INTORNO ALLE CURVE RAZIONALI D'ORDINE n

DELLO SPAZIO A $n - 1$ DIMENSIONI,

di **Gino Loria**, a Genova.

Adunanza straord. del 14 ottobre 1888.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE $C_{i, n, n-1}$ RAZIONALI.

1. Nello spazio lineare a $n - 1$ dimensioni S , $n - 2$ fasci di primo ordine di spazii a $n - 2$ dimensioni S_{n-2} e uno di secondo ordine, generano colle mutue intersezioni degli elementi corrispondenti una curva razionale d'ordine n $C_{i, n, n-1}$. (*)

Se con $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ si designano le coordinate omogenee di un punto di S e con λ un parametro, le coordinate di un punto qualunque della curva si potranno esprimere nel seguente modo :

$$(1) \quad \rho x_i = \sum_{r=0}^{r=n} a_{i,r} \lambda^r \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

ρ essendo un fattore di proporzionalità.

Presi ad arbitrio n punti della curva corrispondenti ai valori $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$

(*) Seguendo l'esempio del sig E. H. Moore (*Transactions of the Connecticut Academy*, Vol. VII, 1885) indichiamo con $S_{r, n, k}$ uno spazio a r dimensioni, d'ordine n , contenuto in uno spazio lineare a k dimensioni e non in uno meno esteso.

del parametro λ , affinchè essi appartengano a un S_{n-2} è necessario e sufficiente che sussista la relazione

$$\begin{vmatrix} \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_0^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_0^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_0^r \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_1^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_1^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_1^r \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_{n-1}^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_{n-1}^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_{n-1}^r \end{vmatrix} = 0;$$

questa può scriversi

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0^n & \lambda_0^{n-1} & \dots & 1 \\ \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{n-1}^n & \lambda_{n-1}^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ma i determinanti estratti dalla seconda matrice valgono, a meno del fattore

$$\begin{vmatrix} \lambda_0^{n-1} & \lambda_0^{n-2} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

le somme dei prodotti i ad i delle λ ; quindi, indicando con L_i ($i=1, 2, \dots, n$) queste somme e convenendo che sia $L_0 = 1$ e $L_i = 0$ per $i > n$ o $i < n$, concluderemo: l'essere

$$(2) \quad \begin{vmatrix} L_0 - L_1 & L_2 & \dots & (-1)^n L_n \\ a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè gli n punti $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$

della data curva appartengano a uno stesso spazio di $n - 2$ dimensioni.

Indicando per brevità con D_i il determinante che si ottiene sopprimendo l' i^{ma} colonna della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

la (2) potrà scriversi più concisamente così

$$(2') \quad \sum_{i=0}^{i=n} D_i L_i = 0.$$

2. Facciamo nelle (2), (2') $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda$ ed otterremo

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & -n\lambda & \binom{n}{2}\lambda^2 & \dots & (-1)^n \lambda^n \\ a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0, \quad (3') \quad \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} D_i \lambda^i = 0.$$

Dunque: V_i sono n posti in ciascuno dei quali coincidono n punti della curva appartenenti a un medesimo spazio a $n - 2$ dimensioni; i valori corrispondenti del parametro λ sono le radici dell'equazione (3) o (3'). Chiameremo *stazionari* tanto questi n punti notevoli della curva quanto i corrispondenti S_{n-2} osculatori.

Siano $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ le radici della (3') e O_i la somma dei loro prodotti i ad i ; sarà

$$O_i = (-1)^i \binom{n}{i} \frac{D_{n-i}}{D_n} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n \text{ e } O_0 = 1,$$

epperò

$$\sum_{i=0}^{i=n} D_i O_i = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i D_i \binom{n}{i} \frac{D_{n-i}}{D_n} = \frac{1}{2D_n} \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i [1 + (-1)^n] D_i D_{n-i}.$$

Ne segue che quando n è dispari è identicamente

$$\sum_{i=0}^{i=n} D_i O_i = 0$$

e questa relazione ci dice, avuto riguardo alla (2'), che i punti stazionarii della curva appartengono a uno stesso spazio di $n - 2$ dimensioni; dunque :

Quando n è dispari, gli n punti stazionarii di una $C_{1, n, n-1}$ razionale stanno in uno spazio lineare a $n - 2$ dimensioni.

Per es. i tre flessi di una cubica piana razionale sono in linea retta.

3. Nella (2') facciamo invece

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-q-1} = \mu$$

$$\lambda_{n-q} = \lambda_{n-q+1} = \dots = \lambda_{n-1} = \nu$$

ed otterremo :

$$(4) \quad \sum_{i=0}^{i=n} D_i \sum_{r=0}^{r=i} \binom{n-q}{r-i} \binom{q}{i} \mu^{i-r} \nu^r = 0$$

equazione di grado $n - q$ in μ , di grado q in ν che conduce al seguente risultato :

La curva $C_{1, n, n-1}$ razionale ammette in ogni suo punto μ , q spazii a $n - 2$ dimensioni aventi comuni con essa $n - q$ punti coincidenti in μ e q coincidenti in un altro punto ν ; fra μ e ν passa una corrispondenza algebrica $(q, n - q)$, i cui elementi uniti sono i punti stazionarii della curva.

In particolare supponendo $q = 1$ si vede che : Per ogni punto della curva $C_{1, n, n-1}$ esiste uno spazio a $n - 2$ dimensioni che vi la oscula; per esso passano $n - 1$ tali spazii che la osculano altrove. L'equazione che lega il parametro μ di un punto della curva a quello λ di uno dei punti di osculazione di essa con spazii a $n - 2$ dimensioni passanti per quello, è

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} [D_{n-i-1} + D_{n-i}(\mu) \binom{n-1}{i} \lambda^{i-1}] = 0.$$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ le radici di questa considerata come equazione in λ ; il primo membro della (2'), quando L_i sia la somma dei

prodotti i a i delle n quantità $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \mu$, diviene, a meno del divisore $D_{n-1} + D_n \mu$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} D_i D_{n-i-1} + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (D_i D_{n-i} + D_{i+1} D_{n-i-1}) \\ + \mu^2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} D_{i+1} D_{n-i};$$

ora, quando n è pari, questa espressione è nulla per tutti i valori di μ ; dunque:

Quando n è pari, i punti di contatto della curva $C_{1,n,n-1}$ con i suoi spazii a $n-2$ dimensioni osculatori che passano per un punto arbitrario di essa, stanno in uno spazio a $n-2$ dimensioni che contiene questo punto.

