ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 14.

1. *Magnetokinetische Untersuchungen;* *von H. du Bois.*

Hauptbezeichnungen.

D , Dichtigkeit.	$\mathfrak{C}$, Winkelgeschwindigkeit.	} Vektoren
E , Rotatorische kinetische Energie.	$\mathfrak{S}$, Feldintensität.	
K_X, K_Y, K_Z , Hauptträgheitsmomente.	$\mathfrak{S}_G$, Koerzitivintensität.	
L , Stiellänge.	$\mathfrak{I}$, Magnetisierung.	
N , Kreiselfrequenz.	$\mathfrak{M}$, Magnetisches Moment.	
N_X , Entmagnetisierungsfaktor.	$\mathfrak{N}$, Hilfsvektor.	
V , Sphäroidvolum.	$\alpha = \mathfrak{M} \mathfrak{S} / E$, Argument.	
V' , Volum der Bewegungssphäre.	$\mathfrak{k}$, Trägheitskoeffizient.	
X, Y, Z , Kreiselfeste Koordinaten.	m , Orientierungskosinus.	
a } Halbachsen einer Meridian-	α , Winkel zwischen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M}$.	
c } ellipse.	θ , Winkel zwischen Z und α .	
d , Farbkreisdurchmesser.	κ , Kreiselsuszeptibilität.	
e , Exzentrizität.	κ' , Raumsuszeptibilität.	
$m = c/a$, Achsenverhältnis.	μ' , Raumpermeabilität.	
x, y, z , Raumfeste Koordinaten.	τ , Kreiselperiode.	

§ 1. *Einleitung.* Vor kurzem habe ich die Orientierung polarisierter unsymmetrischer Kreisel im gleichförmigen richtenden Felde theoretisch untersucht.¹⁾ Wenn es auch bisher kaum üblich war, Ergebnisse rein dynamischer Betrachtungen experimentell nachzuprüfen, so erschien das hier im Hinblick auf einige zweifelhaftere Punkte doch nicht überflüssig. Einerseits weil zum Teil dissipative Einflüsse vorausgesetzt wurden und dabei auf empirische Tatsachen Bezug genommen werden mußte, andererseits wegen der hier und da vielleicht paradox erscheinenden Folgerungen. Übrigens wurde auch in mathematischen Kreisen der Wunsch rege, daß bei „Untersuchungen zur irdischen Dynamik die experimentelle Prüfung und die

1) H. du Bois, Ann. d. Phys. 13. p. 289. 1904. — Dieser theoretische Aufsatz sei im folgenden ohne weiteres als l. c. angeführt.

mathematische Überlegung mehr als gleichwertige und gleich unentbehrliche Faktoren nebeneinander behandelt werden möchten“.¹⁾ Im großen und ganzen läßt sich aus vorliegender Untersuchung schließen, daß ideale Kreisel die Erscheinungen zeigen würden, wie sie die notwendig idealisierte Theorie fordert.

Zur Prüfung dieser absichtlich allgemeiner gehaltenen Theorie eignet sich der magnetische Sonderfall; er läßt sich experimentell bequem realisieren und dürfte sich auch in mancher Hinsicht anwendungsfähig erweisen. In die Gleichungen ist für die Feldintensität $\mathfrak{F}$ diejenige des magnetischen Feldes $\mathfrak{S}$ einzusetzen; als Polarisationsmoment $\mathfrak{M}$ gilt dasjenige der mit dem Kreisel starr verbundenen Magnete bez. das Produkt der Stromstärke in die resultierende Windungsfläche eventueller kreiselfester Stromleiter. Der Annahme, daß $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}$ sowie von $\dot{\mathfrak{S}}$ unabhängig sei (l. c. § 2), genügt nur eine kreiselfeste Spule mit sehr großem Vorschaltwiderstand — gegen Induktionsströme — und eventuell mit gesättigtem Eisenkern. Obwohl die Stromzuführung und Ableitung bei Verwendung des mechanischen Antriebes (§ 5) unschwer zu bewirken wäre, wurde doch der Einfachheit halber glasharter Wolframstahl benutzt. Sein Koerzitivfeld betrug nahe 70 Gauss; wofern, je nach der Lage des Kreisels, die Feldkomponente in Richtung der magnetischen Achse etwa 20 Gauss nicht überschritt, durfte ihr Einfluß auf das Moment vernachlässigt werden.

§ 2. Ein *Gaugain-Helmholtzsches Drahtingpaar* erzeugte das richtende Feld, welches innerhalb der Bewegungssphäre der zentrisch fixierten Kreisel magnete genügend gleichförmig war.²⁾ Die Dimensionen — 11,2 cm Radius und gegenseitige Entfernung — und die Zahl von je 25 Windungen waren derart bemessen, daß die Feldintensität numerisch der doppelten Ampèrezahl gleichkam. Das Ringpaar war um eine horizontale Querachse drehbar (vgl. Fig. 1), so daß die Feldrichtung beliebig gegen den Horizont geneigt werden konnte; vielfach fielen diese Richtungen zusammen und zwar in mag-

1) F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Heft III. p. 584. Leipzig 1903.

2) J. C. Maxwell, Treatise 2. Ed. 2. Fig. XIX enthält das Kraftlinienbild für diesen Fall; vgl. auch E. Mascart u. J. Joubert, Electricité et Magnétisme 2. § 749, Paris 1886.

netisch westöstlichem Azimut. Alsdann konnte ein westlich aufgestelltes Nadelmagnetometer mit Kompensationsspule in erster Hauptlage benutzt werden; dessen freie Periode betrug etwa 20'', es wurde aber bis nahe zur Aperiodizität gedämpft. Dann ergab bei periodischer Bewegung des Kreisels die Ablenkung ein Maß für die mittlere orientierte Komponente

$$\overline{M}_z = \frac{M}{\tau} \int_T^{T+\tau} \cos(M, S) dT.$$

Zuweilen wurde als Richtfeld wohl auch einfach dasjenige eines gebogenen oder geraden Stabmagnets benutzt.

Der Vorschaltwiderstand enthielt unter anderem einen Flüssigkeits- und zwei Preßkohlenrheostate, mittels derer das Feld beliebig langsam und stetig variiert werden konnte (l. c. § 10), wie es die Theorie vorderhand noch fordern muß.

Um die spezielleren Eigenschaften der Bewegung der Demonstration bez. der Messung gut zugänglich zu machen, erwies sich die Konstruktion „magnetokinetischer“ Kreisel verschiedener Art und Größe zweckdienlich. Ihre polaren Hauptträgheitsmomente lagen z. B. im ausgedehnten Bereiche

$$0,6 < K_z < 34\,000 \text{ C.G.S.};$$

die Beschreibung der endgültig bewährten Formen folgt.

§ 3. *Großer Nickelinkreisel* (Fig. 1). Die Spindel und das Flugrad (Gesamtmasse rund 1 kg, Durchmesser 15 cm) bestanden aus Nickel; zur weiteren Verringerung Foucaultscher Ströme waren feine Radialschnitte ausgespart, sowie ein durchgehender Meridianschlitz, welcher die toroidale Radwulst intakt ließ. In jenem Meridianschlitz war ein Zylindermagnet drehbar, welcher meistens in der Spindelachse oder aber senkrecht zu ihr fest eingestellt wurde. Außerdem konnten an beiden Seiten des Flugrades je zwei bez. vier äquatoreale Stabmagnete befestigt werden. Das Ganze lief in Cardanischen Ringen nach Art der Bohnenberger-Foucaultschen Rotationsapparate; zwecks Herabminderung der sehr störenden Trägheit der beiden inneren beweglichen Ringe¹⁾ waren diese mit U-Profil aus Magnalium hergestellt, so daß ihre Gesamt-

1) Diese ist bei den meisten derartigen Apparaten viel zu groß.

masse nur 110 g betrug; dabei blieben die Durchbiegungen von der Ordnung 0,1 mm. Ein solches System hat bei freiem

Fig. 1 ($\frac{1}{5}$ nat. Größe).

Zylindermagnet vier, bei befestigtem drei Freiheitsgrade. Sämtliche Spitzen und Gesenke bestanden aus unmagnetischem Manganstahl. Mittels „polarer“, auf der geteilten Spindel verschiebbarer Bleimassen von 50 bez. 100 g konnten die äquatorealen Trägheitsmomente reguliert werden; außerdem waren Laufgewichte aus Blei von 10, 20, 50 g auf einem senkrecht zur Spindel

mittels einer Hülse aufzusetzenden, oben abgebildeten Querstift behufs Justierung vorhanden.

