Die Brennlinien eines unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündels nach schiefer Incidenz eines homocentrischen Strahlenbündels in eine krumme Oberfläche und das Strahlenconoid von Sturm und Kummer.

Eine Replik von

Prof. Ludwig Matthiessen in Rostock.

Hierzu auf Tafel II Fig. 1, 2, 3.

In einem früheren Aufsatze dieses Archivs (Bd. XXIX. Abthl. 1 S. 147—149, 1883) *) über die Form der astigmatischen Bilder sehr kleiner Geraden bei schiefer Strahlenincidenz in eine brechende sphärische Fläche sind zum Hinweis auf die den Theoremen zu Grunde gelegten geometrischen Principien von mir folgende Schlussworte hinzugefügt: „Die Sturm'sche Theorie setzt voraus, dass auch die zweite Brennlinie auf dem Hauptstrahle senkrecht stehe, worin offenbar ein Irrthum enthalten ist, wie schon eine elementare Betrachtung der sogenannten sphärischen Längenabweichung erweist. Dessenungeachtet hat sich die Sturm'sche Theorie, getragen von der Autorität

---

*) Vergl. Revue générale d'ophthalmologie (p. 385—386, 30. Septembre 1883).

verschiedener namhafter Geometer und Physiologen in der modernen ophthalmologischen Litteratur überall festgewurzelt." Herr Dr. Leroy polemisirt in einem Memoire der Revue générale d'ophthalmologie (p. 481—482, 30. November 1883) gegen diese Sätze, indem er ausführt, dass das Theorem von Sturm nicht berührt werde von dem Widerspruche, dass bei der sphärischen Brechung eines dünnen homocentrischen Strahlenbündels die II. Brennlinie mit der Axe des Bündels einen von 90° verschiedenen Winkel (Reusch), dagegen nach dem Sturm'schen Theoreme, welches unter gewissen Beschränkungen mittels Differenzialcalcül hergeleitet sei, mit der Axe einen Winkel von 90° bilde. Leroy fügt hinzu, dass es geboten sei, meine Behauptung, es enthalte die Sturm'sche Theorie einen Fehler, ernstlich zu bekämpfen, da sie möglicherweise in den Anschauungen und Ueberzeugungen der Ophthalmologen eine Verwirrung herbeiführen könne, wenn denselben nicht die analytischen Mittel zu Gebote ständen, meinen „Irrthum" zu durchschauen.

Durch diese Erklärung tritt nunmehr an mich die unabweisbare Forderung heran, mein Urtheil zu begründen. Es würde zu weit führen und den Rahmen überschreiten, innerhalb dessen sich die Mittheilungen und Discussionen in diesem Archive mit Rücksicht auf den Leserkreis zu beschränken haben, wenn ich, wie eine streng wissenschaftliche Theorie des Astigmatismus es doch erfordert, unternehmen wollte, hier eine rein mathematische Deduction zu geben. Es scheint mir dies auch insofern überflüssig zu sein, als dasselbe in mehreren früheren Abhandlungen bereits geschehen ist. *) Vielleicht möchte es mir aber ge-

*) Centralzeitung für Optik und Mechanik No. 24. Leipzig 1882. — Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der Kgl. bayerischen Akad. d. Wiss. 1883, Heft 1. — Zeitschrift f. Math. und Physik. XXIX. Jahrg. Suppl. 1884. — Acta mathematica. Journ. rédigé par G. Mittag-Leffler. cah. 4. II. Stockholm 1884.

lingen, hier in einer auch für Laien verständlichen und anschaulichen Weise zu zeigen, welcher Correction das Sturm'sche Theorem für die Zwecke der physiologischen Optik bedürftig ist und wodurch jener Widerspruch desselben mit dem gewöhnlichen und einfachsten Falle des Astigmatismus allein aus dem Wege geräumt werden kann. Die Forderung einer Erweiterung des Sturm'schen Theorems macht sich immer mehr geltend, wie diejenigen Ophthalmologen zugestehen werden, welche den zahlreichen Arbeiten des letzten Decenniums auf dem Gebiete der Lehre von der astigmatischen Brechung in Linsensystemen und besonders in der continuirlich geschichteten Krystalllinse des Auges mit Aufmerksamkeit gefolgt sind.