Ad es.: per un punto di una quartica di 2^a specie passano tre suoi piani osculatori, e i punti di contatto determinano un piano su cui sta anche quel punto.

Se, qualunque sia n , si congiungono con un S_{n-2} i punti di contatto di $C_{1,n,n-1}$ con gli S_{n-2} osculatori che contengono un punto di essa, si otterrà, al variare di questo punto, una serie semplicemente infinita di S_{n-2} ; per ogni punto del dato spazio S passano due di questi spazii a $n-2$ dimensioni.

4. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ i parametri di $n-1$ punti arbitrarii della curva; essi determinano un S_{n-2} avente per equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_1^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_1^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_1^r \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_2^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_2^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_2^r \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{r=0}^{r=n} a_{0,r} \lambda_{n-1}^r & \sum_{r=0}^{r=n} a_{1,r} \lambda_{n-1}^r & \dots & \sum_{r=0}^{r=n} a_{n-1,r} \lambda_{n-1}^r \end{vmatrix} = 0,$$

ossia anche, sviluppando il primo membro secondo gli elementi della prima verticale,

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,0} & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_i^n & \lambda_i^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_i^n & \lambda_i^{n-1} & \dots & 1 \\ \lambda_{i+1}^n & \lambda_{i+1}^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{n-1}^n & \lambda_{n-1}^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

ovvero, chiamando L_i la somma dei prodotti i ad i delle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ e applicando un risultato da noi dimostrato altrove (*),

$$(5) \sum_i x_i \sum_{k,l} \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \dots & a_{0,l-1} & a_{0,l+1} & \dots & a_{0,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,0} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,l+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_k L_{k-1} \\ L_l L_{l-1} \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare, l'equazione dello spazio a $n - 2$ dimensioni che oscula in λ la curva sarà:

$$(6) \sum_i x_i \sum_{k,l} \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \dots & a_{0,l-1} & a_{0,l+1} & \dots & a_{0,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,0} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,l-1} & a_{n-1,l+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \times$$

$$\times n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l} \right) \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{l-1} \lambda^{k+l-1} = 0.$$

Se in questa equazione si ritengono dati $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, essa servirà a determinare i punti della curva i cui spazi a $n - 2$ dimensioni

(*) Vedi la Nota su una classe di determinanti (*Giornale di Matematiche*, t. XXVI).

osculatori passano pel punto di coordinate x_i ; e siccome essa è di grado $2(n-1)$ in λ , così:

Le curve $C_{1,n,n-1}$ razionali sono di classe $2(n-1)$.

5. L'equazione

$$\sum_{r=0}^{r=n} a_{i,r} \lambda^r = 0$$

(ove i è uno qualunque dei numeri $0, 1, \dots, n-1$) determina i punti comuni alla data curva e allo spazio a $n-2$ dimensioni $x_i = 0$; ne viene che se questo è uno degli spazii stazionarii, quell'equazione dovrà assumere la forma $\alpha_i(\lambda - \omega_i)^n$. Presi dunque come spazii fondamentali del nostro sistema di coordinate gli spazii stazionarii della data curva, questa sarà rappresentata dalle seguenti equazioni

$$(7) \quad \rho x_i = \alpha_i(\lambda - \omega_i)^n \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

ove le α_i si potrebbero anche supporre tutte eguali a 1. *E questa rappresentazione parametrica canonica è legittima ogniquale volta i punti stazionarii della curva sono distinti.*

Le coordinate di un punto qualunque della tangente nel punto λ alla curva $C_{1,n,n-1}$ (7) possono rappresentarsi così

$$\rho x_i = \alpha_i(\lambda - \omega_i)^n + k n \alpha_i(\lambda - \omega_i)^{n-1} \quad (i=0, 1, \dots, n-1),$$

ove k è il parametro individuante i vari punti della tangente stessa. Se k_i è il valore del parametro che spetta all'intersezione di questa tangente collo spazio $x_i = 0$, sarà evidentemente

$$k_i = - \frac{\lambda - \omega_i}{n}.$$

Ne viene che il gruppo di numeri $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ è proiettivo al gruppo $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$; ma quest'ultimo è indipendente dal punto λ , dunque:

Se i piani stazionarii di una $C_{1,n,n-1}$ razionale sono tutti distinti, il gruppo degli n punti in cui essi sono intersecati da una tangente alla

curva, si conserva proiettivo a sè stesso al variare di questa tangente

Per es.: una tangente a una quartica gobba di 2^a specie seca i piani stazionarii della curva in quattro punti il cui rapporto anarmonico è costante; in altre parole la curva appartiene a un complesso tetraedrale la cui superficie singolare è formata dai piani stazionarii della curva.

ALCUNE PARTICOLARI $C_{1, n, n-1}$ RAZIONALI.

6. Fra le curve razionali d'ordine n dello spazio a $n - 1$ dimensioni, meritano un posto speciale quelle suscettibili della seguente rappresentazione parametrica :

$$(8) \quad \rho x_0 = \lambda^n, \rho x_1 = \lambda^{n-1}, \dots, \rho x_{r-1} = \lambda^{n-r+1}, \rho x_r = \lambda^{n-r-1}, \dots, \rho x_{n-2} = \lambda, \rho x_{n-1} = 1$$

ove r è uno qualunque dei numeri $1, 2, \dots, n - 1$.