§ 4. *Spitzenkreisel*, welche auf einer einzigen Spitze laufen, sind für viele Zwecke vorzuziehen und es wurden daher solche in verschiedenen Ausführungsformen hergestellt:

Hartbleikreisel (Fig. 2): Ein Flugrad aus Hartblei (Gesamtmasse ca. 450 g, Durchmesser 10 cm) trug eine erhöhte, rechtwinklig ausgedrehte Stahlpfanne *K*, welche auf einer konischen Manganstahlspitze *P* von 30° lief, so daß der Spielraum des Kreisels allseitig 30° betrug; zu beiden Seiten befanden sich je ein Paar Stahlmagnete *sn*. Oberhalb des Flugrades erstreckte sich die Spindel *Z*, ein langer massiver oder hohler Stiel aus Magnalium, welcher oben eine leichte vierfarbige Scheibe *F* mit rot-weiß-blau-grünen Sektoren trug¹⁾; Fig. 2 enthält einen Aufriß und darunter eine heraldisch schraffierte obere Ansicht. Längs jenes Stieles, auf den eine Teilung graviert war, ließen sich Laufgewichte *V* von 1, 2, 5, 10, 20, 100 g verschieben behufs Regulierung der äquatorealen Träg-

1) J. C. Maxwell, Trans. Roy. Soc. Edinb. 21. IV. p. 73. 1857, u. Scientif. Papers 1. p. 262. (Taf. III). Cambridge 1890.

heitsmomente; auch konnte ein horizontaler Querstift Q mit anderen Laufgewichten HH von 10, 20, 50 g in beliebigem Azimut angebracht werden. Dieser Stift bildete dann eine Hauptträgheitsachse, da ohne ihn der Kreisel bei der skizzierten Magnetanordnung ein nahezu symmetrischer war, bez. durch Justiergewichte mm zu einem solchen gemacht werden konnte.

Fig. 2 ($\frac{1}{4}$ nat. Gr.).

Fig. 3.

Wolframstahlkreis (Fig. 3): Die stark abgeplatteten Sphäroide $\bar{s}\bar{n}$ aus glashartem Wolframstahl trugen oben einen kurzen Magnaliumstiel Z mit Laufgewicht V aus Schriftmetall, unten eine Nickelglocke G , so daß der Spitze P ein genügender Spielraum verblieb. Die genannten Legierungen haben alle einen hohen spezifischen Widerstand. Wie ersichtlich, fehlten den Scheiben zwei Segmente; dadurch wurde einmal die Magnetisierungsrichtung parallel den entsprechenden Kanten festgelegt und erreichte man außerdem, daß $K_X < K_Y$,

Fig. 4 ($\frac{1}{8}$ nat. Gr.).

was meistens erwünscht (vgl. ferner § 17). Die Pole waren durch blaue bez. rote Farbsichel s und n kenntlich gemacht.

Zwillingsmagnet (Fig. 4): Bei den Versuchen des Abschnittes B wurde ein einfaches horizontales Magnetpaar (Gesamtmasse 85 g) benutzt, welches durch eine, ein zentrisches Achathütchen tragende Messingbrücke verbunden war; der nach der $+X$ -Achse gerichtete Zeiger spielte auf einem Teilkreis ein, dessen Träger ein Spiegel war.

§ 5. *Der Antrieb der Kreisel* erfolgte in verschiedener Weise; vielfach mit der Hand oder mittels einer abgezogenen Schnur; zuweilen durch Anlegen der Radwulst an eine schnelllaufende raue Lederscheibe, oder pneumatisch mittels Gebläses; der Wind wurde dann durch Tangentialdüsen DD (Fig. 2) geblasen. Bei gut geschmierten Zapfen bez. geschärften Spitzen liefen die Kreisel hernach längere Zeit unter sehr langsamer Abnahme des Gyrationstempos; bei derartigem „Freilauf“ mit drei Freiheitsgraden wurden fast alle Messungen vorgenommen; auch die allgemeine Theorie der um einen Fixpunkt rotierenden Körper fußt ja auf dieser Voraussetzung.

Indessen gelang es für die Spitzenkreisel ein Triebwerk zu konstruieren, bei dessen Einschaltung ein Freiheitsgrad aufgehoben bez. eingeschränkt, die Bewegung also halb zwangsläufig wurde; die in Abschnitt A zu beschreibenden Erscheinungen blieben dabei im großen und ganzen dieselben. Dabei wurde mittels Wasserturbine oder Elektromotor eine Nuten-scheibe NN (Fig. 2) angetrieben, welche durch einen passenden „Mitnehmer“ auf die als Zäpfchen ausgebildete $\pm Y$ -Halbachse — bez. auf eine zum Hilfsvektor $\mathfrak{N}$ senkrechte Halbachse — des Kreisels in rein mechanischer Weise wirkte.

An Stelle dieser einfachen Vorrichtung konnten auch geeignet gebogene Magnete derart mit der Scheibe NN verbunden werden, daß diese als Trägerin eines horizontalen Feldes zu betrachten war, bei ihrer Rotation also ein ebenes Arago-sches Drehfeld entstand, welches unter hier nicht näher zu erörternden Umständen die Kreiseldrehung aufrecht zu erhalten vermochte; dabei empfahl es sich, das horizontale Erdfeld mittels eines passenden Hilfsmagnets zu kompensieren.

Es liegt kaum ein Grund vor zu bezweifeln, daß auch ein Ferrarissches elektromagnetisches Drehfeld sich hierzu ver-

werten ließe. Das vertikale Richtfeld superponiert sich dem Antriebsdrehfeld zu einem allgemeineren „konischen Drehfeld“.

§ 6. *Die Justierung der Kreisel* war hauptsächlich dahin zu bewirken, daß 1. die möglichst homogenen Kreiselkörper genau „drehrund“ liefen, 2. die Spindel eine Hauptträgheitsachse war, 3. der Schwerpunkt im Stützpunkt lag, sofern nicht ausnahmsweise das Gegenteil gewünscht wurde. Die beiden ersteren Bedingungen sind für ein ruhiges Laufen wesentlich, namentlich bei den Spitzenkreiseln, und am meisten für die empfindlichsten Trägheitsverteilungen (§§ 15—20). Die Einstellung sub 2 ließe sich nach Maxwells Methode (l. c. p. 257) mittels der, in Figg. 2 und 3 schematisch angedeuteten vier vertikalen Justierschrauben ausführen.

Die Trägheitsmomente wurden teils durch Rechnung, teils durch Messung ermittelt, indem Schwingungen von geringer Amplitude in schwachen Feldern beobachtet wurden; wo nötig wurden die Kreisel zu diesem Zweck an einem langen dünnen Messingdraht aufgehängt, welcher die Verlängerung der betreffenden Hauptträgheitsachse bildete.

Die Kreiselfrequenz wurde entweder durch direkte Zählung — solange $N < 4$ pro Sek. — oder aber mittels Beobachtung durch eine stroboskopische Scheibe wie üblich bestimmt.

Die Versuche seien nun ungefähr in der Reihenfolge mitgeteilt, wie sie auch im theoretischen Aufsatz innegehalten wurde.

A. Koinzidenz der Gyrationssachse mit der Feldrichtung.

§ 7. *Die orientierte reguläre Gyration* um verschiedene permanente Achsen ließ sich am Nickelinkreisel im weitesten Bereiche beobachten. Sobald die Spindel einen endlichen Winkel θ mit der — dem Felde stets gleichgerichteten — Gyrationssachse bildete, gerieten die beiden inneren Cardani-Ringe in Mitbewegung. Das Spindelende beschrieb eine bequem aufzuzeichnende Ellipse; deren Hauptachsen würden bei schwereren Ringen erhebliche Unterschiede aufweisen, welche sich indessen bei den beschriebenen Magnaliumringen auf einige Prozente reduzierten. Immerhin betrug das Hauptträgheitsmoment um einen Durchmesser beim Innenring 1700, beim Mittelring 2600 C.G.S.; diese waren nicht gegen die sogleich anzuführenden Werte für den Kreisel selbst zu vernachlässigen.

Der Wert der in Rechnung zu setzenden äquatorealen Hauptträgheitsmomente ist demnach etwas unsicher. Dieser Umstand, ferner die Durchbiegung der Ringe, die trotz sorgfältigster Herstellung erheblichere und sämtliche Eulersche Parameter beeinflussende Reibung, die größere Schwierigkeit einer genauen Justierung machen überhaupt den in Ringen laufenden Kreisel zur quantitativen Prüfung der Theorie weniger geeignet als den Spitzenkreisel. Wegen der unbeschränkten Bewegungsfreiheit des ersteren im Vergleich zu letzterem sind indessen manche Bewegungsarten — wenigstens in vollständiger Weise — nur an jenem demonstrierbar, freilich mehr qualitativ.