Wenn nun augenscheinlich Leroy jenen Widerspruch zugesteht, ihn aber auf Grund des Sturm'schen Theorems für unerheblich hält, so muss ich meinerseits zugestehen, dass das Theorem von Sturm über die Form unendlich dünner astigmatischer Strahlenbündel sich mit Nothwendigkeit aus seinen Voraussetzungen ergiebt. Da aber das Theorem aus geometrischen Gründen eine strengere Behandlung zulässt, so bedarf es einer genauen Prüfung, ob dasselbe bei subtileren Untersuchungen, z. B. über die Einwirkung der Bilder äusserer Objecte auf die lichtempfindlichen Schichten der Retina noch den Ansprüchen genüge; und dies dürfte allerdings streitig sein. Man wird indessen jedenfalls zugestehen müssen, dass, wenn irgend wo in einer Theorie ein Widerspruch sich vorfindet, dieser auf einem Fehler oder mindestens auf einer Ungenauigkeit derselben beruhe.

Es ist ein unbestreitbares Verdienst des grossen Mathematikers um die Theorie des Sehens, dass er, nachdem man früher von der Vorstellung ausgegangen war, dass sich ein leuchtender Punkt auf der Retina punktuell abbilde, die Form des gebrochenen Strahlenbündels in der Weise definirte, dass für jede nicht senkrechte Incidenz dasselbe eine tetraedrische Modification erleide. (Sturmsches Conoid.)*) Diese Figur ist bekannt genug und bedarf also keiner detaillirten Beschreibung.**) Der für die Accommodation und die Periskopie des Auges wichtigste Theil dieses Conoides ist der sogenannte Brennraum und die Brennstrecke, final begrenzt von beiden Brennlinien. Es handelt sich vor allen Dingen um die Lage der letzteren gegen den Axenstrahl. Sturm fand, dass in erster Annäherung die Brennlinien gegen den Axenstrahl senkrecht stehen. Seit vierzig Jahren ist kein Fortschritt in dieser Theorie zu verzeichnen. Es ist wohl begreiflich, dass mit den Fortschritten in der Dioptrik des Auges die Ausbildung der theoretischen Grundlagen und der mathematischen Principien gleichen Schritt halten müsse, und diese beruhen in der Lehre von der Krümmung der Flächen.

Wir gehen aus von dem Malus'schen Satze, dass die gebrochenen Strahlenbündel Normalenbündel der Wellenfläche sind; ihre Form wird also bestimmt durch die Krümmung oder Wölbung eines unendlich kleinen Segments der Wellenfläche. Vergegenwärtigen wir uns die Wellenfläche, welche nach beliebigen vielen Brechungen in einem System ebenso vieler centrirter, sphärischer Flächen entsteht; wenn der leuchtende Punkt in der Centrale liegt, so ist dieselbe eine Rotationsfläche. Nach dem Sturm'schen Theorem ist nun aber die Berührungsfläche eines unendlich kleinen Segmentes der Wellenfläche ein mit der Normale desselben coaxiales elliptisches Paraboloid, welches offenbar keine Rotationsfläche ist, also auch kein hinreichend genaues Maass für die Krümmung des Segmentes abgeben kann. Es muss eine Be-

*) Compt. rend. Paris 1845.

**) Modelle des Sturm'schen Conoides werden neuerdings vom Optiker Apel in Göttingen unter der Bezeichnung Kummer'sches Fadenmodell I. Art geliefert.

rührungsfläche gesucht werden, welche sich genauer an die Wellenfläche anschmiegt, mit andern Worten, das Normalenconoid muss eine andere Gestalt haben und seine Bestimmung soll die Aufgabe unserer Untersuchung sein.

