	+ 9	9
24,6	0,013425	0,013431	- 6	12

Die Tabelle zeigt auch in diesem Falle die vortreffliche Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe.

Um zu zeigen, ob und bis zu welchem Grade die Relation

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

auch für viel kleinere Coefficienten brauchbar ist, sei im Nachfolgenden dieselbe Methode angewendet auf Aethyläther bei 10° C. (IV. Versuchsreihe, vgl. auch Fig. 5). Es ergibt sich für die berechneten Werthe

$$a = 0,002520 \text{ und } b = 0,0019344$$

die Formel

$$\eta = \frac{0,0019344}{P} + 0,002520,$$

deren Güte die folgenden Zahlen charakterisiren.

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
102,6	0,002539	0,002528	11	2
93,0	0,002541	0,002535	6	2
76,9	0,002546	0,002545	1	2
53,6	0,002557	0,002561	— 4	2
46,2	0,002562	0,002571	— 9	2
30,2	0,002585	0,002589	— 4	2
19,6	0,002619	0,002618	1	3

Die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen sind von derselben Grössenordnung, indessen sind sie bedeutend grösser als die hier allerdings sehr kleinen durch falsche Ablesungen am Manometer bez. ungenaue Zeitbestimmung bedingten Fehler Δ . Allein der Umstand, dass die Abweichungen der Werthe von η_1 und η_2 nicht constant nach einer Richtung hin sind, sondern variiren, spricht doch dafür, dass auch für diese Versuchsreihe die aufgestellte Formel den an sie gestellten Anforderungen, die Aenderung von η mit P durch eine einfache Relation darzustellen, ganz gut genügt, indem die Differenzen immer noch innerhalb der Grenzen 0,04 Proc. bis 0,4 Proc., bei fünf Beobachtungen von den sieben sogar unter 0,16 Proc. bleiben, während die relativ geringen Beobachtungsfehler unter Voraussetzung ganz constanter Temperaturen immerhin einen Einfluss bis zu 0,12 Proc. auf den Coefficienten der inneren Reibung haben.

Etwa dasselbe Resultat liefert die Anwendung der abgeleiteten Formel auf die V. Versuchsreihe (vgl. auch Fig. 6). Für Chloroform bei 15° C. wird:

$$a = 0,005810$$

$$b = 0,002910$$

und

$$\eta = \frac{0,002910}{P} + 0,005810.$$

Fig. 5.

Fig. 6.

Inwieweit berechnete und beobachtete Werthe übereinstimmen, zeigt nachfolgende Tabelle.

P	η_1	η_2	$\eta_1 - \eta_2$	Δ
131,4	0,005832	0,005826	6	4
85,4	0,005844	0,005849	- 5	4
75,4	0,005849	0,005850	- 1	4
47,2	0,005871	0,005880	- 9	4
25,2	0,005926	0,005921	5	5

Die Differenzen $\eta_1 - \eta_2$ sind hier weniger gross als bei der IV. Versuchsreihe, während die Fehler in der Beobachtung wesentlich grösseren Einfluss haben, sodass die Uebereinstimmung in diesem Falle wieder besser ist. Man erkennt aus den angeführten Beobachtungen, dass die Formel

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

die Aenderung der inneren Reibung mit dem Druck mit um so grösserer Annäherung darstellt, je grösser die Viscosität der untersuchten Substanz ist. Andererseits lässt sich ohne Schwierigkeit der ohnehin sehr plausible Satz aus den erhaltenen Resultaten ablesen, dass diese Aenderung $d\eta/dP$ um so grösser ist, je grösser die Viscosität ist. Die Richtigkeit der letzten Behauptung ist sofort evident, wenn man die fünf gewonnenen Formeln zusammenstellt.

$$(I) \quad \eta = \frac{0,0082606}{P} + 0,011243,$$

$$(II) \quad \eta = \frac{0,0068634}{P} + 0,011266,$$

$$(III) \quad \eta = \frac{0,0073178}{P} + 0,013027,$$

$$(IV) \quad \eta = \frac{0,0019344}{P} + 0,002520,$$

$$(V) \quad \eta = \frac{0,002910}{P} + 0,005810.$$

Die scheinbare Ausnahme bei (I) ist auf die wesentlich anderen Dimensionen des bei der I. Versuchsreihe benutzten Apparates mit der langen Capillare zurückzuführen.