La condizione affinchè gli n punti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di tale curva appartengano a uno stesso spazio a $n - 2$ dimensioni è

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r-1} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_2^{n-r+1} & \lambda_2^{n-r-1} & \dots & \lambda_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n^n & \lambda_n^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-r+1} & \lambda_n^{n-r-1} & \dots & \lambda_n & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ossia } (9) \quad L_r = 0.$$

L'equazione che dà i punti stazionarii ha r radici nulle e $n - r$ radici infinite, dunque *dei punti stazionarii della curva r coincidono nel primo e $n - r$ nell'ultimo punto fondamentale del nostro sistema di riferimento (*)*. L'equazione che lega il parametro λ del punto in cui uno spazio a $n - 2$ dimensioni oscula la curva al parametro μ del punto in cui l'incontra è

$$\frac{\lambda}{r} + \frac{\mu}{n - r} = 0,$$

e ci prova che *fra quei due punti esiste una corrispondenza proiettiva avente per elementi uniti i punti stazionarii della curva*.

(*) Questa è la condizione geometrica affinchè le equazioni (1) si possano ridurre alla forma (8) la condizione algebrica per ciò è quindi che la (2) abbia una radice r -pla e una $(n-r)$ -pla.

7. L'equazione dello spazio a $n - 2$ dimensioni determinato dai punti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ della curva, ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{r-1} & x_r & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_1^{n-r+1} & \lambda_1^{n-r} & \dots & \lambda_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-1}^n & \lambda_{n-1}^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-r+1} & \lambda_{n-1}^{n-r} & \dots & \lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(10) \quad L_{r-1} x_0 + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i (L_i L_{r-1} - L_{i-1} L_r) x_i + \\ + \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^i (L_i L_{r-1} - L_{i-1} L_r) x_{i-1} + (-1)^{n+1} S_{n-1} L_r x_{n-1} = 0.$$

Ne segue che l'equazione dello spazio a $n - 2$ dimensioni che oscula in λ la curva in esame è:

$$(11) \quad \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] \lambda^i x_i + \\ + \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] \lambda^i x_{i-1} = 0 (*).$$

Se in questa relazione supponiamo fissati i valori di $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, essa si muterà in un'equazione di grado n in λ che servirà a determinare i parametri dei punti della curva i cui S_{n-2} osculatori passano per il punto di coordinate x_i ; quindi:

La curva è della classe n .

8. Chiamiamo k una costante arbitraria e poniamo nella (11)

$$\lambda = \frac{k}{\mu};$$

essa diverrà

(*) Rammentiamo che per definizione $\binom{n-1}{i}$ vale 1 se $i = 0$ od $n - 1$, vale invece 0 se $i > n - 1$ o $i < 0$.

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \mu^{n-i} x_i +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^n (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \mu^{n-i} x_i = 0$$

e servirà a determinare i punti $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ che corrispondono ai punti di osculazione considerati in fine del n.º prec. nella involuzione binaria $\lambda \mu = k$. Se chiamiamo M_i la somma dei prodotti i ad i delle μ avremo le relazioni

$$M_i = \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \frac{x_i}{x_0} \quad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$M_r = 0$$

$$M_i = \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \frac{x_{i-1}}{x_0} \quad (i=r+1, r+2, \dots, n);$$

la seconda delle quali manifesta che i suddetti punti $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ appartengono a uno spazio a $n-2$ dimensioni. Cerchiamone l'equazione.

Se L_i è la somma dei prodotti i ad i delle $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ le equazioni precedenti si possono scrivere così

$$L_i + \mu_n L_{i-1} = \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \frac{x_i}{x_0} \quad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$L_r + \mu_n L_{r-1} = 0$$

$$L_i + \mu_n L_{i-1} = \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \frac{x_{i-1}}{x_0} \quad (i=r+1, r+2, \dots, n)$$

ossia eliminando μ_n

$$L_i - \frac{L_{r-1}}{L_r} L_{i-1} = \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \frac{x_i}{x_0} \quad (i=1, 2, \dots, r-1)$$

$$L_i - \frac{L_{r-1}}{L_r} L_{i-1} = \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i \frac{x_{i-1}}{x_0} \quad (i=r+1, r+2, \dots, n)$$

E queste eguaglianze, quando si tenga presente la (10), ci conducono subito a concludere che l'equazione cercata di quello spazio a $n - 2$ dimensioni è

$$(12) \quad \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i x_i X_i + \\ + \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i X_{i-1} x_{i-1} = 0,$$

essendo X_i coordinate correnti. Ne tragghiamo la conclusione che *lo spazio suddetto è il polare del punto considerato* $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ *rispetto alla quadrica di equazione*

$$(13) \quad \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i X_i^2 + \\ + \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \frac{n-r}{r} \binom{n-1}{i-1} \right] k^i X_{i-1}^2 = 0.$$

Al variare di k si ottiene così una serie semplicemente infinita (di indice n) di quadriche rispetto a ciascuna delle quali i punti fondamentali del nostro sistema di riferimento formano un n -gono autoconjugato. Osserviamo finalmente che il confronto delle equazioni (11) e (12) mostra che gli spazi a $n - 2$ dimensioni polari del punto $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ rispetto alle quadriche di questa serie osculano una $C_{1, n, n-1}$ razionale le cui coordinate

$$1^a, 2^a, \dots, r^{ma}, (r+1)^{na}, \dots, (n-1)^{ma}, n^{ma}$$

sono espresse nel seguente modo in funzione di un parametro k :

$$\frac{k^a}{x_0}, \frac{k^{n-1}}{x_1}, \dots, \frac{k^{n-r+1}}{x_{r-1}}, \frac{k^{n-r-1}}{x_r}, \dots, \frac{k}{x_{n-2}}, \frac{1}{x_{n-1}};$$

questa curva è della stessa specie della data ed è disposta come questa rispetto al sistema di riferimento.