Definition eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Denkt man sich in einem unendlich kleinen Segment einer krummen Oberfläche, welches man sich von einer elliptischen Indicatrix MNM_1N_1 (Fig. 1) begrenzt vorstellen kann, durch ihren Mittelpunkt P die beiden Krümmungslinien NPN_1 und MPM_1 gezogen und in unendlich viele unter sich gleich grosse Abschnitte Pc und und Pg getheilt, ferner in allen diesen Schnittpunkten c und g wiederum die zugehörigen Krümmungslinien ncn_1 und mgm_1 gezogen, so wird das Flächensegment MNM_1N_1 in unendlich viele quadratische Felder P c f g zerlegt. Wenn man sich nun in sämmtlichen Eckpunkten dieser Quadrate Normalen construirt denkt, so bildet ihre Gesammtheit ein unendlich dünnes Strahlenbündel.

Definition eines unendlich dünnen und schmalen Strahlenfächers. Wenn man aus der Gesammtheit jener Strahlenreihen nun zwei aufeinander folgende, d. h. die auf zwei aufeinander folgenden parallelen Krümmungslinien, z. B. NPN_1 und ncn_1 oder MPM_1 und mgm_1 stehenden wählt, so heisst ihre Gesammtheit ein unendlich dünner und schmaler Strahlenfächer.

Folgerung. Wenn also die beiden Hauptnormalschnitte $NPN_1 = 2ds$ und $MPM_1 = 2d\sigma$ unendlich kleine Bogen der I. Ordnung sind, so werden sämmtliche Strahlenfächer aus der Indicatrix Streifen schneiden, deren Länge unendlich klein der I. Ordnung und deren Breite unendlich klein der II. Ordnung ist.

Wir untersuchen zunächst den Verlauf der Normalen oder Strahlen eines Strahlenfächers. Der Durchschnittspunkt der beiden Normalen in P und g sei β, derjenige der beiden Normalen in P und c sei ε; dann sind β und ε

die Krümmungsmittelpunkte der unendlich kleinen Bögen Pg und Pc; ferner $P\beta = \varrho$ und $P\varepsilon = r$ die Krümmungsradien. Wir denken uns durch die I. Krümmungslinie NN_1 und die Normale oder den Axenstrahl $P\beta\varepsilon$ eine Ebene gelegt; dann werden sämmtliche Krümmungsmittelpunkte des Bogens $NPN_1 = 2ds$ auf seiner Evolute $\beta_1\beta\beta_2$ liegen; β_1 ist der Krümmungsmittelpunkt von N, β_2 der von N_1. Dieser Bogen der Evolute ist im Allgemeinen von derselben Ordnung der Kleinheit, wie ds und kann als das Scheitelsegment einer Parabel betrachtet werden, deren Scheitel in β liegt. Die Evolute der I. Krümmungslinie NN_1 liegt auf der I. Krümmungsmittelpunktsfläche; sie hat einen Krümmungshalbmesser $\beta C = R_1$, welcher sich einfach durch den Krümmungsradius ϱ und die Bogendifferenziale ds und $\beta\beta_1 = d\Sigma = d\varrho$ ausdrücken lässt, nämlich $R_1 = \varrho d\varrho : ds$. Wir setzen voraus, dass der I. Hauptschnitt $NN_1P\varepsilon$ in der Ebene der Zeichnung liege; dann liegt auch das Parabelsegment in ihr, ebenso seine Axe $\beta\alpha C$, welche mit der Sehne $\beta_1\alpha\beta_2$ einen rechten Winkel bildet. In der ganzen Ausdehnung des Bogens ds ist nun das Verhältniss $d\varrho : ds$ ein constantes, d. h. $d\varrho = m ds$, folglich auch die Relation der unendlich kleinen Theile $d''\varrho = m d''s$, wenn man das unendlich kleine Stück Pg des Bogens NN_1 mit $d''s$ bezeichnet, welches eine unendlich kleine Grösse der II. Ordnung sein wird. Für alle auf ds stehende Normalen oder Strahlen ist also der Zuwachs $d''\varrho$ von Strahl zu Strahl constant und zwar ein constanter Bogentheil $d''\Sigma$ der Evolute $\beta_1\beta\beta_2$. Sämmtliche Strahlen des Bogens NN_1 gehen nun durch das Axenelement $\beta\gamma$, welches gleich $\beta\alpha$ und somit von der II. Ordnung der Kleinheit ist. In $\beta\gamma$ hat der halbe Strahlenfächer $NN_1\gamma\zeta\delta\beta$ offenbar seinen kleinsten Querschnitt und wenn es sich um die Betrachtung von Lichtstrahlen handelt, die grösste Helligkeit.