V. Abschnitt.

Nachdem so durch die vorhergehenden Beobachtungen eine nicht unwesentliche Abweichung von dem Poiseuille'schen Gesetz nachgewiesen ist, resultirt daraus die Aufgabe, eine möglichst plausible Erklärung dafür zu geben.

Die Richtigkeit der eigentlichen Voraussetzung des Poiseuille'schen Gesetzes, dass nämlich die innere Reibung pro-

portional ist der relativen Geschwindigkeit, mit welcher die einzelnen Flüssigkeitsschichten aneinander vorbeigleiten, muss wohl ausser allen Zweifel gesetzt werden; denn es scheint natürlich, dass bei der n -fachen Geschwindigkeitsdifferenz zweier sich reibender Schichten die Zahl der pro Zeiteinheit aneinander vorbeieilenden Flüssigkeitsmoleküle die n -fache ist; daraus aber folgt, dass auch die zur Ueberwindung der Adhäsion der einzelnen Moleküle nothwendige Kraft oder die innere Reibung proportional ist mit der Geschwindigkeitsdifferenz.

Es war daher naheliegend, anzunehmen, dass wie bei der Reibung fester Körper so auch bei der Reibung von Flüssigkeiten Wärme frei wird. Bei hohen Drucken, wo die Geschwindigkeiten in den Capillaren grössere sind, werden die Geschwindigkeitsdifferenzen der einzelnen Schichten grösser werden, indem die Geschwindigkeit der äussersten Flüssigkeitsschicht als unendlich klein angenommen wird. So folgt aus dem Grösserwerden der Geschwindigkeitsdifferenzen mit wachsendem Druck *eine Steigerung der Temperatur* und daraus eine Abnahme der inneren Reibung.

Indess zeigt eine genauere Betrachtung der Consequenzen dieser Annahme verglichen mit den obigen Resultaten die Unmöglichkeit einer solchen Begründung der Erscheinung (vgl. Dissertation p. 49—51).

Sieht man von einer Erklärung der durch die vorliegende Arbeit nachgewiesenen Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz durch die Annahme einer Wärmeentwicklung ab, so bleibt augenscheinlich nur noch die Möglichkeit, die Gleitung an der Röhrenwand zur Begründung heranzuziehen.

Bisher begnügte man sich, die äussere Reibung einer benetzenden und nach Warburg¹⁾ auch die einer nicht benetzenden Flüssigkeit als unendlich gross bez. die Geschwindigkeit als unendlich klein anzunehmen, wofern die Röhre nur eine Capillare war.

Der Grund hierfür liegt durchaus nicht in dem Wesen der Benetzung einer festen Wand durch eine Flüssigkeit, sondern lediglich darin, dass man bisher, infolge nicht genügend genau

1) E. Warburg, Pogg. Ann. 140. p. 337. 1870.

ausgeführter Messungen noch keinen Widerspruch mit dieser Annahme gefunden hat.

Die Versuche von Poiseuille, Coulomb und Darcy, die hierbei gewöhnlich angeführt werden, sind, wie im I. Abschnitt gezeigt wurde, nicht im Stande, diese Annahme zu beweisen. Vielmehr legt ein eingehendes Studium der einschlägigen Literatur, insbesondere der Arbeit von Darcy, gerade die gegentheilige Ansicht nahe, dass Gleitung stattfindet.

Darcy hat ja allerdings in seiner Arbeit, indem er sich von rein praktischem Interesse leiten liess, nur weite Röhren behandelt, allein der Unterschied zwischen dem Strömen einer Flüssigkeit in einer weiten Röhre und dem Fliessen in einer Capillaren scheint mir durchaus nicht darin zu bestehen, dass in dem ersteren Falle die an der Röhrenwandung befindliche Flüssigkeitsschicht eine endliche Geschwindigkeit besitzt, während sie im zweiten Falle an der Wand festhaftet, also eine unendlich kleine Geschwindigkeit besitzt; vielmehr halte ich es für sehr wahrscheinlich, dass auch im letzteren Falle eine, wenn auch wesentlich kleinere, aber doch immerhin endliche Geschwindigkeit vorhanden ist, die, wie die Maximalgeschwindigkeit in der Röhre und die mittlere Geschwindigkeit mit dem Druck zunimmt.