9. Oltre alle ipotesi dei n. 6-8, facciamo quella che si abbia $n = 2r$. Otterremo una curva $C_{1, 2r, 2r-1}$ razionale avente due punti singolari risultanti ciascuno dalla coincidenza di r punti stazionari; lo spazio a $2(r-1)$ dimensioni che oscula la curva nel punto λ l'incontra nel punto μ determinato dalla relazione (cfr. n.º 6)

$$(14) \quad \lambda + \mu = 0.$$

Poniamo per brevità

$$A_i = \binom{2r-1}{i} - \binom{2r-1}{i-1};$$

sarà

$$(15) \quad A_i + A_{2r-i} = 0$$

e l'equazione dello spazio a $2(r-1)$ dimensioni che oscula in λ la data curva $C_{1, 2r, 2r-1}$ si potrà scrivere così:

$$x_{2r-1} \lambda^{2r} - \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^i A_{2r-i} x_{2r-i-1} \lambda^{2r-i} - \sum_{i=2r+1}^{2r} (-1)^i A_{2r-i} x_{2r-i} \lambda^{2r-i} = 0.$$

Quando si fissino i valori delle x quest'equazione servirà a determinare i punti della curva i cui spazii osculatori passano pel punto $(x_0, x_1, \dots, x_{2r-1})$; siccome la somma dei prodotti r ad r dei parametri di questi punti è nulla, così i punti stessi appartengono a uno spazio a $2(r-1)$ dimensioni. L'equazione di questo è (se X_i sono coordinate correnti):

$$\sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i A_{2r-i} x_{2r-i-1} X_i + \sum_{i=2r+1}^{2r} (-1)^i A_{2r-i} x_{2r-i} X_{i-1} = 0,$$

ossia, per la (15),

$$\sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i A_i [x_i X_{2r-i-1} - x_{2r-i-1} X_i] = 0;$$

ne viene che quello spazio a $2(r-1)$ dimensioni passa pel punto

$(x_0, x_1, \dots, x_{2r-1})$ Si ha pertanto il seguente teorema :

Se in uno spazio a $2r - 1$ dimensioni si ha una curva d'ordine $2r$ razionale con due punti singolari ognuno dei quali nasce dalla coincidenza di r punti stazionari, da ogni punto dello spazio escono $2r$ spazii a $2(r - 1)$ dimensioni osculatori i cui punti di contatto stanno con quello in uno stesso spazio a $2(r - 1)$ dimensioni.

Ogni curva di questa specie determina quindi un sistema nullo. È facile vedere che essa ne determina anche un altro. Infatti dal punto $(x_0, x_1, \dots, x_{2r-1})$ si spiccano $2r$ spazii a $2(r - 1)$ dimensioni osculatori alla curva, ognuno dei quali incontra nuovamente la curva in un punto; grazie alla (14) i parametri degli n punti di segmento sono determinati dall'equazione che deriva dalla (16) mutando il segno di λ ; ne viene che questi punti stanno nello spazio a $2(r - 1)$ dimensioni di equazione

$$\sum_{i=0}^{2r-1} A_i [x_i X_{2r-i-1} - x_{2r-i-1} X_i] = 0,$$

spazio che contiene il punto $(x_0, x_1, \dots, x_{2r-1})$. Pertanto :

I punti nei quali gli spazii a $2(r - 1)$ dimensioni osculatori alla curva predetta uscenti da un punto arbitrario dello spazio, secano la curva, appartengono a uno spazio a $2(r - 1)$ dimensioni contenente anche quel punto.

Supponendo $r = 2$ si ritrovano delle proprietà notissime delle quartiche gobbe aventi due tangenti stazionarie. (*)

COLLINEAZIONI CHE MUTANO IN SÈ STESSA UNA CURVA

$C_{1, n, n-1}$ RAZIONALE.

10. Sia $C_{1, n, n}$ una curva razionale normale dello spazio a n dimensioni S_n . Proiettiamola da un punto qualunque O su uno spazio a $n - 1$ dimensioni S_{n-1} ; otterremo una curva $C_{1, n, n-1}$ razionale che presenterà delle specialità quando il centro di proiezione si sceglie in posizioni particolari e soltanto allora. Se fra i punti di $C_{1, n, n}$ esiste una cor-

(*) Cremona, *Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1868, *Appell*, *Comptes Rendus*, 1876.

rispondenza univoca, lo stesso accadrà pei punti di $C_{1,n,n-1}$; ma, mentre la corrispondenza su $C_{1,n,n}$ genera sempre una corrispondenza collineare nello spazio S_n (*), altrettanto non fa la corrispondenza su $C_{1,n,n-1}$ perchè alle n intersezioni di questa curva con uno spazio a $n-2$ dimensioni non corrispondono in generale altrettanti punti della curva stessa soddisfacenti alla medesima condizione. Si può però domandare se sia possibile di scegliere il centro di proiezione in modo che proiettando su un S_{n-1} un'omografia esistente su una $C_{1,n,n}$ nasca in S_{n-1} una collineazione: e siccome tale corrispondenza, se esiste, muta in sè stessa la curva $C_{1,n,n-1}$, così cominciamo dal vedere se possa esistere una trasformazione collineare dello spazio in cui $C_{1,n,n-1}$ funzioni da curva unita.

