8. *Über näherungsweise gesättigte Ströme zwischen planparallelen Platten; von Eduard Riecke.*

(Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Heft 4. 1903.)

In zwei früheren Arbeiten¹⁾ habe ich die Theorie der Ströme entwickelt, die zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen infolge von Ionisierung der in dem Hohlraume enthaltenen Luft auftreten. Es ergab sich, daß die Beobachtung dieser Ströme ein Mittel gibt, um die Konstante α der Wiedervereinigung zu bestimmen. Mit Rücksicht auf diese Möglichkeit schien es mir von Interesse, auch den Fall eines zwischen zwei planparallelen Platten eingeschlossenen Luftraumes einer etwas genaueren Untersuchung zu unterwerfen.

I. Die allgemeinen Gleichungen des Problems.

Von zwei unendlichen Platten, die einander in dem Abstände l parallel gegenübergestellt sind, sei die eine positiv geladen, die andere mit der Erde leitend verbunden. Die Intensität des zwischen den Platten eingeschlossenen elektrischen Feldes sei $\mathfrak{F}$. Die Luft in dem Zwischenraume der Platten werde etwa durch Röntgen- oder Radiumstrahlen ionisiert. Die Ionisierungsstärke sei q , die Dichte des durch die Kraft $\mathfrak{F}$ erzeugten elektrischen Stromes c . Die Dichten der positiven und der negativen Ionen seien $\bar{N}^+$ und $\bar{N}^-$, ihre absoluten Beweglichkeiten U und V , ihre Diffusionskoeffizienten $\bar{k}^+$ und $\bar{k}^-$. Der Koeffizient der Wiedervereinigung sei α , das elektrische Elementarquantum werde mit e , die Lichtgeschwindigkeit mit ν bezeichnet. In irgend einem Punkte der positiven Platte errichten wir die Normale. Ihren Fußpunkt machen wir zum Nullpunkt, ihren nach der negativen Platte hinübergehenden Zweig zur positiven Richtung einer Achse x .

1) E. Riecke, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl. Heft 1 u. 2. 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 52. 1903.

Dann ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 4\pi\epsilon(\bar{N}^+ - \bar{N}), \\ \nu\epsilon(U\bar{N}^+ + V\bar{N})\mathfrak{F} - \epsilon\frac{d}{dx}(\bar{k}\bar{N}^+ - \bar{k}\bar{N}) = c, \\ q = \nu U \frac{d(\bar{N}\mathfrak{F})}{dx} - \bar{k} \frac{d^2\bar{N}^+}{dx^2} + \alpha \bar{N}^+\bar{N}, \\ q = -\nu V \frac{d(\bar{N}\mathfrak{F})}{dx} - \bar{k} \frac{d^2\bar{N}}{dx^2} + \alpha \bar{N}^+\bar{N}. \end{array} \right.$$

Wir haben vier Gleichungen und wir können als Unbekannte die Größen $\mathfrak{F}$, q , $\bar{N}^+$, $\bar{N}$ betrachten; vorausgesetzt wird dann, daß die Stromdichte c durch Beobachtung bestimmt ist.

II. Der Sättigungsstrom.

Vernachlässigt man den Einfluß der Wiedervereinigung und der Diffusion, so erhält man:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 4\pi\epsilon(\bar{N}^+ - \bar{N}), \\ \nu\epsilon(U\bar{N}^+ + V\bar{N})\mathfrak{F} = c, \\ q = \nu U \frac{d(\bar{N}\mathfrak{F})}{dx} = -\nu V \frac{d(\bar{N}\mathfrak{F})}{dx}. \end{array} \right.$$

Die Auflösung der Gleichungen führt zu den folgenden Formeln:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_c^2 - \frac{8\pi c}{\nu V} x + \frac{4\pi\epsilon(U+V)}{\nu U V} q x^2, \\ \bar{N}^+\mathfrak{F} = \frac{q}{\nu U} x, \quad \bar{N}\mathfrak{F} = \frac{c}{\nu\epsilon V} - \frac{q}{\nu V} x, \\ c = \epsilon q l. \end{array} \right.$$

Für $x = 0$ wird:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0, \quad \bar{N}_0^+ = 0, \quad \bar{N}_0\mathfrak{F}_0 = \frac{c}{\nu\epsilon V} = \frac{q}{\nu V} l.$$