§ 8. *Paramagnetische oder diamagnetische Orientierung* wurde je nach der Stellung der polaren Bleimassen beobachtet. Waren diese z. B. in der Weise eingestellt, daß

$$K_X = 29\,200 < K_Y = 30\,300 < K_Z = 33\,900 \text{ C.G.S.},$$

$$K_X/K_Z = 0,86,$$

so war der Kreisel paramagnetisch orientierbar. Es gelang dann den Winkel $\theta = (\pi/2 - \alpha)$ bis 55° hinaufzutreiben, und zwar je nach der Gyrationfrequenz bei Feldern von 15 bis 45 Gauss; dabei mußten die Ringe offenbar in starke Mitbewegung geraten, die schließlich zu einem „Durchschlagen“ bei ganz unregelmäßiger Bewegung führte. Das magnetische Moment sämtlicher neun Magnete war hierbei äquatoreal, und zwar nach der Querachse X gerichtet; es betrug etwa $\mathfrak{M}_X = 7000 \text{ C.G.S.}$; die orientierte Komponente erreichte bis zu 80 Proz. dieses Wertes, wie die direkte magnetometrische Beobachtung ergab; auch ist ja

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = m = \cos \alpha = \sin \theta = \sin 55^\circ = 0,82.$$

Es liegt kaum ein Grund vor, zu bezweifeln, daß bei trägheits- und reibungslosen Ringen dieser Orientierungskosinus schließlich der Einheit gleich werden, d. h. die Gyration alsdann um die X -Achse stattfinden würde (l. c. §§ 19, 30).

Bei Einstellung der Polarmassen nahe den Enden der Spindel, derart, daß die äquatorealen Trägheitsmomente überwiegend und damit die Orientierung eine diamagnetische wurde, stieg der Winkel θ bis zu nahezu dem gleichen Werte; hierbei

durften nur schwächere Felder einwirken, wegen ihrer alsdann entmagnetisierenden Tendenz. Der Charakter der Orientierung ließ sich mittels roter und blauer Farbstreifen an der Radwulst, entsprechend der Lage der Nordpole bez. Südpole, auch im Fluge an den sich zeigenden Farbringen erkennen.¹⁾

Solange kein „Durchschlagen“ erfolgte, waren bei der durch Reibung bedingten allmählichen Abnahme der Gyrationenfrequenz bez. bei genügend langsamer Zu- oder Abnahme des Feldes die entsprechenden Änderungen des Bewegungszustandes bez. des Winkels θ ebenfalls stetige und quasi-reversible, wenigstens in qualitativer Weise (l. c. § 10).

Versuche mit Spitzenkreiseln.

§ 9. *Messungen am Hartbleikreisel:* Bei richtiger Zentrierung und genügend rascher Gyration um den Durchstoßungspunkt Z_1 der geometrischen Figurachse Z erscheint die Farbscheibe gleichmäßig grau. Dagegen verrät das Sichtbarwerden eines zentralen Farbfleckes F und eines Saumes ss in der „Gegenfarbe“ (Fig. 5) das Durchstoßen des betreffenden Sektors durch die Instantanachse; sind insbesondere Farbe und Durchmesser des Kreises konstant, so handelt es sich um eine permanente, kreiselfeste und raumfeste Gyrationssachse. Es bezeichne: e die Exzentrizität $z_1 Z_1$ des Durchstoßungspunktes z_1 jener Achse gegen Z_1 , denjenigen der Figurachse; d den Durchmesser des Farbkreises, der sich in gleichmäßiger Färbung vom verwaschenen Hintergrund abhebt; L der Abstand von Z_1 bis zum Stützpunkt, d. h. die Stiellänge. Dann ist für kleine Winkel

Fig. 5.

$$(1) \quad \theta = \frac{e}{L} = \frac{d\sqrt{2}}{2L}.$$

Bei den zunächst mitzuteilenden Messungen wurde ein sehr dünnwandiges Magnaliumrohr als Stiel benutzt ($L = 20,5$ cm); der Farbkreis wurde mittels Kalibermaß oder Irisblende ge-

1) Im empfindlichsten Bereiche zwischen para- und diamagnetischer Einstellung bedingen die Ringe manche Unregelmäßigkeiten, weswegen hierfür auf die Versuche mit Spitzenkreisel hingewiesen sei (§ 15).

messen; dabei betrug die Unsicherheit etwa 5 Proz.; am schärfsten hob sich der Fleck ab und am genauesten war die Messung bei Durchmessern von 5—8 mm und möglichst rascher Gyration. Aus der Farbe des Zentralfleckes läßt sich leicht auf das Vorzeichen der Orientierung schließen.

Beim Spitzenkreisel kommen als wesentliche Nebenumstände in Betracht: Die Reibung der abgerundeten „Spitze“ in ihrer Pfanne, der Luftwiderstand, das elastische Mitschwingen der Unterlage. Diese dissipativen Wirkungen üben ihren dämpfenden Einfluß zunächst auf die möglichen nutationsähnlichen Schwankungen aus, welche daher zuallererst abklingen; insofern bedingen sie eine Vereinfachung der Bewegung, wie sie in der Theorie bereits berücksichtigt wurde (l. c. § 9). Des weiteren ist der Einfluß jener Faktoren auf die reguläre Präzession neuerdings von den Herren Klein und Sommerfeld (l. c. Kap. VII) ausführlicher diskutiert worden. Im Anschluß daran ließe sich der verwandte Fall der regulären Gyration wohl auch behandeln; im Hinblick auf die genügende quantitative Bestätigung der Theorie konnte indessen vorläufig hiervon abgesehen werden.

§ 10. *Vorversuche bei äquatorealer Magnetrichtung* bestätigten die Forderung, daß eine permanente Gyrationssachse dauernd mit der Feldrichtung — welche bei diesen Versuchen eine vertikale war — zusammenfallen müsse (l. c. § 8); sowie eines der Hauptergebnisse bei äquatorealer Polarisierung (l. c. § 11), welches sich ja bereits beim Nickelinkreisel erhärtet fand:

Das Feld bewirkt eine paramagnetische [diamagnetische] Orientierung, je nachdem die Gyration anfänglich an die stabile Hauptachse größten [bez. kleinsten] Hauptträgheitsmomentes erfolgt.

Bei richtiger Einstellung der Sektorenscheibe bezüglich der Magnetrichtung variierte der Durchmesser des einfarbigen Kreises in stetiger quasi-reversibeler Weise, wenn das Feld genügend langsam zu- oder abnahm. Ließ man z. B. den Strom seinen Endwert nach 10" erreichen, so konnte der Kreisel inzwischen bequem 50—100 Umdrehungen gemacht haben. Von den hierher gehörigen Messungen sei eine erwähnt, bei welcher der Hartbleikreisel durch das Triebwerk in gleichmäßiger Gyration gehalten wurde (N etwa 12 pro Sek.). Dabei nahm das Feld langsam im Bereiche $35 < \mathfrak{H} < 65$ Gauss

zu oder ab; der Durchmesser des Farbkreises wurde jedesmal für $\mathfrak{S} = 50$ Gauss gemessen; es ergab sich:

Bei Zunahme von $\mathfrak{S}$: $d = 4,4 \quad 4,6 \quad \text{Mittel } 4,50 \text{ mm}$

Bei Abnahme von $\mathfrak{S}$: $4,4 \quad 4,7 \quad 4,5 \quad ,, \quad 4,53 \text{ mm.}$

Hierbei tritt demnach keine merkliche Hysterese auf.

Entsteht das Feld mehr oder weniger plötzlich, so bildet sich ruckweise ein Farbkreis, dessen Durchmesser zunächst periodisch schwankt; diese Schwankungen klingen dann allmählich ab und der Bewegungszustand wird schließlich der gleiche wie bei langsamer Einwirkung des Feldes. Beim freilaufenden Kreisel nimmt jener Durchmesser infolge der Verlangsamung der Gyration allmählich zu. Bei plötzlicher Unterbrechung oder Kommutierung des Stromes zeigen sich ähnliche Schwankungen, welche sich mit der Zeit bald verlieren.