Osserviamo perciò che *una collineazione la quale trasforma in sè stessa la $C_{1,n,n-1}$ muta in sè stesso il gruppo degli n punti stazionarii (distinti o non) della curva*. Viceversa: *ogni trasformazione omografica fra i punti di $C_{1,n,n-1}$ che trasformi in sè stesso il gruppo de' punti stazionarii, determinerà in S_{n-1} una collineazione atta a mutare in sè stessa quella curva*. Essa infatti sarà proiezione di una corrispondenza univoca fra i punti della curva $C_{1,n,n}$ (di cui $C_{1,n,n-1}$ è proiezione), la quale determinerà nello spazio S_n che contiene $C_{1,n,n}$ una collineazione in cui gli n spazii osculatori di $C_{1,n,n}$ uscenti dal centro O di proiezione si corrisponderanno fra loro (**); O è pertanto un punto unito di questa collineazione. Agli S_{n-1} di S_n uscenti da O corrisponderanno in conseguenza degli spazii della stessa specie pure passanti per O ; a un gruppo di n punti di $C_{1,n,n}$ posti con O in un S_{n-1} corrisponde quindi un gruppo avente la stessa proprietà; epperò a n punti di $C_{1,n,n-1}$ posti in un S_{n-2} di S_{n-1} corrisponderanno n punti analoghi; e ciò basta per mostrare la verità dell'asserzione precedente.

Ciò prova che per ottenere delle curve $C_{1,n,n-1}$ razionali con trasformazioni collineari in sè stesse, basta proiettare una $C_{1,n,n}$ da un

(*) Vedi il n° 16 della mia Nota *Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVI)

(**) Le tracce di questi spazii a $n-1$ dimensioni sullo spaziu in cui sta $C_{1,n,n-1}$ sono gli spazii stazionarii di questa curva.

punto O su una S_{n-1} in modo che il gruppo dei punti stazionarii della curva ammetta delle trasformazioni lineari in sè stesso. (*)

11. Affinchè tali trasformazioni siano in numero infinito è necessario che questo gruppo consti di due elementi, nell'un dei quali si riuniscano r , nell'altro $n - r$ punti stazionarii. Ciò conduce al teorema:

Dato un $(n + 1)$ -edro di osculazione (**) di una curva razionale normale dello spazio a n dimensioni e un'omografia fra i punti della curva avente per elementi doppi i punti d'appoggio della corda corrispondente; proiettando la curva e l'omografia da uno dei vertici di quel poliedro non posto sulla curva, si ottiene una curva razionale con un'omografia a cui corrisponde una collineazione capace di mutare la curva in sè stessa. Se, tenendo fisso l' $(n + 1)$ -edro si muta l'omografia sulla curva, si otterranno ∞^1 collineazioni atte a trasformare in sè stessa la curva proiezione.

Se il centro di proiezione è l' r^{mo} vertice del poliedro, la curva proiezione si può rappresentare colle equazioni (cfr. n.° 6-9):

$$\rho x_0 = \lambda^n, \rho x_1 = \lambda^{n-1}, \dots, \rho x_{r-1} = \lambda^{n-r+1}, \rho x_r = \lambda^{n-r}, \dots, \rho x_{n-2} = \lambda, \rho x_{n-1} = 1$$

e le omografie che la trasformano in sè stessa si ottengono tutte facendo variare k nelle equazioni

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= k^n y_0, \rho x_1 = k^{n-1} y_1, \dots, \rho x_{r-1} = k^{n-r+1} y_{r-1}, \rho x_r = k^{n-r} y_r, \dots, \\ \rho x_{n-2} &= k y_{n-2}, \rho x_{n-1} = y_{n-1}. \end{aligned}$$

12. Affinchè il gruppo dei punti stazionarii della $C_{1, n, n-1}$ razionale ammetta un numero finito di trasformazioni proiettive in sè stesso, esso deve rappresentare una forma binaria che ammetta lo stesso numero di trasformazioni lineari in sè stessa. Ora le forme binarie che godono la proprietà di essere mutate in sè stesse quando le variabili vengano

(*) I risultati contenuti in questo n.º sono noti da tempo al mio carissimo amico prof. C. Segre, come io venni a sapere dopo aver compiuto il presente studio.

(**) Per questa denominazione si veggia il n.º 4 del mio citato lavoro *Sulle curve razionali normali*.

trasformate linearmente sono (*), oltre alle cubiche e alle biquadratiche, una forma di 6° ordine, che si dice *tetraedrica*, riducibile alla forma $x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4)$; una di 8° ordine, che si dice *ottaedrica*, riducibile alla forma $x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8$; una di 12° ordine, che si dice *icosaedrica*, riducibile alla forma $x_1 x_2 (x_1^{10} + 11 x_1^5 x_2^5 - x_2^{10})$; inoltre le forme che corrispondono al gruppo ciclico e al gruppo diedrico di trasformazioni lineari; e finalmente i covarianti delle forme testè enumerate. A ognuna di queste forme corrisponde una $C_{1, n, n-1}$ con un numero finito di trasformazioni collineari in sè stessa. Ci occuperemo ora di determinare in ogni caso queste trasformazioni limitandoci però alle curve che sembrano più interessanti; supporremo sempre tutti distinti i punti stazionarii, cosicchè ci sarà lecito supporre la curva data mediante la sua rappresentazione parametrica canonica (n.° 5).

13. $n = 3$. *Cubica piana razionale*.—Sia la curva rappresentata dalle equazioni

$$\rho x_i = (\lambda - \omega_i)^3 \quad (i = 0, 1, 2);$$

il gruppo 0, 1, 2 di punti singolari è mutato in sè stesso da due proiettività cicliche di 3° ordine e da tre involuzioni aventi ciascuna per elemento doppio uno dei punti stazionarii e per elementi corrispondenti gli altri due; si hanno in corrispondenza cinque collineazioni che trasformano la curva in sè stessa, due sono proiettività cicliche di 3° ordine, mentre le altre sono omologie armoniche.

14. $n = 4$. *Quartica gobba di 1ª specie generale* (**).—Il gruppo 0, 1, 2, 3 di punti stazionarii della curva è mutato in sè stesso in generale soltanto dalle tre involuzioni

$$(0, 1)(2, 3), \quad (0, 2)(3, 1), \quad (0, 3)(1, 2);$$

(*) Klein: *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (*Math. Annalen*, t. IX, p. 182), *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von 5^{ter} Grade* (Leipzig 1884).