Für $x = l$:

$$\bar{N}_l^+\mathfrak{F}_l = \frac{q}{\nu U} l, \quad \bar{N}_l\mathfrak{F}_l = 0.$$

Es ist also:

$$\epsilon \nu V \bar{N}_0\mathfrak{F}_0 = \epsilon \nu U \bar{N}_l^+\mathfrak{F}_l = c.$$

Mit Benutzung dieser Werte kann man die Gleichungen (III) auf die Form bringen:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_0^2 - 8 \pi \varepsilon \bar{N}_0 \mathfrak{F}_0 x + 4 \pi \varepsilon (\bar{N}_0 \mathfrak{F}_0 + \bar{N}_l^+ \mathfrak{F}_l) \frac{x^2}{l^2} \\ \bar{N}^+ \mathfrak{F} = \bar{N}_l^+ \mathfrak{F}_l \frac{x}{l}, \quad \bar{N} \mathfrak{F} = \bar{N}_0 \mathfrak{F}_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right), \\ c = \varepsilon q l. \end{array} \right.$$

Um von den Werten der in diesen Gleichungen auftretenden Koeffizienten eine bestimmtere Vorstellung zu bekommen, scheint es nützlich, sie, soweit möglich, in numerischer Form aufzustellen.

Wir benutzen zu diesem Zwecke die Werte:

$$U = 1,26 \times 10^{-8}, \quad V = 1,74 \times 10^{-8}, \quad \frac{V}{U} = 1,38.$$

$$\frac{\bar{k}^+}{U} = \frac{\bar{k}^-}{V} = 2,33 \times 10^6.$$

$$\bar{k}^+ = 0,0293, \quad \bar{k}^- = 0,0405,$$

$$\varepsilon = 4,69 \times 10^{-10}, \quad \alpha = 1,59 \times 10^{-6}.$$

Dann wird:

$$\bar{N}_0 \mathfrak{F}_0 = 0,00192 \times q l, \quad \bar{N}_l^+ \mathfrak{F}_l = 0,00265 \times q l,$$

$$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_0^2 - 0,226 \times 10^{-10} q l x + 0,268 \times 10^{-10} q x^2.$$

Daraus folgt, daß die Veränderlichkeit der Feldstärke im allgemeinen nur eine sehr kleine sein wird.

Die Theorie des Sättigungsstromes ist nur anwendbar, wenn

$$\alpha \bar{N}^+ \bar{N}, \quad \bar{k}^+ \frac{d^2 \bar{N}^+}{dx^2} \quad \text{und} \quad \bar{k}^- \frac{d^2 \bar{N}^-}{dx^2}$$

gegen q sehr klein sind.

Nun ist:

$$\alpha \bar{N}^+ \bar{N} \mathfrak{F}^2 = \alpha \bar{N}_l^+ \mathfrak{F}_l \bar{N}_0 \mathfrak{F}_0 \frac{x(l-x)}{l^2},$$

also mit Benutzung der angegebenen Werte:

$$\alpha \bar{N}^+ \bar{N} = 8,10 \times 10^{-12} \frac{q^2 x(l-x)}{\mathfrak{F}^2}.$$

Es muß somit q klein sein gegen

$$\frac{\mathfrak{F}^2}{8,10 \times x(l-x)} \times 10^{12}.$$

Es ist ferner:

$$^+k^+N = ^+k^+N_l \mathfrak{F}_l \frac{x}{\mathfrak{F}_l},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{\mathfrak{F}_0} + 0,113 \times 10^{-10} \frac{q l x}{\mathfrak{F}_0^3} - 0,134 \times 10^{-10} \frac{q x^2}{\mathfrak{F}_0^3}.$$

Somit:

$$^+k \frac{d^2 N}{dx^2} = \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^3} (1,75 l - 6,21 x) 10^{-15}.$$

Die Theorie des Sättigungsstromes setzt hiernach voraus, daß q klein sei gegen:

$$\frac{\mathfrak{F}_0^3}{1,75 l - 6,21 x} \times 10^{15}.$$

Aus der Bedingung, daß q groß sein soll gegen $\bar{k} \frac{d^2 \bar{N}}{dx^2}$, folgt ebenso:

$$q \text{ klein gegen } \frac{\mathfrak{F}_0^3}{6,21 x - 9,78 l} \times 10^{15}.$$