Wird nun weiter die Dicke Pc des ganzen Strahlenfächers in P mit $d''\sigma$ bezeichnet, so ist sie in β gleich $\frac{r-\varrho}{r}\, d''\sigma$ und folglich der Querschnitt des ganzen Fächers in β gleich $\beta\gamma \times \frac{r-\varrho}{r}\, d''\sigma$. Da aber $\beta\gamma$ und $d''\sigma$ von einer Kleinheit der II. Ordnung sind, so können wir den Querschnitt als einen Punkt betrachten — es ist der I. Brennpunkt des Strahlenfächers NN_1nn_1.

Wenn es also mit Rücksicht auf den nächsten Zweck unserer Untersuchung sich um die Betrachtung eines optischen, in einer krummen Fläche gebrochenen, ursprünglich homocentrischen Strahlenbündels handelt und die Indicatrix MNM_1N_1 das unendlich kleine und unendlich nahe an der brechenden Fläche gelegene Segment der Malusschen Wellenfläche begrenzt, so liegt der Parabelbogen $\beta_1\beta\beta_2$ auf der sogenannten I. diakaustischen Fläche und diese selbst senkrecht zur Ebene der Zeichnung. Es sind nun die auf dieser diakaustischen Fläche befindlichen parabolischen Evoluten, welche allen übrigen zu MM_1 senkrecht stehenden Strahlenfächern angehören, zur Hälfte vor, zur Hälfte hinter der Ebene der Zeichnung parallel nebeneinander gereiht und zwar entspricht jedem dieser Fächer ein Punkt β, der einem Strahlenpaare cf angehört und ein Punkt γ, in welchem sich jedesmal die beiden äussersten Strahlen $n\zeta$ und $n_1\delta$ schneiden. Diese Punktreihe γ bildet in ihrer Continuität eine schwach gekrümmte Hohlkante, welche wir die I. Strahlenfurche nennen wollen. Diese Strahlenfurche hat eine Länge, welche mit $d\sigma$ von derselben Ordnung der Kleinheit ist, also von der I. Ordnung. Sie umschliesst also mit derjenigen flachen Curve, welche sämmtliche Durchschnittspunkte β der Strahlenpaare cf des Strahlenfächers MM_1mm_1 verbindet, den kleinsten Querschnitt des vollen Strahlenbündels. Dieser Querschnitt ist nunmehr nach dem Vorhergehenden als linear zu betrachten; er bildet die I. Brennlinie.

Dieselbe schmiegt sich ebenso wie der Ort der Punkte β an die II. Hauptnormalebene $MM_1\beta$ unendlich nahe an und kann ebenfalls als der Scheitelbogen einer Parabel betrachtet werden. Ob aber diese Brennlinie oder die I. Strahlenfurche senkrecht zum Hauptstrahle $P\beta$, oder mit andern Worten: senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehe, ergiebt sich daraus nicht ohne Weiteres, sondern bedarf einer genaueren Untersuchung. Diese Untersuchung, auf deren Ergebniss es uns hauptsächlich ankommt, wird wesentlich vereinfacht, wenn wir uns der Betrachtung der Oerter der Durchschnittspunkte ε zuwenden, welche den Strahlenpaaren fg des Strahlenfächers NN_1nn_1 angehören. Diese Curve schmiegt sich ebenfalls unendlich nahe an die I. Hauptnormalebene $NN_1\varepsilon$ an, tangirt also in ε die Ebene der Zeichnung. Der Durchschnittspunkt des Strahlenpaares Pc ist ε; derselbe ist der II. Brennpunkt des Strahlenfächers MM_1mm_1. Wenn nun die Krümmungsradien r der Bögen fg beim Uebergange von P nach N oder N_1 constant wären, d. h. $dr = 0$, so würde der Ort der Krümmungsmittelpunkte resp. in ε, ζ_1 und δ_1 und zwar in einer zum Axenstrahle senkrechten Linie $\zeta_1\delta_1$ liegen, ein Resultat, zu welchem das Sturm'sche Approximativ-Verfahren führt. Dies ist aber durchaus nicht der Fall, da das Verhältniss $\frac{dr}{ds}$ im Allgemeinen endlich und für einen unendlich kleinen Bogen ds constant ist, wie ich früher nachgewiesen habe*) und was auch kein Mathematiker bestreiten wird. Ist also $\eta\varepsilon = \zeta\zeta_1 = dr$, so ist dr proportional ds und der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist $\zeta\varepsilon\delta$, ein sehr flacher Parabelbogen, welcher auf der II. diakaustischen Fläche liegt, während diese die Ebene der Zeichnung tangirt. Es ist demnach $\zeta\varepsilon\delta$ eine Linie, welche einen von 0^0 und 90^0 verschiedenen Winkel ω