(**) Cfr. Brambilla, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie II, t. XX.

quindi la curva stessa non ammette in generale che tre involuzioni assiali atte a mutarla in sè stessa; le loro equazioni sono

$$\rho x_p = y_q \quad \rho x_q = y_p \quad \rho x_{p'} = y_{q'} \quad \rho x_{q'} = y_{p'}$$

ove $(p, q)(p', q')$ è una delle distribuzioni in due coppie dei numeri 0, 1, 2, 3.

Quartica gobba armonica o equianarmonica.—Altre trasformazioni della curva in sè stessa si ottengono se il gruppo dei punti stazionari è armonico (*) o equianarmonico.

Se è armonico e sono coniugati 0, 1 e 2, 3 il gruppo è trasformato in sè stesso dall'involuzione avente per punti doppi 0, 1 e da quella avente per punti doppi 2, 3; quindi la curva è mutata in sè stessa dalle due collineazioni

$$\begin{array}{cccc} \rho x_0 = y_0 & \rho x_1 = y_1 & \rho x_2 = y_3 & \rho x_3 = y_2 \\ \rho x_0 = y_1 & \rho x_1 = y_0 & \rho x_2 = y_2 & \rho x_3 = y_3 \end{array}$$

che entrambe sono omologie armoniche.

Se è equianarmonico e precisamente se il gruppo 0, 1, 2, 3 è proiettivo al gruppo 2, 0, 1, 3, la curva sarà trasformata in sè stessa anche dalla collineazione

$$\rho x_0 = y_1 \quad \rho x_1 = y_2 \quad \rho x_2 = y_0 \quad \rho x_3 = y_3,$$

la quale ha una retta di punti uniti $x_0 = x_1 = x_2$ e due punti uniti isolati $(1, \varepsilon, \varepsilon^2, 0)$ e $(1, \varepsilon^2, \varepsilon, 0)$ ove ε è una radice terza imaginaria dell'unità. (**)

Aggiungiamo l'osservazione che la quartica con due tangenti stazionarie (***) e quella con cuspidi ammettono, in virtù del n.º 11 infinite trasformazioni collineari in sè stesse.

(*) È noto che in questo caso la curva ha un punto doppio.

(**) Questa collineazione rientra nella specie che indicammo con [(11) 11] nel nostro studio *Sulle corrispondenze proiettive fra due piani e fra due spazi* (*Giornale di Matematiche*, t. XXII)

(***) Si veggia a questo proposito una memoria del sig. Del Re pubblicata nel t. XXII degli *Atti della R Accademia delle Scienze di Torino*.

15. $n = 6$. *Curva tetraedrica*.—Se il gruppo di punti stazionarii di una $C_{1,6,5}$ rappresenta il covariante sestico di una forma biquadratica, i punti stessi si distribuiranno in tre coppie ognuna delle quali comprende i punti doppi dell' involuzione quadratica determinata dalle altre due. La forma ammette, oltre alla trasformazione identica, 11 trasformazioni lineari in sè stessa. Tre sono le involuzioni la cui esistenza serve a caratterizzare il gruppo, ognuna di esse dà luogo a una trasformazione involutoria dello spazio avente come uniti tutti i punti di uno spazio a tre e quelli di uno spazio a una dimensione; p. es. l' involuzione binaria di cui p e q sono gli elementi doppii, $p'q'$ e $p''q''$ sono due coppie di elementi conjugati, conduce a una collineazione avente per elementi uniti tutti i punti per cui è

$$x_{p'} - x_{q'} = 0 \quad x_{p''} - x_{q''} = 0$$

e tutti quelli per cui è

$$x_p = 0 \quad x_q = 0 \quad x_{p'} + x_{q'} = 0 \quad x_{p''} + x_{q''} = 0,$$

ove $p q p' q' p'' q''$ è una permutazione di 0 1 2 3 4 5. Le altre otto trasformazioni lineari della forma non sono involutorie e danno luogo ad altrettante collineazioni dello spazio. Le equazioni di queste sono

$$\rho x_i = y_{n_i}$$

ove gli indici $n_0 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$ devono prendere successivamente i seguenti gruppi di valori:

3	2	4	5	1	0
5	4	1	0	2	3
2	3	5	4	1	0
5	4	0	1	3	2
4	5	1	0	3	2
3	2	5	4	0	1
2	3	4	5	0	1
4	5	0	1	2	3.

Una qualunque delle permutazioni di questa tabella si può decomp-

porre in due circolari fatte ciascuna su tre elementi; se la permutazione $n_0 n_1 \dots n_5$ si decompone nelle due permutazioni circolari (pqr) $(p'q'r')$, la corrispondente collineazione ha per punti uniti tutti quelli che appartengono alle rette

$$x_p = \varepsilon x_q = \varepsilon^2 x_r \quad \varepsilon x_{p'} = \varepsilon x_{q'} = \varepsilon^2 x_{r'}$$

ove ε è una radice terza dell'unità. Si presentano così 12 rette notevoli per la curva che trattiamo.