Was das Fliessen einer Flüssigkeit in Capillaren von dem in weiten Röhren wesentlich unterscheidet, soll im Folgenden kurz erörtert werden.

Wenn die Flüssigkeit in eine Röhre eintritt, so werden anfangs die Flüssigkeitstheilchen nahezu gleiche Geschwindigkeiten haben, nämlich diejenige, mit der sie sich der Röhre näherten; in der Mitte der Röhre werden nun die Geschwindigkeiten wegen der Dimensionen des Querschnittes und des als stationär anzunehmenden Vorganges eine sehr bedeutende Zunahme, am Rande aber wegen der Benetzung derselben eine Abnahme erfahren. Das Resultat dieser rasch vor sich gehenden Geschwindigkeitsänderungen wird bei den immerhin ziemlich verschiedenen Richtungen der in die Röhre eintretenden Flüssigkeitstheilchen nothwendig zu Wirbelbewegungen Veranlassung geben. Bei Capillaren wird dieser Uebergang in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit vor sich gehen wegen der Nähe der Wandungen, während bei Röhren mit relativ grossen Quer-

schnitten dem Fortbestehen von Wirbelbewegungen die grössere Entfernung der Wandungen weniger hinderlich ist.

Die Annahme, dass die constatirte Aenderung des Coefficienten der inneren Reibung mit dem Druck vielleicht in dem Auftreten solcher *Wirbelbewegungen* ihre Ursache habe, ist indess hinfällig, indem sich daraus eine Zunahme der berechneten Coefficienten ergeben müsste, im Gegensatz zu den Resultaten der Beobachtung.

Es werden diese Wirbelbewegungen am Anfang der Capillaren ja zweifellos auftreten, allein gegenüber der Gleitung, die mit wachsenden Drucken wohl rascher zunehmen wird als diese auf ein ausserordentlich kleines Gebiet beschränkten Wirbelbewegungen, können sie wohl mit Recht vernachlässigt werden.

Dass die berechneten Coefficienten sich einem Grenzwerthe nähern, lässt sich verstehen, sobald man bedenkt, dass von einer gewissen Geschwindigkeit der Randschicht an die Adhäsion der Flüssigkeitstheilchen an der Wand einer Steigerung der Randgeschwindigkeit durch die bekanntlich sehr bedeutenden Capillarkräfte entgegenwirkt.

Um eine Vorstellung von der Aenderung der Gleitung mit dem Druck zu erhalten, geht man am besten von der von H. v. Helmholtz) für die pro Zeiteinheit den Querschnitt der Capillaren passirende Flüssigkeitsmenge Q aufgestellten Formel

$$(1) \quad Q = \frac{\pi \cdot P}{8 \eta \cdot l} \left\{ R^4 + \frac{4}{\lambda} \eta R^3 \right\}$$

aus, in welcher η/λ die Gleitung ist.

In dem IV. Abschnitt wurde gezeigt, dass der nach der Formel

$$\eta = \frac{\pi \cdot P \cdot t}{8 l \cdot v} \cdot R^4$$

(unter der vereinfachenden Voraussetzung eines kreisförmigen Querschnittes) berechnete Coefficient sich darstellen lässt durch

$$\eta = \frac{b}{P} + a.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (1) ein und führt statt der secundlich die Capillare passirenden Flüssigkeitsmenge das Gesamtvolumen v und die Versuchsdauer t ein, so erhält man:

$$(2) \quad \eta_i = \frac{b}{P} + a + \pi \frac{4 \cdot P \cdot t \cdot \eta_i \cdot R^3}{8 l \cdot \lambda \cdot v},$$

wobei mit η_i der vom Druck als unabhängig angenommene Coefficient der inneren Reibung bezeichnet ist.