*) Münchener Berichte l. c. S. 45—47.

mit dem Hauptstrahle bildet. Da aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke folgt:

$$\zeta\eta : PN = (r-\varrho) : \varrho,$$

so folgt:

$$\frac{\zeta\eta}{dr} = \tan\omega = \frac{r-\varrho}{\varrho} \cdot \frac{ds}{dr}.$$

Bezeichnet man $\varepsilon\zeta = \varepsilon\delta$ mit d a, so ist noch d r = d a. cos ω und

$$da = \frac{r-\varrho}{\varrho \sin\omega} ds.$$

Da die Linie $\zeta\delta$ in jeder Beziehung dem Orte der Punkte β entspricht, so liegt die zu sämmtlichen dem I. Hauptschnitte parallelen Strahlenfächern zugehörige II. Strahlenfurche in einem senkrecht zur Ebene der Zeichnung durch $\zeta\delta$ geführten Ebenenschnitte in Abständen, deren Dimensionen gleichfalls von der II. Ordnung der Kleinheit sind. Demnach hat in diesem Ebenenschnitte das ganze Strahlenbündel einen zweiten kleinsten Querschnitt; d. h. $\zeta\delta$ ist die II. Brennlinie desselben.

Auf analoge Weise findet man für den Winkel ω_1, welchen die I. Brennlinie mit dem Hauptstrahle bildet und für die halbe Länge derselben die Werthe

$$\tan\omega_1 = \frac{r-\varrho}{r} \cdot \frac{d\sigma}{d\varrho},\quad da_1 = \frac{r-\varrho}{r\sin\omega_1} d\sigma.$$

Es leuchtet nun ein, dass für praktisch-dioptrische Verhältnisse die Strahlenbündel zwar sehr dünn genommen werden können, jedoch immer eine endliche Dicke behalten. In Folge dessen hebt sich die Strahlenfurche auch auf endliche Entfernungen von der diakaustischen Fläche ab, ihr Abstand bleibt zwar hinter den Dimensionen der Brennlinien der beiden Hauptstrahlenfächer zurück, aber die Strahlenfurche wird zugleich schärfer und das Strahlenbündel verdickt sich zu beiden Seiten derselben in steigender Proportion, so dass es nicht gestattet sein wird, für die beiden optischen Brennlinien zwei beliebige durch die Brennpunkte β und ϵ geführte Querschnitte z. B. senkrechte anzunehmen.

Die von uns hier abgeleitete Theorie der Brennlinien ist die allgemeinere und schliesst auch die der Rotationsflächen ein, wogegen die Sturm'sche Theorie bei der sphärischen Brechung für die II. Brennlinie eine Ausnahme statuiren oder den Begriff der Brennlinie nothwendig ändern muss. Nach der Sturm'schen Theorie muss bei der sphärischen Brechung nach schiefer Incidenz die II. Brennlinie ebenfalls senkrecht zum Strahle bleiben, während doch nicht in Abrede gestellt wird, dass sie sogar bei endlich dicken Strahlenbündeln mit der Centrale des leuchtenden Punktes coincidire.

Aus allen diesen Gründen tritt die unabweisliche Forderung an die physiologische Optik heran, den Begriff der Brennlinien genauer zu definiren und darüber zu entscheiden, ob sie bedeuten sollen entweder die kleinsten Querschnitte oder etwas anderes undefinirbares.