16. $n = 8$. *Curva ottaedrica* — Quando gli 8 punti stazionari di una $C_{1,8,7}$ razionale formano un gruppo ottaedrico, vi sono 24 trasformazioni lineari del gruppo in sè stesso. Una di queste è l'identità. Nove sono involutorie e sono determinate da ciò che in virtù di esse il gruppo 0, 1, ..., 7 di punti stazionari subisce una delle seguenti permutazioni:

3	2	1	0	7	6	5	4
1	0	3	2	5	4	7	6
5	7	4	6	2	0	3	1
2	3	0	1	6	7	4	5
6	4	7	5	1	3	0	2
4	7	6	5	0	3	2	1
6	5	4	7	2	1	0	3
7	6	4	5	2	3	1	0
6	7	5	4	3	2	0	1;

se pq , $p'q'$, $p''q''$, $p'''q'''$ sono le quattro coppie di punti corrispondenti in una delle involuzioni predette, si avrà una collineazione involutoria dello spazio che muta in sè stessa la data curva e ha per ispazii uniti quelli a tre dimensioni aventi per equazioni

$$x_p + \varepsilon x_q = 0, \quad x_{p'} + \varepsilon x_{q'} = 0, \quad x_{p''} + \varepsilon x_{q''} = 0, \quad x_{p'''} + \varepsilon x_{q'''} = 0,$$

ove $\varepsilon = \pm 1$. Le 14 trasformazioni lineari non involutorie del gruppo dei punti stazionari della curva in sè stesso si dividono in due classi. Quelle della prima sono in numero di otto e hanno ciascuna per punti

doppi due dei punti stazionarii, esse corrispondono alle seguenti permutazioni di 0, 1, ..., 7:

0*	3	1	2	7	4	6*	5
0*	2	3	1	5	7	6*	4
2	1*	3	0	5	6	4	7*
3	1*	0	2	6	4	5	7*
3	0	2*	1	4*	7	5	6
1	3	2*	0	4*	6	7	5
1	2	0	3*	6	5*	4	7
2	0	1	3*	7	5*	4	6

(ove segnammo con un asterisco gli elementi doppi). Queste permutazioni si dividono in 5 coppie costituite ciascuna di due a cui corrispondono omografie cogli stessi elementi doppi; le due permutazioni di una coppia, decomposte in permutazioni circolari, si possono rappresentare così

$$(a)(b)(p' q' r')(p'' q'' r'')$$

$$(a)(b)(p' r' q')(p'' r'' q'')$$

e danno luogo a due trasformazioni dello spazio che mutano in sè stessa la $C_{1,8,7}$ e hanno entrambe come punti uniti quelli dello spazio a tre dimensioni

$$x_{p'} = x_{q'} = x_{r'}, \quad x_{p''} = x_{q''} = x_{r''};$$

inoltre la prima ha per retta unita quella avente per equazioni

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^2 x_{p'} = \varepsilon x_{q'} = x_{r'} \quad \varepsilon^2 x_{p''} = \varepsilon x_{q''} = x_{r''}$$

mentre la seconda ha per retta unita la

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^2 x_{p'} = \varepsilon x_{r'} = x_{q'} \quad \varepsilon^2 x_{p''} = \varepsilon x_{r''} = x_{q''}$$

ove ε è una radice cubica imaginaria dell'unità. Le altre 6 trasformazioni lineari non involutorie del gruppo corrispondono alle seguenti permutazioni di 0, 1, ..., 7.

7	5	6	4	0	2	1	3
4	6	5	7	3	1	2	0
7	4	5	6	3	0	1	2
5	6	7	4	1	2	3	0
4	5	7	6	1	0	2	3
5	4	6	7	0	1	3	2;

ognuna è decomponibile in due permutazioni circolari fatte ciascuna su quattro elementi, quindi può rappresentarsi così

$$(pqrs)(p'q'r's');$$

in corrispondenza si ha una collineazione dello spazio che muta in sè stessa la curva $C_{1,8,7}$ e ha per punti uniti tutti quelli che appartengono alle quattro rette

$$x_p = \varepsilon x_s = \varepsilon^2 x_r = \varepsilon^3 x_q \quad x_{p'} = \varepsilon x_{s'} = \varepsilon^2 x_{r'} = \varepsilon^3 x_{q'},$$

ove ε è una radice quarta dell'unità.

17. $n = 12$. *Curva icosaedrica* — Se i punti stazionarii della curva $C_{1,12,11}$ formano un gruppo icosaedrico, esisteranno 60 trasformazioni lineari del gruppo in sè stesso. Una è l'identità. Quindici sono involutorie e corrispondono alle seguenti permutazioni del gruppo 0, 1, ..., 11

1	0	7	11	10	9	8	2	6	5	4	3
1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
1	0	10	9	8	7	11	5	4	3	2	6
1	0	9	8	7	11	10	4	3	2	6	5
1	0	8	7	11	10	9	3	2	6	5	4
2	7	0	6	9	10	3	1	11	4	5	8
6	11	5	8	9	2	0	10	3	4	7	1
5	10	7	8	6	0	4	2	3	11	1	9
4	9	7	5	0	3	11	2	10	1	8	6
3	8	4	0	2	10	11	9	1	7	5	6
7	2	1	8	5	4	11	0	3	10	9	6
11	6	7	4	3	10	1	2	9	8	5	0
10	5	3	2	9	1	11	8	7	4	0	6
9	4	6	8	1	10	2	11	3	0	5	7
8	3	7	1	9	6	5	2	0	4	11	10;

se in una di queste involuzioni si corrispondono le seguenti coppie di indici

$$(p p')(q q')(r r')(s s')(t t')(u u')$$

si avrà in conseguenza una collineazione involutoria dello spazio avente come spazii di punti uniti i due a cinque dimensioni rappresentati dalle equazioni

$$x_p + \varepsilon x_{p'} = 0, x_q + \varepsilon x_{q'} = 0, x_r + \varepsilon x_{r'} = 0, x_s + \varepsilon x_{s'} = 0, x_t + \varepsilon x_{t'} = 0, x_u + \varepsilon x_{u'} = 0$$

ove $\varepsilon = \pm 1$. Le 44 trasformazioni non involutorie del gruppo dei punti stazionari si dividono in due classi. Alla prima classe appartengono 24 omografie binarie aventi ciascuna per elementi doppi due punti stazionari; esse sono determinate dalle seguenti permutazioni dei numeri 0, 1, ..., 11:

0*	1*	3	4	5	6	2	8	9	10	11	7
0*	1*	6	2	3	4	5	11	7	8	9	10
0*	1*	4	5	6	2	3	9	10	11	7	8
0*	1*	5	6	2	3	4	10	11	7	8	9
3	8	2*	10	11	4	0	7*	5	6	9	1
6	11	2*	0	5	8	9	7*	1	10	3	4
9	4	2*	6	8	1	10	7*	11	3	0	5
10	5	2*	9	1	11	3	7*	4	0	6	8
4	9	0	3*	11	7	5	1	8*	6	2	10
2	7	10	3*	0	6	9	5	8*	1	11	4
10	5	11	3*	2	9	1	6	8*	7	4	0
11	6	4	3*	10	1	7	9	8*	5	0	2
3	8	10	11	4*	0	2	5	6	9*	1	7
5	10	6	0	4*	7	8	11	1	9*	2	3
11	6	1	7	4*	3	10	0	2	9*	8	5
7	2	8	5	4*	11	1	3	10	9*	6	0
4	9	3	11	7	5*	0	8	6	2	10*	1
6	11	9	2	0	5*	8	4	7	1	10*	3
8	3	1	9	6	5*	7	0	4	11	10*	2
7	2	11	1	8	5*	4	6	0	3	10*	9
5	10	0	4	7	8	6*	1	9	2	3	11*
2	7	9	10	3	0	6*	4	5	8	1	11*
8	3	5	7	1	9	6*	10	2	0	4	11*
9	4	8	1	10	2	6*	3	0	5	7	11*

(ove l'asterisco caratterizza un elemento doppio). Queste permutazioni si distribuiscono in sei sottoclassi composte ciascuna di 4 permutazioni alle quali corrispondono omografie binarie aventi i medesimi elementi uniti; decomposte in permutazioni circolari, le 4 permutazioni di una sottoclasse possono rappresentarsi così :

$$(a)(b)(p' q' r' s' t')(p'' q'' r'' s'' t'')$$

$$(a)(b)(p' t' s' r' q')(p'' t'' s'' r'' q'')$$

$$(a)(b)(p' r' t' q' s')(p'' r'' t'' q'' s'')$$

$$(a)(b)(p' s' q' t' r')(p'' s'' q'' t'' r'').$$

Le corrispondenti collineazioni dello spazio hanno tutte come spazio unito quello a tre dimensioni rappresentato dalle equazioni

$$x_{p'} = x_{q'} = x_{r'} = x_{s'} = x_{t'} \quad x_{p''} = x_{q''} = x_{r''} = x_{s''} = x_{t''}$$

ed hanno inoltre come rette unite le quattro rappresentate rispettivamente dai quattro sistemi di equazioni

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{t'} = \varepsilon^2 x_{s'} = \varepsilon x_{r'} = x_{q'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{t''} = \varepsilon^2 x_{s''} = \varepsilon x_{r''} = x_{q''}$$

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{q'} = \varepsilon^2 x_{r'} = \varepsilon x_{s'} = x_{t'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{q''} = \varepsilon^2 x_{r''} = \varepsilon x_{s''} = x_{t''}$$

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{s'} = \varepsilon^2 x_{q'} = \varepsilon x_{t'} = x_{r'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{s''} = \varepsilon^2 x_{q''} = \varepsilon x_{t''} = x_{r''}$$

$$x_a = 0 \quad x_b = 0 \quad \varepsilon^4 x_{p'} = \varepsilon^3 x_{r'} = \varepsilon^2 x_{t'} = \varepsilon x_{q'} = x_{s'} \quad \varepsilon^4 x_{p''} = \varepsilon^3 x_{r''} = \varepsilon^2 x_{t''} = \varepsilon x_{q''} = x_{s''}$$

ove ε è una radice quinta imaginaria dell'unità. — Le trasformazioni binarie non involutorie della seconda classe sono determinate dalle seguenti permutazioni degli indici 0, 1, ..., 11 :

5	10	4	7	8	6	0	9	2	3	11	1
6	11	8	9	2	0	5	3	4	7	1	10
4	9	11	7	5	0	3	6	2	10	1	8
5	10	8	6	0	4	7	3	11	1	9	2
3	8	11	4	0	2	10	6	9	1	7	5
4	9	5	0	3	11	7	10	1	8	6	2
3	8	0	2	10	11	4	1	7	5	6	9
2	7	3	0	6	9	10	8	1	11	4	5
10	5	1	11	3	2	9	0	6	8	7	4
7	2	5	4	11	1	8	10	9	6	0	3
9	4	1	10	2	6	8	0	5	7	11	3
7	2	4	11	1	8	5	9	6	0	3	10
9	4	10	2	6	8	1	5	7	11	3	0
11	6	3	10	1	7	4	8	5	0	2	9
8	3	9	6	5	7	1	4	11	10	2	0
11	6	10	1	7	4	3	5	0	2	9	8
8	3	6	5	7	1	9	11	10	2	0	4
10	5	9	1	11	3	2	4	0	6	8	7
6	11	0	5	8	9	2	1	10	3	4	7
2	7	6	9	10	3	0	11	4	5	8	1.

Ognuna delle permutazioni testè scritte si può ottenere con quattro permutazioni circolari eseguite su quattro terne di elementi onde può rappresentarsi così

$$(p\ q\ r)(p'\ q'\ r')(p''\ q''\ r'')(p'''\ q'''\ r''');$$

corrispondentemente si ha nello spazio una collineazione avente come punti uniti tutti quelli dei tre spazii a tre dimensioni rappresentati dalle equazioni

$$x_p = \varepsilon x_q = \varepsilon^2 x_r, \quad x_{p'} = \varepsilon x_{q'} = \varepsilon^2 x_{r'}, \quad x_{p''} = \varepsilon x_{q''} = \varepsilon^2 x_{r''}, \quad x_{p'''} = \varepsilon x_{q'''} = \varepsilon^2 x_{r'''},$$

ove ε è una radice cubica dell'unità.

Mantova, 30 settembre 1888.

GINO LORIA.