III. Nicht gesättigter Strom, erste Annäherung.

Von den Größen, die wir im vorhergehenden nach der Theorie des Sättigungsstromes berechnet haben, unterscheiden wir die in erster Annäherung für den nicht gesättigten Strom geltenden durch den Index 1. Die allgemeinen Gleichungen des Problems kommen dann auf die folgende Form:

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \mathfrak{F}_1}{dx} = 4 \pi \varepsilon (\bar{N}_1 - \bar{N}_1), \\ \nu \varepsilon (U \bar{N}_1 + V \bar{N}_1) \mathfrak{F}_1 = c + \varepsilon \frac{d}{dx} (^+k^+N - \bar{k} \bar{N}), \\ q_1 = \nu U \frac{d(^+N_1 \mathfrak{F}_1)}{dx} - ^+k \frac{d^2 \bar{N}}{dx^2} + \alpha ^+N \bar{N}, \\ q_1 = -\nu V \frac{d(\bar{N}_1 \mathfrak{F}_1)}{dx} - \bar{k} \frac{d^2 \bar{N}}{dx^2} + \alpha \bar{N} \bar{N}. \end{array} \right.$$

Die Auflösung der Gleichungen führt zu den folgenden Ansätzen:

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}_0^2 + c_1 x + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} q_1 x^2 + 8\pi\varepsilon \frac{k^+}{\nu U} (\bar{N}^+ + \bar{N} - \bar{N}_0) \\ - \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} \alpha \int_0^x \int_0^x \bar{N}^+ \bar{N} dx dx.$$

$$\bar{N}_1^+ \mathfrak{F}_1 = \frac{c}{\nu\varepsilon(U+V)} + \frac{q_1}{\nu U} x + \frac{k^+}{\nu U} \frac{d\bar{N}}{dx} - \frac{\alpha}{\nu U} \int_0^x \bar{N}^+ \bar{N} dx \\ + \frac{V}{8\pi\varepsilon(U+V)} c_1,$$

$$\bar{N}_1 \mathfrak{F}_1 = \frac{c}{\nu\varepsilon(U+V)} - \frac{q_1}{\nu V} x - \frac{\bar{k}}{\nu V} \frac{d\bar{N}}{dx} + \frac{\alpha}{\nu V} \int_0^x \bar{N}^+ \bar{N} dx \\ - \frac{U}{8\pi\varepsilon(U+V)} c_1.$$

Die Integrationskonstante c_1 bestimmt sich durch die Bedingungen, daß an den Elektrodenplatten

$$c = \varepsilon \nu V (\mathfrak{F}_1 \bar{N}_1)_0 + \varepsilon \bar{k} \left(\frac{d\bar{N}}{dx} \right)_0 = \varepsilon \nu U (\mathfrak{F}_1 \bar{N}_1)_l - \varepsilon k^+ \left(\frac{d\bar{N}_1^+}{dx} \right)_l$$

sein muß.

Man findet:

$$c_1 = - \frac{8\pi c}{\nu V};$$

die Lösung der Gleichungen (IV) ist dann durch die folgenden Formeln gegeben:

$$(V) \left\{ \begin{aligned} q_1 &= \frac{c}{\varepsilon l} + \frac{\alpha}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N} dx = q + \frac{\alpha}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N} dx. \\ \mathfrak{F}_1^2 &= \mathfrak{F}^2 + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} \alpha \left\{ \frac{x^2}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N} dx - 2 \int_0^x \int_0^x \bar{N}^+ \bar{N} dx dx \right\} \\ &\quad + 8\pi\varepsilon \frac{k^+}{\nu U} (\bar{N}^+ + \bar{N} - \bar{N}_0), \\ \bar{N}_1^+ \mathfrak{F}_1 &= \bar{N}^+ \mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu U} \left\{ \frac{x}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N} dx - \int_0^x \bar{N}^+ \bar{N} dx \right\} + \frac{k^+}{\nu U} \frac{d\bar{N}^+}{dx}, \\ \bar{N}_1 \mathfrak{F}_1 &= \bar{N} \mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu V} \left\{ \frac{l-x}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N} dx - \int_x^l \bar{N}^+ \bar{N} dx \right\} - \frac{\bar{k}}{\nu V} \frac{d\bar{N}}{dx}. \end{aligned} \right.$$