In dem zweiten Gliede kann man, um t zu eliminiren,

$$\pi \frac{P \cdot t \cdot R^3}{8 l \cdot v} = \frac{1}{R} \left(\frac{b}{P} + a \right)$$

substituiren und erhält dadurch:

$$(3) \quad \eta_i = \left(\frac{b}{P} + a \right) \left(1 + \frac{4 \cdot \eta_i}{\lambda \cdot R} \right).$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\lambda} = \left\{ \frac{\eta_i}{\frac{b}{P} + a} - 1 \right\} \cdot \frac{R}{4 \cdot \eta_i}$$

oder

$$(3a) \quad \lambda = \frac{\frac{b}{P} + a}{\eta_i - \left(\frac{b}{P} + a \right)} \cdot \frac{4 \cdot \eta_i}{R}.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= 4 b \cdot \eta_i, & \beta &= 4 a \cdot \eta_i, \\ \gamma &= -b, & \eta_i - a &= \delta, \end{aligned}$$

so stellt sich die Abhängigkeit des λ vom Druck dar durch die Gleichung:

$$(4) \quad \lambda = \frac{\alpha + \beta \cdot P}{\gamma + \delta \cdot P} \cdot \frac{1}{R}.$$

Da $\delta = \eta_i - a$ immerhin eine kleine Grösse ist, sodass $\delta^2 \cdot P^2$ vernachlässigt werden kann, so lässt sich auch schreiben:

$$\lambda = (\alpha + \beta \cdot P) \left(1 - \frac{\delta}{\gamma} \cdot P \right) \frac{1}{R \cdot \gamma}$$

oder

$$(5) \quad \lambda = \frac{1}{R} \{ \alpha' + \beta' P + \gamma' P^2 \}.$$

Wesentlich einfacher für eine numerische Berechnung gestaltet sich die Gleichung (3a), wenn man in dieselbe wieder die Substitution

$$\eta = \frac{b}{P} + a$$

macht; man erhält die einfache Relation:

$$(6) \quad \lambda = \frac{4 \eta_i \cdot \eta}{R(\eta_i - \eta)}.$$

Nimmt man an, dass der Grenzwert, dem sich der aus den Beobachtungen sich ergebende Coefficient nähert, gerade die innere Reibung η_i darstellt, so ergibt sich für λ eine negative Zahl, indem $\eta_i < \eta$ ist.

Das negative Vorzeichen der äusseren Reibung und damit der Gleitung weist darauf hin, dass die Flüssigkeit am Rande der Capillare eine entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit hat, was sich durch die Unebenheiten der Röhrenwandung und der dadurch bedingten Wirbelbewegungen erklären lässt und in der Mittheilung von Sir William Thomson¹⁾ „On Stationary Waves in Flowing Water“ ein Analogon haben dürfte, wo gezeigt wird, dass Unebenheiten auf dem Grunde eines Flussbettes auf der Oberfläche des Wassers flussaufwärts gehende Wellen zur Folge haben, was in dem schottischen System des „fly-boat“ praktische Verwerthung findet.

Da die benutzten Capillaren nicht kreisförmigen, sondern elliptischen Querschnitt hatten, benutzte ich für R den aus der Gleichung

$$R^4 = \frac{2 a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

sich ergebenden Mittelwerth, um die Grösse der äusseren Reibung zahlenmässig darzustellen.

Aus jeder der fünf Versuchsreihen sind in den nachfolgenden Tabellen für die drei Drucke: 25 cm, 100 cm und 180 cm die Werthe von λ berechnet.

I. Versuchsreihe.		II. Versuchsreihe.	
Wasser bei 15° C.; $R=0,04158$ cm.		Wasser bei 15° C.; $R=0,05256$ cm.	
$P = 25$ cm	$\lambda = - 36,12$	$P = 25$ cm	$\lambda = - 33,32$
$P = 100$	$\lambda = - 147,60$	$P = 100$	$\lambda = - 140,84$
$P = 180$	$\lambda = - 265,44$	$P = 180$	$\lambda = - 202,00$

1) W. Thomson, Phil. Mag. (5) 22. p. 353—357, 445—452 und 517—523. 1886.