Sollte Herr Leroy die Behauptung aufstellen, dass der durch die Strahlenfurche gelegte Normalschnitt des Strahlenbündels nicht einer der beiden kleinsten Querschnitte desselben sei, so muss ich es ihm überlassen, den Gegenbeweis zu führen. In dem einfachsten Falle der Brechung in einer sphärischen Fläche wird ihm dies unmöglich sein, da in der II. Brennlinie die Strahlenfurche mit der diakaustischen Fläche coincidirt, diese aber in eine Gerade degenerirt.

Wir wollen aber noch einen Schritt weiter gehen und einen Strahlenfächer NN_1nn_1 (Fig. 2) betrachten, der zwar unendlich dünn von der I. Ordnung ist, aber eine endliche Breite s besitzt. Es sei also aus der Wellenfläche parallel mit einer Krümmungslinie ein Streifen herausgenommen von der Dicke $d\sigma$ und der Breite s. Die I. diakaustische Curve sei $\beta_1\beta_2$, die II. ai. Wir zerlegen den Ausschnitt der Wellenfläche in unendlich viele Streifen von der

Breite ds und der Länge $d\sigma$. In diesem Falle werden die beiden äussersten Punktepaare Nn und N_1n_1 in Abständen von der II. diakaustischen Curve ai liegen, welche um endliche Grössen von einander differiren. Da die II. Strahlenfurche von der Curve ai in Abständen liegt, welche Grössen von der II. Ordnung der Kleinheit nicht überschreiten, so ist ai die II. Brennlinie und zwar eine Raumcurve von endlicher Länge. Sie setzt sich aus den partiellen Brennlinien ab, bc, cd u. s. w. zusammen, welche im Allgemeinen keinen der Strahlen unter einem rechten Winkel schneiden, so dass der Winkel ω variabel ist, weil r, ϱ und ihre Differenziale variabel sind. Nach der Sturmschen Theorie sind nun aber $\alpha_1\beta$, $\beta_1\gamma$, $\gamma_1\delta$ u. s. w. die partiellen Brennlinien, wodurch ihre Continuität verloren geht, die doch sichtlich vorhanden ist. Da der Strahlenfächer windschief ist, so degenerirt die I. Brennlinie, wiewohl der Fächer zwischen β_1 und β_2 einen kleinsten Querschnitt hat. Die II. Brennlinie dagegen ist thatsächlich vorhanden. Hier verliert die Sturm'sche Theorie den Boden, da die Bedingungen ihrer Voraussetzungen fehlen.

Zum nachdrücklichen Hinweise auf das Bedürfniss, ich möchte sagen die Nothwendigkeit, die wahre Form und Umhüllungsfläche unendlich dünner — astigmatisch gebrochener Strahlenbündel mathematisch zu untersuchen und die Brennlinien zu definiren, sowie auf die unzureichende Genauigkeit und die Unzulässigkeit der bedingungslosen Anwendung des Sturm'schen Conoides oder Kummer'schen Strahlenmodelles auf Anschauungen, welche wir uns von den entsprechenden dioptrischen und katoptrischen Vorgängen zu bilden haben, möchte ich schliesslich die Aufmerksamkeit der Physiologen auf eine vor Kurzem im II. Hefte des Borchardt'schen Journals für reine und angewandte Mathematik (1884) von Dr. Böklen publicirte Abhandlung, betitelt: „Ueber die Krümmung der Flächen" hinlenken. Während Sturm unter alleiniger

Berücksichtigung der I. und II. Differenzialquotienten*) der Flächenordinaten sein Normalenconoid als Norm des Krümmungsmaasses einer Fläche aufstellt, und somit zur Charakteristik der Krümmungen oder Wölbungen sein Conoid identificirt mit dem Normalenbündel des mit der Normale des Flächenpunkts coaxialen in II. Ordnung osculirenden elliptischen Paraboloides, sieht Böklen die Hinzuziehung der III. Differenzialquotienten als geboten an. Er setzt deshalb an die Stelle der Centralflächen der Malus'schen Wellenfläche diejenigen eines dieselbe in III. Ordnung osculirenden Ellipsoides. Da nun solcher unendlich viele möglich sind, so proponirt er zur Bestimmung desselben zwei Mittel und Wege, welche er zugleich analytisch illustrirt und wählt dazu

1. die sogenannten Polstrecken R und P, d. h. die II. Krümmungsradien der beiden Hauptkrümmungslinien projicirt auf die Tangentialebene des Flächenelementes;

oder

2. die beiden Krümmungsradien R_1 und P_1 der Evoluten der beiden Hauptkrümmungslinien.