§ 11. *Schiefe äquatoreale Magnetrichtung*: Die Sektorenscheibe wurde allemal derart eingestellt, daß ein einfarbiger roter bez. blauer Kreis entstand; dazu mußte die Gyration Achse einen Radiusvektor schneiden, welcher die betreffenden Quadranten halbierte (vgl. Fig. 5). Nun entartet bei rein äquatorealer Polarisation der Staudeschen Kegel in zwei senkrechte Ebenen ($X Y$) und ($Z \mathfrak{M}$); in letzterer bleibt die Gyration Achse, indem sie sich bei wachsendem Felde von der Z -Achse entfernt. Bilden $+ \mathfrak{M}$ und $+ \mathfrak{N}$ die Winkel ($\mathfrak{M}, X$) bez. ($\mathfrak{N}, X$) mit der $+ X$ -Achse, so ist¹⁾

$$(2) \quad \operatorname{tg}(\mathfrak{N}, X) = \frac{K_Z - K_X}{K_Z - K_Y} \operatorname{tg}(\mathfrak{M}, X).$$

Es wurde hierbei der Hartbleikreisel mit horizontalem Querstift benutzt; letzterer galt als X -Achse; dann war einmal bei paramagnetisch orientierbarem Kreisel

$$K_X = 5700, \quad K_Y = 7700, \quad K_Z = 8700 \text{ C.G.S.};$$

$$\frac{K_Z - K_X}{K_Z - K_Y} = + 3,00.$$

1) Vgl. H. du Bois, l. c. § 11 und wegen weiterer Einzelheiten Versl. Afd. Nat. Acad. Amst. 10. p. 422. 1902.

Andererseits bei diamagnetischer Einstellung

$$K_X = 9500, \quad K_Y = 10\,100, \quad K_Z = 7300 \text{ C.G.S.};$$

$$\frac{K_Z - K_X}{K_Z - K_Y} = +0,78.$$

Die Winkel ($\mathfrak{M}$, X) und ($\mathfrak{N}$, X) verhielten sich dann ungefähr entsprechend Gleichung (2). Sie liegen stets im gleichen Quadrant und werden offenbar nur dann identisch, wenn der Kreisel ein symmetrischer ist ($K_X = K_Y$) oder aber wenn die Magnetrichtung mit der Hauptträgheitsachse X parallel ist. In letzterem, übrigens meistens benutzten Falle sind die Richtungen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und X identisch; die Sektorenscheibe ist dann so einzustellen, daß der rote und blaue Quadrant sich mit dem Nordpol bez. dem Südpol deckt, in der Weise wie es in Fig. 2 abgebildet ist.

§ 12. *Queraxiale Magnetisierung*: Für diesen Fall wurden Bestimmungen am Hartbleikreisel ohne Querstift ausgeführt; dabei war $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_X = 1420 \text{ C.G.S.}$, $K_Z = 6640 \text{ C.G.S.}$ Für fünf verschiedene Einstellungen eines oder mehrerer vertikaler Laufgewichte wurde auch K_X bestimmt; dabei befand sich der Schwerpunkt möglichst genau im Stützpunkt. Die „Trägheitsdifferenz“ ($K_Z - K_X$), deren Vorzeichen zugleich dasjenige der Orientierbarkeit bestimmt, hatte für die Einstellungen 1), 2), 3), 4), 5) folgende Werte:

Trägheits- differenz	Orientierbarkeit paramagn. ($K_X < K_Z$)		Orientierbarkeit diamagn. ($K_X > K_Z$)		
$K_Z - K_X$	1) +1570	2) +190	3) -680	4) -2910	5) -11 950

Da die Magnete hier parallel der Querachse X lagen, stellt die vereinfachte Gleichung (II) (l. c. §§ 14—26)

$$m = \cos \alpha = \sin \theta = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{G}^2} \frac{\mathfrak{M}}{K_Z - K_X}$$

eine mögliche reguläre Gyration dar. Schreibt man sie etwas anders und berücksichtigt man (1), so ergibt sich für geringe Werte von θ , derart, daß $\theta = \sin \theta$ zu setzen ist,

$$(3) \quad \tau = \frac{2\pi}{\mathfrak{G}} = \pi \sqrt{\frac{4(K_Z - K_X) \sin \theta}{\mathfrak{M} \mathfrak{S}}} = \pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(K_Z - K_X) d}{L \mathfrak{M} \mathfrak{S}}}$$

als die Periode, für welche eine instantane Gyrationssachse diese Eigenschaft dauernd beibehalten wird; mit diesem berechneten Werte ist der beobachtete zusammengestellt.

Tabelle 1.

Einstellung der Laufgewichte V	$K_Z - K_X$ C.G.S.	d cm	$\S$ Gauss	$M \S$ C.G.S.	Periode		Bemerkungen
					ber.	beob.	
1. paramagn.	+ 1570	+0,60	50	71 000	0,134''	0,137''	Strob.
	+ 1570	+0,39	10	14 200	0,24	0,27	—
	+ 1570	+0,60	10	14 200	0,30	0,33	—
2. paramagn.	+ 190	Sehr empfindlich — paramagnetisch					
3. diamagn.	— 680	—0,80	10	14 200	0,23''	0,25''	—
	— 680	—0,90	10	14 200	0,24	0,28	—
	— 680	—0,40	—	$M' b g$ 3 550	0,32	0,35	1)
4. diamagn.	— 2910	—0,60	50	71 000	0,18	0,19	Strob.
	— 2910	—0,57	25	35 500	0,25	0,32	—
	— 2910	—0,38	10	14 200	0,33	0,39	—
5. diamagn.	—11950	Unempfindlich — diamagnetisch					

§ 13. *Diskussion der Resultate:* Es kam bei den rein elektromagnetischen Versuchen darauf an, den Schwerpunkt des Gesamtkreisels so genau wie möglich in den Stützpunkt zu verlegen. Eine Abweichung längs der Z -Achse erzeugte bei schräger Kreiselage feldfreie Schwerepräzession; eine äquatoreale Exzentrizität machte sich durch ein farbiges

1) Dieser Kontrollversuch betrifft den diapolaren *schweren* Kreisel, indem ein Bleiplättchen B (Fig. 2) sich zwischen den Nordpolen der Magnete befand. Es sei M' seine Masse, b die Entfernung seines Schwerpunktes vom Stützpunkt, also $M' b^2$ sein Trägheitsmoment bezüglich der Y - und Z -Achse. Das Drehmoment der Schwere betrug bei dem Versuche [$M' = 1$ g, $b = 3,6$ cm] $M' b g = 3550$ C.G.S., entsprechend demjenigen, welches sonst ein Feld von 2,5 Gauss erzeugt hätte; hingegen war $M' b^2 = 13$ C.G.S., d. h. gegen die Trägheitsmomente des Kreisels zu vernachlässigen; das exzentrische Übergewicht wirkte also nur infolge seiner Schwere (vgl. l. c. p. 291, Fußnote). In Ruhe bez. für $K_X < K_Z$ neigte sich der Kreisel nach der beschwerten Seite; für $K_X > K_Z$ hob der laufende Kreisel das Gewicht auf Kosten seiner Gyrationssenergie.

Zentrum der Sektorenscheibe bemerkbar; letzteres Kriterium ist nur bei genauer Herstellung und Justierung anwendbar.

Außer dieser schwerlich ganz auszuschließenden Fehlerquelle ist die Unsicherheit der Periodenbestimmung wegen der unvermeidlichen Verzögerung der Gyration zu berücksichtigen; denn bei der Prüfung der Gleichung (II) kam zunächst nur der freilaufende Kreisel in Betracht. Die vertikale Erdkomponente wurde eliminiert, indem bei jeder Bestimmung das vertikale Spulenfeld kommutiert und Mittelwerte gewonnen wurden. Der Drehungssinn ist bei dieser Art von Versuchen gleichgültig.

In Tab. 1 erscheint nun die beobachtete Periode stets größer als die berechnete; indessen ist die Übereinstimmung bei den beiden kurzen, stroboskopisch ermittelten Perioden eine genügende. Das raschere Gyrationstempo und das intensivere Feld von 50 Gauss, d. h. die höheren Werte der kinetischen bez. potentiellen Energie, welche hier mitspielen, verringern vermutlich den Einfluß der verschiedenen Fehlerquellen; auch ist die Messung des Farbkreises dann genauer. Nach alledem lag kein Grund vor, die Richtigkeit der Theorie zu bezweifeln und erschienen genauere Messungsreihen überflüssig.