III. Versuchsreihe.		IV. Versuchsreihe.	
Wasser bei 10° C.; $R=0,05256$ cm.		Aethyläther b. 10° C.; $R=0,04248$ cm.	

$P = 25$ cm	$\lambda = - 45,08$	$P = 25$ cm	$\lambda = - 8,00$
$P = 100$	$\lambda = - 177,28$	$P = 100$	$\lambda = - 32,40$
$P = 180$	$\lambda = - 316,24$	$P = 180$	$\lambda = - 54,60$

V. Versuchsreihe.
Chloroform bei 15° C.; $R=0,04248$ cm.

$P = 25$ cm	$\lambda = - 27,96$
$P = 100$	$\lambda = - 110,16$
$P = 180$	$\lambda = - 199,20$

Die Tabellen lassen auf den ersten Blick eine Proportionalität der λ mit den Drucken erkennen und führen zu dem interessanten Resultat, dass die äussere Reibung mit steigender Temperatur abnimmt (Versuchsreihen I, II und III), dass die äussere Reibung von Chloroform bei 15° nur um wenig kleiner ist als die des Wassers bei 15° C., während für Aethyläther bei 10° die äussere Reibung nur den vierten Theil von der des Wassers bei 15° C. oder den sechsten Theil von der des Wassers bei derselben Temperatur (bei 10° C.) beträgt.

Die umgekehrte Proportionalität des λ mit dem Radius R der Capillaren steht in vollster Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Darcy und den ebenfalls für weite Röhren und Kanäle angestellten Untersuchungen der allerneuesten Zeit von Bazin¹⁾ und Boussinesq.²⁾

Jedenfalls ist die Erklärung der in dieser Arbeit untersuchten Abweichungen vom Poiseuille'schen Gesetz durch die Annahme einer Gleitung der äussersten Flüssigkeitsschicht an der Röhrenwandung durchaus ungezwungen und plausibel.

Wenn man bisher $\lambda = \infty$ anzunehmen pflegte, während sich aus diesen Berechnungen relativ nicht sehr grosse Zahlen ergeben, so liess man dabei ganz ausser Acht, dass der Werth des Quotienten

1) E. Bazin, Compt. rend. 122b. p. 1250. 1896.

2) J. Boussinesq, Compt. rend. 122b. p. 1447. 1896.

$$4 \frac{\pi \cdot P \cdot t}{v \cdot 8 l \lambda} \cdot R^3 \cdot \eta$$

(vgl. Formel (2)) schon wegen des kleinen Werthes des Zählers keine grosse Zahl sein kann, sodass schon bei einigermaassen grossen Werthen für λ der Werth des Quotienten die Grösse der Beobachtungsfehler nicht übersteigt.

Resultate.

1. Es wurde bisher eine Abweichung vom Poiseuille'schen Gesetz durch den directen Einfluss von Druckänderungen nicht nachgewiesen.

2. Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Versuche erweisen die Existenz einer Abweichung der Beobachtungsergebnisse in dem Sinne, dass für wachsende Drucke die Poiseuille'sche Formel mit Berücksichtigung des Hagenbach'schen Gliedes grössere Werthe liefert als die Beobachtung.

3. Die Aenderung des berechneten Coefficienten, wie er sich aus den Versuchsdaten ergibt, mit dem angewendeten Druck lässt sich mit sehr guter Annäherung darstellen durch die Gleichung:

$$\eta = \frac{b}{P} + a.$$

4. Eine Erklärung dieser beobachteten Erscheinung durch die Annahme einer Wärmeentwicklung ist hinfällig, während eine Gleitung der äussersten Flüssigkeitsschicht an der Röhrenwandung die Beobachtungsergebnisse vollständig zu erklären im Stande ist.

5. Für die äussere Reibung ergibt sich die einfache Formel

$$\lambda = \frac{4 \cdot \eta_i \cdot \eta}{R(\eta_i - \eta)}.$$

Daraus folgt, unter der Annahme, dass der Grenzwert a , dem der aus den Beobachtungen sich ergebende Coefficient mit wachsendem Drucke sich nähert, gerade die innere Reibung η_i darstellt, der Satz:

„Die äussere Reibung ist proportional dem Druck, unter dem die Flüssigkeit die Capillare passirt.“

Schliesslich gereicht es mir zur angenehmen Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Professoren Dr. E. v. Lommel und Dr. L. Graetz an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen für die Ueberlassung der zur Arbeit nöthigen Hilfsmittel, insbesondere aber für das meinen Untersuchungen entgegengebrachte Interesse und die mannichfachen Anregungen, die mir zu Theil wurden.

München, Physikal. Inst. der Kgl. Univ., Januar 1899.

(Eingegangen 17. Mai 1899.)