Mit Benutzung der numerischen Werte ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1^2 &= \mathfrak{F}^2 + 36,3 \times 10^{-24} \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^2} (l-x)^2 x^2 + 0,67 \times 10^{-15} \times \frac{q x}{\mathfrak{F}_0}, \\ \overset{+}{N}_1 \mathfrak{F}_1 &= \overset{+}{N} \mathfrak{F} + 3,56 \times 10^{-15} \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^2} (l-2x)(l-x)x + 0,228 \times 10^{-6} \frac{q}{\mathfrak{F}_0}, \\ \bar{N}_1 \mathfrak{F}_1 &= \bar{N} \mathfrak{F} - 2,55 \times 10^{-15} \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^2} (l-2x)(l-x)x + 0,149 \times 10^{-6} \frac{q}{\mathfrak{F}_0}.\end{aligned}$$

IV. Nicht gesättigter Strom, zweite Näherung.

In den Formeln (I) setzen wir an Stelle von $\overset{+}{N}$ und $\bar{N}$ in den mit α und k multiplizierten Gliedern die zuvor berechneten Größen $\overset{+}{N}_1$ und $\bar{N}_1$. Wir erhalten dann zur Berechnung der zweiten Annäherung die Formeln:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{F}_2}{dx} &= 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N}_2 - \bar{N}_2), \\ \nu\varepsilon(U\overset{+}{N}_2 + V\bar{N}_2)\mathfrak{F}_2 &= c + \varepsilon\frac{d}{dx}(k\overset{+}{N}_1 - \overset{+}{k}N_1), \\ q_2 &= \nu U \frac{d(\overset{+}{N}_2 \mathfrak{F}_2)}{dx} - k \frac{d^2 \overset{+}{N}_1}{dx^2} + \alpha \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1, \\ q_2 &= -\nu V \frac{d(\bar{N}_2 \mathfrak{F}_2)}{dx} - \bar{k} \frac{d^2 \bar{N}_1}{dx^2} + \alpha \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1.\end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned}q_2 &= q + \frac{\alpha}{l} \int_0^l \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1 dx, \\ \mathfrak{F}_2^2 &= \mathfrak{F}_0^2 - \frac{8\pi c}{\nu V} x + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu U V} q_2 x^2 \\ &\quad + 8\pi\varepsilon \frac{k}{\nu U} (\overset{+}{N}_1 + \bar{N}_1 - \overset{+}{N}_{10} - \bar{N}_{10}) \\ &\quad - \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{\nu U V} \alpha \int_0^x \int_0^x \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1 dx dx, \\ \overset{+}{N}_2 \mathfrak{F}_2 &= \frac{q_2}{\nu U} x + \frac{k}{\nu U} \frac{d\overset{+}{N}_1}{dx} - \frac{\alpha}{\nu U} \int_0^x \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1 dx, \\ \bar{N}_2 \mathfrak{F}_2 &= \frac{q_2}{\nu V} (l-x) - \frac{\bar{k}}{\nu V} \frac{d\bar{N}_1}{dx} - \frac{\alpha}{\nu V} \int_x^l \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1 dx.\end{aligned}\quad \text{(VI)}$$

Wenn man in diesen Formeln an Stelle von q_2 , $\bar{N}_1^+$ und $\bar{N}_1^-$ die aus dem früheren folgenden Werte substituiert, so ergeben sich komplizierte Ausdrücke. Wir werden nur die erste der Gleichungen etwas weiter ausführen, da sich an diese die Möglichkeit knüpft, aus Beobachtungen nicht gesättigter Ströme den Wert der *Konstanten α der Wiedervereinigung* zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke bringen wir die Gleichung auf die Form:

$$\varepsilon l q_2 - c = \alpha \varepsilon \int_0^l \bar{N}_1^+ \bar{N}_1^- dx.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{x}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N}^- dx - \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N}^- dx &= \mathfrak{X}_1, & \frac{l-x}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N}^- dx - \int_x^l \bar{N}^+ \bar{N}^- dx &= \mathfrak{X}_2, \\ \frac{x^2}{l} \int_0^l \bar{N}^+ \bar{N}^- dx - 2 \int_0^x \int_0^x \bar{N}^+ \bar{N}^- dx dx &= \mathfrak{X}, \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1^+ \mathfrak{F}_1 &= \bar{N}^+ \mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu U} \mathfrak{X}_1 + \frac{k}{\nu U} \frac{d \bar{N}^+}{dx}, \\ \bar{N}_1^- \mathfrak{F}_1 &= \bar{N}^- \mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu V} \mathfrak{X}_2 - \frac{k}{\nu U} \frac{d \bar{N}^-}{dx}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}^2 + \frac{4 \pi \varepsilon (U+V)}{\nu U V} \alpha \mathfrak{X} + 8 \pi \varepsilon \frac{k}{\nu U} (\bar{N}^+ + \bar{N}^- - \bar{N}_0).$$

Benutzt man diese Werte zur Berechnung des Integrales

$\int_0^l \bar{N}_1^+ \bar{N}_1^- dx$, so erhält man für α die Gleichung:

$$\begin{aligned} \varepsilon l q_2 - c &= \alpha \varepsilon \left[\int_0^l \bar{N}^+ \bar{N}^- dx + \frac{k}{\nu U} \left\{ \int_0^l \frac{1}{\mathfrak{F}} \left(\bar{N} \frac{d \bar{N}^+}{dx} - \bar{N}^+ \frac{d \bar{N}}{dx} \right) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 8 \pi \varepsilon \int_0^l \frac{\bar{N}^+ \bar{N} (\bar{N}^+ + \bar{N} - \bar{N}_0)}{\mathfrak{F}^2} dx \right\} \right] \\ &+ \alpha^2 \varepsilon \frac{1}{\nu U V} \left[\int_0^l \frac{\nu \bar{N} \mathfrak{X}_1 + U \bar{N}^+ \mathfrak{X}_2}{\mathfrak{F}} dx - 4 \pi \varepsilon (U+V) \int_0^l \frac{\bar{N}^+ \bar{N} \mathfrak{X}}{\mathfrak{F}^2} dx \right]. \end{aligned}$$

Die numerische Rechnung gibt:

$$\varepsilon l q_2 - c = \alpha \varepsilon \times 0,85 \times 10^{-6} \frac{q^2 l^3}{\mathfrak{F}_0^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 4,65 \times 10^{-4} \frac{1}{\mathfrak{F}_0 l} \\ - 3,34 \times 10^{-16} \frac{q l}{\mathfrak{F}_0^3} \end{array} \right\} \\ + \alpha^2 \varepsilon \times 0,143 \times 10^{-12} \times \frac{q^3 l^5}{\mathfrak{F}_0^4} \left\{ 1 - 0,81 \times 10^{-12} \frac{q l^2}{\mathfrak{F}_0^2} \right\}.$$

Näherungsweise kann man schreiben:

$$\varepsilon l q_2 - c = \alpha \varepsilon \times 0,85 \times 10^{-6} \frac{q^2 l^3}{\mathfrak{F}_0^2} + \alpha^2 \varepsilon \times 0,143 \times 10^{-12} \frac{q^3 l^5}{\mathfrak{F}_0^4}.$$

Hier ist:

$$c = \varepsilon l q.$$

Die Gleichung kommt daher auf die einfachere Form:

$$l(q_2 - q) = \alpha \times 0,85 \times 10^{-6} \times \frac{q^2 l^3}{\mathfrak{F}_0^2} + \alpha^2 \times 0,143 \times 10^{-12} \times \frac{q^3 l^5}{\mathfrak{F}_0^4}.$$

Benutzt man diese Gleichung zur Berechnung von α , so ergibt sich:

$$\alpha = 1,18 \times 10^6 \times \frac{\mathfrak{F}_0^2 (q_2 - q)}{l^3 q^2} \left\{ 1 - 0,20 \frac{q_2 - q}{q} \right\}.$$

Der Wert von α wird also kleiner, wenn man das quadratische Glied mit berücksichtigt.

Führt man an Stelle von q_2 und q die Dichten $\mathfrak{C}$ des Sättigungsstromes und c des wirklich beobachteten Stromes ein, so wird:

$$\alpha = 5,52 \times 10^{-4} \times \frac{(\mathfrak{C} - c) \mathfrak{F}_0^2}{l c^2} \left(1 - 0,20 \frac{\mathfrak{C} - c}{c} \right).$$

(Eingegangen 4. August 1903.)