Falls K_x gegen K_z zu vernachlässigen ist, lautet die Gleichung (II) für den Grenzfall $\mathfrak{f} = +1$ (l. c. p. 306)

$$(4) \quad m = \sin \theta = \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{S}}{K_z \mathfrak{G}^2} = \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{S} r^2}{4 \pi^2 K_z}.$$

Streng genommen gilt diese für das ideale Zentrifugalpendel und läßt sich dafür mutatis mutandis auch elementar herleiten. Annähernd beherrscht sie die Rotation einer gewöhnlichen Magnetnadel auf einer Spitze bei vertikalem Richtfelde, wobei nur paramagnetische Orientierbarkeit auftreten kann.¹⁾

§ 14. *Der Labilitätspunkt* bei der Gyration des nicht mehr äquatoreal, sondern „polar“ magnetisierten symmetrischen Kreisels um die Z -Achse ist gegeben durch (l. c. Gl. (22))

$$(5) \quad |a|_L = \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{M}_Z}{E} = \frac{2 \mathfrak{S} \mathfrak{M}_Z}{K_z \mathfrak{G}^2} = \frac{K_z}{2 K_x};$$

1) Beim Nickelinkreisel lag dieser Fall vor, wenn — ohne Benutzung weiterer Magnete — der Zylindermagnet frei beweglich gelassen wurde, während die Spindel mit der Feldrichtung koinzidierte.

bei Einführung der Gyrationenfrequenz folgt hieraus

$$(6) \quad N_L = \frac{\mathfrak{G}}{2\pi} = \frac{1}{\pi K_Z} \sqrt{\mathfrak{M}_Z \mathfrak{S} K_X}.$$

Behufs Prüfung dieser Formel wurde beim Hartbleikreisel anstatt der äquatorealen Quermagnete nunmehr ein „Polarmagnet“ mit Laufgewicht an Stelle der Spindel Z eingeschraubt. Es wurde in der Weise beobachtet, daß der Kreisel im „Gegenfelde“ 20 Gauss aufrecht lief, bis die Frequenz so weit nachließ, daß Labilität eintrat; das ließ sich freilich nicht sehr scharf beurteilen, zumal diese Grenzfrequenz — in ungefährer Übereinstimmung mit Formel (6) — eine recht niedrige war ($N = 0,5$, $\tau = 2''$). Es wurde daher eine Bleischeibe mit geringem polarem Trägheitsmoment hergestellt, derart, daß nun

$$K_X = K_Y = 3000 \quad \text{und} \quad K_Z = 1560 \text{ C.G.S.}$$

war; dabei war $\mathfrak{M}_Z = 710$ C.G.S., korrigiert für die schwächende Wirkung des Gegenfeldes; der Schwerpunkt wurde wieder möglichst genau in den Stützpunkt verlegt. Die Formel ergibt für diese Daten $N = 1,33$; beobachtet wurde 1,3 bis 1,5.¹⁾

Empfindliche diamagnetische Spitzenkreisel.

§ 15. *Der Hartbleikreisel* war bei der Einstellung 2. bereits recht empfindlich paramagnetisch (vgl. Tab. 1); in der Tat war die Trägheitsdifferenz $K_Z - K_X = +190$ nur noch gering im Vergleich zu $K_Z = 6640$, entsprechend einem kleinen positiven Werte des Trägheitskoeffizients, $\mathfrak{k} = +0,029$. Infolgedessen hatten kleine Justierfehler, Abweichungen und sonstige Störungen ebenfalls mehr Einfluß, so daß der Kreisel sehr unruhig lief

1) Außerdem wurden auch Labilitätsversuche am Nickelinkreisel — mit polar eingestelltem Magnet — ausgeführt, und zwar bei symmetrischer wie auch bei unsymmetrischer Trägheitsanordnung. Die Theorie (l. c. §§ 21–24) wurde im allgemeinen qualitativ bestätigt gefunden; eine nähere quantitative Prüfung war der Ringe wegen undurchführbar. Indessen gestatten diese das völlige „Umschlagen“ des Kreisels nach eingetretener Labilität; die Einzelheiten dieser Bewegung bez. die „Abfallkurve“ lassen sich kaum verfolgen; schließlich findet aber wieder eine stabile Gyration statt, welche mit der anfänglichen gleichsinnig ist in bezug auf die Polarisationsrichtung, daher absolut betrachtet in entgegengesetztem Sinne auftritt mit bezug auf ein raumfestes Achsenkreuz.

und quantitative Bestimmungen ausgeschlossen waren. Schon das vertikale Erdfeld wirkte richtend und schwache Ströme erzeugten eine paramagnetische Orientierung, welche sich dann jenen Unregelmäßigkeiten ungestört superponierte.

Der Theorie gemäß würde der Widerstand gegen Orientierung für $K_Z = K_X$, d. h. $f = 0$, schwinden und ein derartiger Kreisel müßte schon auf die Einwirkung eines unendlich schwachen Feldes reagieren (l. c. § 15); die Empfindlichkeit geht demnach theoretisch vom positiven Gebiete durch Unendlich zum negativen Bereich über. Praktisch kann es sich nur noch darum handeln, die kleinsten Werte von f zu erreichen, bei denen das Kreiseln trotz verschiedener Störungen nicht allzu unregelmäßig wird; dabei interessieren vorwiegend kleine negative Werte, so daß es sich also im folgenden ausschließlich um diamagnetische Kreisel handeln wird.

Der Hartbleikreisel wurde zunächst in der Weise verbessert, daß ein massiver, genau abgedrehter kürzerer Magnesiumstiel eingesetzt wurde; dabei war $L = 10\sqrt{2}$ cm, also $\theta = \frac{1}{2} d\sqrt{2}/L = 0,05 d$. Die Justierung (§ 6) wurde bei kompensierter Vertikalkomponente vorgenommen und möglichst sorgfältig durchgeführt. Wofern $\theta = \sin \theta$ gesetzt werden darf, lautet unter den üblichen Voraussetzungen Gleichung (II)

$$(7) \quad \frac{\theta}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{M}}{4\pi^2 N^2 (K_Z - K_X)} = \frac{\mathfrak{M}}{4\pi^2 K_Z f} \tau^2.$$

§ 16. Die Empfindlichkeit kann nun durch dieses Verhältnis $\theta/\mathfrak{H}$ ausgedrückt werden. So wurde bei mechanischem Antrieb mittels Turbine beobachtet $\theta = -0,1$ in Bogenmaß, für $\mathfrak{H} = 2,5$ Gauss bei $\tau = 0,315''$; das ergibt $\theta/\mathfrak{H} = -0,4 \cdot \tau^2$. Die höchste bei Freilauf erhältliche Empfindlichkeit ergab $\theta = -0,07$ für $\mathfrak{H} = 0,75$ Gauss bei $\tau = 0,305''$, oder $\theta/\mathfrak{H} = -1 \cdot \tau^2$. Bei diesen Versuchen lag der Schwerpunkt etwas *unter* dem Stützpunkt, so daß obige Formel eigentlich nicht ohne weiteres anwendbar ist. Rechnet man die $\bar{Z}$ -Koordinate des Schwerpunktes in diesem Fall *positiv* und setzt man das Drehmoment der Schwere in Rechnung, so gelangt man durch die Betrachtung des Zentripetalmoments bei queraxialer Magnetisierung leicht zu einer Gleichung in $\sin \theta$ und $\cos \theta$. Diese läßt sich zu einer biquadratischen — ohne quadratisches Glied

— in $\operatorname{tg}(\theta/2)$ umformen, deren Diskussion recht umständlich wird und hier daher unterbleiben möge. Für geringere Werte von θ und $\bar{Z}Mg$ treten Vereinfachungen ein und man erhält an Stelle von (7), falls M die Kreiselmasse bedeutet,

$$(7^*) \quad \frac{\theta}{\mathfrak{S}} = \frac{\mathfrak{M}}{4\pi^2 N^2 (K_Z - K_X) + \bar{Z}Mg}.$$

Nun ist beim diamagnetischen Kreisel das erste Glied des Nenners negativ; dieser wird daher infolge des zweiten positiven Gliedes numerisch kleiner, der ganze Bruch und damit die Empfindlichkeit *cet. par.* größer. Hebung des Schwerpunktes über den Stützpunkt verkleinert dagegen die Empfindlichkeit. [Beim paramagnetischen Kreisel würde es sich gerade umgekehrt verhalten; dies folgt qualitativ schon aus einer Betrachtung des Sinnes der verschiedenen Drehmomente.] Allzuweit kann man freilich mit dieser Vergrößerung der Empfindlichkeit aus verschiedenen Gründen nicht gehen; übrigens liegt, wie gesagt, die Schwierigkeit nicht in der Erreichung einer hohen Empfindlichkeit, sondern vielmehr in einer, jener entsprechenden, genauen Justierung der Kreisel.

§ 17. *Wolframstahlkreisel* haben naturgemäß *cet. par.* die höchste Empfindlichkeit und läßt sich diese bei der beschriebenen Konstruktion annähernd berechnen, da man die Stahlkörper trotz der fehlenden Segmente und der kleineren Abweichungen wohl als abgeplattete Sphäroide betrachten darf. Deren Moment ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{S} V$; für nicht zu kleine Werte des Entmagnetisierungsfaktors in Richtung der X -Achse, z. B. für $N_X > 0,2$, kann man in erster Annäherung schreiben¹⁾

$$(8) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 / N_X,$$

während bekanntlich

$$\begin{aligned} N_X &= \frac{2\pi}{e^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)} \arcsin e - (1 - e^2) \right\} \\ &= \frac{2\pi}{1 - m^2} \left\{ \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \arccos m - m^2 \right\}, \end{aligned}$$

wo e die Exzentrizität der Meridianellipse, m ihr Achsen-

1) H. du Bois u. E. Taylor Jones, *Elektrotechn. Zeitschr.* 17. p. 543. 1896.

verhältnis $2c/2a$ bedeutet. Für das größte Hauptträgheitsmoment des Sphäroids — abgesehen von Stiel und Glocke — gilt

$$K_Z = \frac{2}{5} a^2 V D.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (7) ergibt sich

$$(9) \quad \frac{\theta}{\mathfrak{H}} = \frac{5}{16 \pi^3} \frac{\sqrt{(1-m^2)^3}}{m(\arccos m - m\sqrt{1-m^2})} \frac{\mathfrak{H}_G \tau^2}{a^3 D \mathfrak{f}} = \frac{5}{16 \pi^3} \frac{M_m \mathfrak{H}_G \tau^2}{a^3 D \mathfrak{f}};$$

der Kürze halber bedeutet hier M_m obigen, m enthaltenden Faktor, welcher um so größer ist, je kleiner m . Daher wächst die Empfindlichkeit erstens mit der fortschreitenden Abplattung des Sphäroids; indessen kann man hierbei nicht zu weit gehen, da die Gleichung (8) dann nicht mehr gelten würde, und auch das polare Trägheitsmoment des Stieles und der Glocke nicht mehr zu vernachlässigen wäre; auch zerspringen zu dünne Stahlscheiben beim Härten; $m = 0,03$ bis $0,04$ ist eine passende untere Grenze. Zweitens ist die Empfindlichkeit umgekehrt proportional $\mathfrak{f}$; man wird also K_X nur sehr wenig größer als K_Z wählen. Daher ist die aus der Konstruktion (§ 4) sich ergebende Ungleichung $K_X < K_Y$ zu empfehlen, indem dann stets

$$K_Z < K_X < K_Y$$

sein muß und nicht etwa

$$K_Y < K_Z < K_X$$

werden kann, was bekanntlich bereits die feldfreie Gyration um die Z -Achse von vorneherein labil machen würde.

Betrachtet man schließlich einmal ähnliche sphäroidische Kreisel aus gleichem Stahl und mit ähnlichen Trägheitsellipsoiden, für welche also m und $\mathfrak{f}$ sowie D und $\mathfrak{H}_G$ vorgeschrieben wären, dann erscheinen theoretisch die kleineren bei gegebener Periode am empfindlichsten, wegen des Faktors a^2 im Nenner der Formel (9); selbstverständlich wird es auch hier eine praktische untere Grenze geben (§ 19).

§ 18. Die mittlere Kreiselsuszeptibilität kann aufgefaßt werden als das Verhältnis der orientierten Komponente $\mathfrak{M}_z$ pro Einheit des sphäroidischen Kreiselvolums V zur Feldintensität. Bezieht man sie dagegen auf das Volum V' der Bewegungssphäre, d. h. des — in Fig. 3 gestrichelten — Kugelraumes, den die Scheibe teilweise zu durchmessen ver-

mag, so kann man den Quotient κ' die mittlere räumliche Suszeptibilität nennen, deren Einführung für manche Zwecke eher geboten erscheint. Es ist daher, sofern $m = \theta$

$$(10) \quad \kappa = \frac{M_z}{\mathfrak{H} V} = \frac{m M}{\mathfrak{H} V} = \frac{\theta}{\mathfrak{H}} \frac{\mathfrak{H}_G}{N_X}.$$

Unter Berücksichtigung von (9) ergibt dies des weiteren

$$(11) \quad \kappa = \frac{5}{32 \pi^4} \cdot \frac{M_m^2 \mathfrak{H}_G^2 \tau^2}{a^2 D f};$$

und da $V = V' c/a = m V'$, wird

$$(12) \quad \kappa' = m \kappa = \frac{5}{32 \pi^4} \frac{m M_m^2 \mathfrak{H}_G^2 \tau^2}{a^2 D f}.$$

Auch der Faktor $m M_m^2$ wächst noch mit abnehmendem m . Bei genügender Abplattung, derart, daß m nur wenige Hundertstel beträgt, gilt annähernd

$$(12^*) \quad \kappa' = \frac{5}{8 \pi^4} \frac{1}{m} \frac{\mathfrak{H}_G^2 \tau^2}{a^2 D f}.$$

Setzt man in diese Formel beispielsweise die Werte ein: $a = 1,5$ cm, $m = 0,04$, $D = 7,7$, $f = -0,03$, $\mathfrak{H}_G = 56$ Gauss, so würde sich die mittlere räumliche Suszeptibilität

$$\kappa' = -100 \tau^2,$$

ergeben. Dagegen z. B. für $a = 0,5$ cm, $m = 0,03$, $D = 7,7$, $f = -0,01$, $\mathfrak{H}_G = 66$ Gauss findet man den Wert

$$\kappa' = -5000 \tau^2.$$

§ 19. Die Versuchsergebnisse mit Kreiseln aus Wolframstahl ergaben in der Tat ziemlich hohe Empfindlichkeit. Die Bestimmungsstücke eines der durch Fig. 3 dargestellten Exemplare hatten beispielsweise folgende ungefähre Werte:

$2a$	$2c$	V	V'	m	N_X	K_Z	M	S	$\mathfrak{H}_G$
3,00	0,12	0,56	14,1	0,04	0,385	3,9	90	160	62
cm		ccm				C.G.S.			

Diese Werte gelten für das Stahlsphäroid an und für sich. Mit Stiel und Glocke betrug die Gesamtmasse 11,5 g, das polare Trägheitsmoment 4,3 C.G.S. Bei Schrägstellung ergab sich feldfreie retrogressive Schwerepräzession, aus deren Tempo

sich der Abstand des Schwerpunktes unterhalb des Stützpunkts $\bar{Z} = 0,30$ mm ohne weiteres berechnen ließ (l. c. § 36).

Das Laufgewicht wurde auf möglichst hohe diamagnetische Empfindlichkeit bei noch genügend regelmäßigem Freilauf eingestellt. Bei feldfreier Gyration verschmelzen die rote und die blaue Farbsichel der Scheibe zu einem einzigen horizontalen Ringe. Ließ man ein vertikales Feld einwirken, indem man z. B. einen Nordpol N von obenher näherte, wie in Fig. 3 abgebildet, so schien sich dieser Ring infolge der gestrichelten schrägen Stellung $s'n'$ entzwei zu spalten: Ein roter Nordring stieg empor, indem er sich jenem Nordpol näherte; ein blauer Südring senkte sich; die Entfernung der beiden Farbringe ließ sich leicht messen und ergab die Ablenkung θ . Diese betrug bei einem Versuch $-0,133$ für $\mathfrak{S} = 1,8$ Gauss bei der stroboskopisch ermittelten Periode $\tau = 0,091''$, woraus folgt

$$\frac{\theta}{\mathfrak{S}} = -0,074 = -9\tau^2, \quad \kappa = -1440\tau^2, \quad \kappa' = -58\tau^2.$$

Hierbei ist noch abgesehen von der Empfindlichkeitsvergrößerung durch die Schwere, welche bei dieser Periode etwa 20 Proz. betrug, und infolge derer die Empfindlichkeit nicht genau proportional dem Periodenquadrat verläuft. Setzt man in Gleichung (7*) obige Werte ein, so findet man

$$K_Z - K_X = -0,33 \quad \text{und} \quad \mathfrak{f} = -0,077.$$

Ein kleineres Kreiselchen ohne Glocke mit den Werten

2α	$2C$	V	V'	m	N_X	K_Z	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}_G$
2,00	0,10	0,21	4,19	0,05	0,48	0,65	23	110	53
cm		ccm				C.G.S.			

ergab $\theta/\mathfrak{S} = -0,167$ bei $\tau = 0,116''$; daraus folgt

$$K_Z - K_X = -0,10 \quad \text{und} \quad \mathfrak{f} = -0,15.$$

Es stellte sich also heraus, daß der bisher praktisch zu verwirklichende Trägheitskoeffizient numerisch um so größer ausfällt, je kleiner der Kreisel wird, und daß daher die Schlüsse, welche die Ähnlichkeit der Trägheitsellipsoide voraussetzten, in ihrer tatsächlichen Tragweite etwa durch die Abmessungen der hier untersuchten Kreiselchen beschränkt sind.

§ 20. *Weitere Folgerungen.* Allerdings war bei diesen Versuchen auf die Einstellung keine übermäßige Zeit verwendet. Mit einiger Geduld und Sorgfalt könnte man die Empfindlichkeit wohl noch erheblich steigern; namentlich mit Hilfe planmäßiger Justierv Verfahren, ähnlich denen, welche Maxwell (l. c., p. 257) bei einem größeren Kreisel anwandte. Wie dem auch sei, so folgt schon aus dem erhaltenen Wert $\kappa' = -58 \tau^2$

$$\mu' = 4\pi\kappa' + 1 = -729\tau^2 + 1,$$

eine Größe, welche man die Raumpermeabilität des Kreisels nennen kann. Bei einer Frequenz von 27 pro Sekunde wäre hier $\mu' = 0$, daher die Bewegungssphäre als ein magnetisch „impermeabler“ Raum zu betrachten. Bei geringerer Frequenz ist sie dagegen als ein „antipermeables“ Gebiet mit negativer Raumpermeabilität aufzufassen; so würde man z. B. für eine Frequenz von 10 pro Sekunde erhalten $\mu' = -6,29$.¹⁾

Fig. 3 zeigt die Spitze P auf das Ende eines Wagebalkens W gesetzt; dieser war sowohl um eine horizontale wie um eine vertikale Achse drehbar. Der passend äquilibrierte Kreisel war alsdann in vertikaler wie in horizontaler Richtung als Ganzes translatorisch leicht beweglich. Bei Anwesenheit eines Nord- oder Südpols, wie etwa N , z. B. oberhalb des Kreisels, erfolgte diamagnetische Orientierung wie beschrieben und außerdem in jedem Falle eine Translation nach unten.

Bei Aufstellung eines gekrümmten Magnetstabes $S'N'$, z. B. hinter dem Kreisel — wie in Fig. 3 perspektivisch dargestellt — erfolgte ebenfalls diamagnetische Orientierung und Translation nach vorne. Ähnliche Wirkungen dürfte das ungleichförmige Feld eines Stromleiters hervorrufen. Der diamagnetische Kreisel folgt der Faradayschen Regel und begibt sich vom Orte des stärkeren nach Stellen schwächeren Feldes. Dieser Demonstrationsversuch mit künstlichem Diamagnet bietet eine instruktive Erläuterung zu dem viel schwächer ausgesprochenen Verhalten natürlicher diamagnetischer Substanzen, insbesondere in bezug auf jene Regel Faradays. Paramagnetische Kreisel verhalten sich umgekehrt.

1) Auf Grund der Möglichkeit solcher antipermeabler oder impermeabler Raumgebilde läßt sich zunächst theoretisch der Fall einer negativen bez. schwindenden Selbstinduktion diskutieren.

B. Senkrechte Lage der Gyrationssachse zur Feldrichtung.

§ 21. *Messungen am Zwillingsmagnet.* Obwohl die pendeltheoretischen Ergebnisse (l. c., §§ 27—34) bei sämtlichen Kreiseln qualitativ bestätigt wurden, mußte eine quantitative Prüfung mit einem möglichst reibungslosen Exemplar stattfinden. Der Zwillingsmagnet hatte ein Trägheitsmoment $K_Z = 800$ C.G.S.; das magnetische Moment war $\mathfrak{M} = 1680 \pm 40$ C.G.S. Das superponierte induzierte Moment ± 40 C.G.S. entsprach der Feldintensität 5 Gauss, auf welche die Zahlen der Tab. 2 sich beziehen; es wurden deswegen wo nötig kleine Korrekturen angebracht, welche vom jeweiligen Azimut α des Magnets bezüglich der Feldrichtung abhängen, so daß die korrigierten Zahlen einem idealen starren Magnet entsprechen. Das Feld war horizontal westöstlich gerichtet; die Horizontalkomponente des Erdfeldes wurde mittels einer kleinen Magnetnadel kompensiert. Es sind wie vom theoretischen Standpunkt so auch in experimenteller Hinsicht zwei Fälle zu unterscheiden.

§ 22. *Umschwung* [$E_m > 2 \mathfrak{M} \S$]. Die Ablenkung des Magnetometers ergab die mittlere orientierte Komponente $\mathfrak{M}_z$ (§ 2) bez. den mittleren Orientierungskosinus $\bar{m} = \mathfrak{M}_z / \mathfrak{M}$; alsbald nach dieser Ablesung wurde der Strom unterbrochen, und zwar in dem Augenblick, wo das Magnetpaar durch seine stabile Lage schwang, d. h. wo der Zeiger den Punkt I' bedeckte (Fig. 4). Es wird dann keine elektromotorische Kraft im Spulenpaar induziert und die kinetische Energie hat ihren Maximalwert E_m , mit dem das System seine nunmehr gleichmäßige Rotation mit der entsprechenden Periode τ_m fortsetzt. Es ist offenbar

$$E_m = \frac{1}{2} K_Z \mathfrak{C}_m^2 = \frac{2 \pi^2 K_Z}{\tau_m^2}$$

und daher

$$(13) \quad \alpha = \frac{\mathfrak{M} \S}{E_m} = \frac{\mathfrak{M} \S}{2 \pi^2 K_Z} \tau_m^2.$$

Man bestimmt nun die Periode τ_m , welche cet. par. ein Minimum aufweist für den Unterbrechungspunkt I' , so daß man darin ein Kriterium für die richtig abgepaßte Ausschaltung des Stromes hat. Die linke Hälfte der Tab. 2 enthält die zusammengehörigen Werte von $\bar{m}$ und α .

Tabelle 2.

 $\mathfrak{M} = 1680 \pm 40$ C.G.S. $\mathfrak{H} = 5$ Gauss

Voller Umschwung			Alternierende Schwingung		
$\bar{m} = \frac{\overline{\mathfrak{M}_z}}{\mathfrak{M}}$	τ_m	$\alpha = \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{H}}{E_m}$	$\bar{m} = \frac{\overline{\mathfrak{M}_z}}{\mathfrak{M}}$	α_m	$\alpha = \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{H}}{E_m}$
0	—	0	-0,56	179°	0,50
-0,068	0,67''	0,24	-0,24	151	0,54
-0,115	0,80	0,34	0	129	0,62
-0,156	0,85	0,38	+0,20	112	0,72
-0,222	0,89	0,42	+0,41	94	0,93
-1,00	∞	0,50	+0,60	73	1,41
			+0,86	40	4,28
			+0,94	25	10,6
			+1,00	0	∞

§ 23. *Schwingung* [$E_m < 2 \mathfrak{M} \mathfrak{H}$]. Am spiegelnden Teilkreise wurde die Schwingungselongation α_m abgelesen; es ist hier

$$(14) \quad \alpha = \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{H}}{E_m} = \frac{1}{\sin \alpha_m} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha_m}{2}}.$$

Magnetometrisch wurde wieder $\bar{m} = \overline{\mathfrak{M}_z} / \mathfrak{M}$ ermittelt. Die rechte Hälfte der Tab. 2 liefert eine Auswahl zugeordneter Werte.

Der Anschluß der beiden Messungsreihen lieferte schließlich im ganzen 22 experimentelle Werte der durchlaufenden Funktion

$$\bar{m} = \text{funct} \left(\frac{\mathfrak{M} \mathfrak{H}}{E_m} \right) = \text{funct}(\alpha).$$

Diese Bildpunkte sind in die theoretische transzendente Kurve eingezeichnet und es zeigt Fig. 6 eine befriedigende Übereinstimmung; genauere Messungen erschienen auch für diesen Fall überflüssig. Im Einklang mit der Diskussion des Kurvenverlaufes (l. c., § 29; Kurve 00 des Diagramms B, Taf. VIII) läßt sich über den Gang der Erscheinung folgendes aussagen:

Solange das Feld unendlich schwach ist, variiert der Winkel α in gleichmäßiger Weise; es bleibt der mittlere Orientierungskosinus $\bar{m} = 0$. Sobald aber die Feldintensität zunimmt, wird die Rotation in der Nähe der labilen Lage verzögert. Die entsprechenden Integralelemente überwiegen, derart daß die Integration einen negativen Wert für $\overline{\mathfrak{M}_z}$ ergibt,

Fig. 6.

d.h. also diamagnetische Orientierung; anfangs verläuft diese direkt proportional der Feldintensität, umgekehrt dem Energiewert. Und zwar gilt anfangs annähernd

$$\begin{aligned} \bar{m} &= -\frac{1}{4} a = -\frac{1}{4} \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{S}}{E_m} \\ &= -\frac{\mathfrak{M} \mathfrak{S}}{8 \pi^2 K_Z} \tau_m^2. \end{aligned}$$

Das ergibt bei Einsetzung der in § 19 angeführten Bestimmungsstücke des in Fig. 3 abgebildeten Kreisels für dessen diamagnetische Empfindlichkeit

$$\frac{\bar{m}}{\mathfrak{S}} = -0,3 \tau_m^2;$$

bei dieser „B-Wirkung“ (Pendelbewegung) ist die Empfindlichkeit also 30 mal geringer als der in § 19 angegebene Wert bei der „A-Wirkung“.

Bei weiterem Ansteigen des Feldes strebt $\mathfrak{M}_z$ seinem negativen Maximalwert $-\mathfrak{M}$ zu; theoretisch müßte der Magnet dann unendlich lange in der labilen Lage verbleiben; tatsächlich geht die Bewegung alsbald in Schwingung über. Es wurde ferner beob-

achtet, daß $\overline{M}_z$ durch Null ging für die Elongation 129° (theoretisch $131^\circ 2' 4,6''$); je mehr die Schwingung sich daraufhin einengt, desto höhere Werte erreicht $\overline{M}_z$, wobei es dem Höchstwert $+M$ asymptotisch zustrebt.

C. Allgemeinere Bewegungsfälle.

§ 24. „Polarer“ Magnet. Am Nickelinkreisel ließen sich die theoretischen Schlüsse (l. c., §§ 35, 36) leicht bestätigen. Für $\alpha = \angle(M, \xi) = 0$ ist die Lage selbstverständlich durchweg eine stabile; für $\alpha = \pi$ in Ruhe stets eine labile; bei geringer Frequenz überwiegt indessen schon die gyrostatistische Stabilität, wie im vorigen bereits nachgewiesen wurde (§ 14).

Steht die Spindel dagegen senkrecht oder schräg zur Feldrichtung, so trat ebene bez. konische Präzession auf, deren Sinn in bezug auf die Feldrichtung stets *entgegengesetzt* war dem Gyrationssinne bezüglich der positiven Magnetrichtung (vom Südpol zum Nordpol). Nutationen oder ähnliche kleine periodische Abweichungen waren bei keinem der Kreisel dauernd zu beobachten, und zwar weder bei symmetrischer noch bei unsymmetrischer Trägheitsverteilung. Bei Abwesenheit äquatorealer Magnete bez. Komponenten tritt also nur Präzession auf; mithin ist von einer eigentlichen Orientierung keine Rede.

Wurde beim Hartbleikreisel der „Polarmagnet“ als Spindel eingeschraubt, die stärkeren äquatorealen Magnete aber auch an ihrer Stelle belassen, so wurde dadurch die A -Wirkung wenig geändert, solange der Winkel θ ein geringer war. Für größere Abweichungen läßt sich bei queraxialer Magnetrichtung das bezügliche Problem nach ähnlichen Gesichtspunkten behandeln, wie sie in § 16 angedeutet wurden. Bei langsamer Steigerung des Feldes schien der Staudesche Kegel gemäß der Theorie an der Vertikalen entlang zu gleiten, soweit sich dies beurteilen ließ (vgl. l. c., § 37).

§ 25. Das *Superpositionsprinzip* (l. c., §§ 39, 40). Im allgemeinsten Falle konnte schließlich der Polarmagnet gleich anfangs schräg zur Feldrichtung geneigt sein; alsdann superponierte sich die A -Wirkung der Präzession, solange die Gyrationfrequenz eine erhebliche war; dasselbe galt jedenfalls auch für die B -Wirkung, nur ließ sich diese nicht so empfindlich und augenfällig gestalten wie jene erstere.

Ein ähnliches „experimentum crucis“ mit gekreuztem Polarmagnet und Äquatoremagnet — wobei letzterer entzwei geschnitten war — gab beim Nickelinkreisel das gleiche Resultat; in Fig. 1 ist diese gekreuzte Anordnung übrigens abgebildet.

Bei den § 8 beschriebenen Versuchen konnte schließlich unter günstigen Umständen bereits ohne besonderen Polarmagnet konische Präzession beobachtet werden, falls die Spindel anfangs schräg zur Feldrichtung stand. Dieser Fall ist einer strengen theoretischen Behandlung nur noch bei „kleinen“ Bewegungen zugänglich (l. c., § 40, Fig. 3), läßt sich aber wohl folgendermaßen deuten: Die Feldkomponente in der Spindelrichtung, $\mathfrak{S}_A$, erzeugt eine A -Wirkung, die dazu senkrechte Komponente, $\mathfrak{S}_B$, eine B -Wirkung. Sobald erstere nun nicht mehr „klein“ bleibt, entsteht eine merkliche nach der Spindelrichtung orientierte, also „polare“ Komponente, und diese bedingt ihrerseits wieder wie oben die Präzession.

§ 26. Die *feldfreie Poinsoibewegung* ließ sich mittels eines kurzen Stoßes gegen den zuvor in regelmäßiger Gyration befindlichen Kreisel sofort hervorrufen. Beim Hartbleikreisel genügte ein leichter Schlag mittels Holzstäbchens unterhalb der Radwulst¹⁾; erfolgte dieser z. B. vorne, so wich die zuvor raumfeste Richtung des Impulsmoments je nach dem Gyrationssinne nach rechts oder links aus, wobei sie sich augenblicklich von der zuvor mit ihr identischen permanenten Gyrationssachse trennte. Letztere beschrieb daraufhin, nunmehr als Instantanachse, einen Herpolhodenkegel von kleiner endlicher Öffnung um die derart abgeänderte neue Richtung des Impulsmomentes.

Dem Auge zeigen sich die Folgen des Stoßes als ein rasches periodisches Schwanken um die anfänglich regelmäßige Grundbewegung; die Sektorenscheibe zeigt eine Aufeinanderfolge verschiedenfarbiger Zentralflecke ohne Bevorzugung einer der Farben. Die Periode läßt sich theoretisch für den symmetrischen Kreisel ermitteln und beträgt $\tau K_X/K_Z$; einige Beobachtungen schienen hiermit im Einklang zu sein, obwohl die Schwankungsperiode sich schwierig messend verfolgen läßt.

1) Sehr kurz bemessene Stromstöße — entsprechend einem Momentanfelde von etwa 30 Gauss — derart, daß der Kreisel sich während ihrer Dauer nicht merklich drehte, riefen keinen wahrnehmbaren Einfluß hervor.

Jene Formel läßt sich auf verschiedenem Wege herleiten, unter anderem durch direkte Betrachtung der Poinsoischen Bewegung; die Herpolhodiën- und Polhodiënkurve entarten hier bekanntlich zu Kreisen. Für den unsymmetrischen Kreisel bilden sie dagegen in anfänglicher Annäherung kleine Ellipsen; hieraus kann man die Schwankungsperiode mittels elliptischer Integrale zweiter Gattung berechnen. Läßt man nach dem Stoß ein Feld entstehen, bez. ist der Stoß schon im Felde erfolgt, so erscheint auf der Sektorenscheibe die betreffende Farbe bevorzugt sowohl hinsichtlich der Dauer ihrer Sichtbarkeit wie auch in bezug auf die Ausdehnung des Farbfleckes. Infolge der Reibung verlieren sich diese Schwankungen bald. Die anderen Kreisel verhielten sich ganz ähnlich.

§ 27. *Eine Reihe von Stößen*, welche regelmäßig am Rande entlang verteilt sind, vergrößert die Abweichungen der Instantanachse und der Z-Achse (bez. beim symmetrischen Kreisel der Figurachse) durchaus nicht. Das gleiche gilt für eine längere Aufeinanderfolge an willkürlicher Stelle auftretender Stöße, wenn dabei kein Azimut bevorzugt bez. wahrscheinlicher getroffen wird. Das auf der invarianten Ebene abrollende Flächenstück (l. c., § 42) eines Trägheitsellipsoids bez. die Öffnung des Herpolhodienkegels nehmen im großen und ganzen nicht zu. Man beobachtet im Gegenteil bei einer Anzahl von Stößen eine Verringerung, indem sich das Impulsmoment der instantanen Gyrationssachse wieder nähert; mancher zufällig angebrachte Schlag ruft plötzlich wieder fast genau die einfache Gyration hervor. Eine strenge Diskussion der Wahrscheinlichkeit der Stoßwirkung im störenden oder ordnenden Sinne erscheint beim unsymmetrischen Kreisel kaum durchführbar. Auch werden die Reibungs-, oder allgemeiner die auftretenden dissipativen Faktoren bestrebt sein, ein mögliches Übergewicht der störenden über die ordnenden Stöße zu korrigieren und den Kreisel immer der Grundbewegung zuzuführen.

Utrecht, Universität, 23. Februar 1904.

(Eingegangen 25. Februar 1904.)