Sind also r und ϱ die Hauptkrümmungsradien des osculirten Punktes, so sind Bestimmungsstücke des osculirenden Ellipsoides

$$\text{entweder} \quad r, \quad \varrho, \quad R, \quad P,$$
$$\text{oder} \quad r, \quad \varrho, \quad \frac{\varrho d\varrho}{ds}, \quad \frac{r dr}{d\sigma}.$$

Das Princip von Böklen unterscheidet sich von dem von mir bereits 1882 angenommenen nur insofern, als ich zu Bestimmungsstücken des osculirenden Ellipsoides für die

*) Den von Hrn. Leroy schlechthin gebrauchten Ausdruck „Si l'on néglige des infiniment petits du second ordre" halte ich nicht für zutreffend. Wohin das führen kann, wenn man unendlich kleine Grössen II. O. gegen solche I. O. vernachlässigt, habe ich gezeigt in meiner Abhandlung in Acta mathem. l. c. S. 183.

genauesten und bei der graphischen Dioptrik besonders in Betracht kommenden Fälle die Elemente

$$r,\ \varrho,\ \frac{dr}{ds},\ \frac{d\varrho}{d\sigma},$$

wo $d\varsigma$ und $d\sigma$ die Differenziale der Hauptkrümmungslinien des Flächenpunktes bezeichnen. Die Werthe der beiden Differenzialquotienten sind

$$\frac{dr}{ds} = \frac{r-\varrho}{\varrho} \cot\ \omega,\ \frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{r-\varrho}{r} \cot\ \omega_1.$$

Um die Anwendung dieser Functionen zur Bestimmung des osculirenden Ellipsoides zu illustriren, verweilen wir noch einen Augenblick bei der Betrachtung des Strahlenconoides bei der Brechung in einer sphärischen Fläche. In diesem concreten Falle ist die Malus'sche Fläche eines beliebigen, auch endlich dicken, ursprünglich homocentrischen Strahlenbündels eine Rotationsfläche. Es wird also in irgend einem Wellenflächenelemente sich eine Rotationsfläche an die Wellenfläche genauer anschmiegen als das osculirende elliptische Paraboloid. Es lassen sich nun die mit sämmtlichen aufeinander folgenden äquidistanten Wellenflächen coaxialen Rotationsellipsoide leicht bestimmen.

Es sei N_2B_2 (Fig. 3), also ein Theil des gebrochenen Strahles OB_2 die Normale des elliptischen Quadranten AN_2D und der I. Brennpunkt B_1 ein Punkt seiner Evolute. Denken wir uns diesen Quadranten um seine kürzeste Halbaxe AF oder die Centrale der brechenden Fläche um den unendlich kleinen sphärischen Winkel MSM_1 gedreht, so beschreibt die kleine Normale MN die Basis des gebrochenen Strahlenbündels ein Wellenflächenelement und das elliptische Bogenelement M_2N_2 ein kleines Element einer der äquidistanten Wellenflächen. Der Punkt B_1 beschreibt die I. Brennlinie $B_1B_1 = da_1$ und $B_2B_2 = da$ ist II. Brennlinie; das astigmatische Strahlenbündel wird ein Normalenconoid des Rotationsellipsoides. Wir sind nun im Stande, die Halbaxen $DF = b$, $AF = a$ desselben aus den gegebenen Verhältnissen zu bestimmen. Die Gleichung der brechenden Kugelfläche sei

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

und wenn man den Abstand CF der Centra der beiden Flächen mit e bezeichnet, die Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Für eine gegebene Objectweite PS und Amplitude SPO $= \vartheta$ des einfallenden Strahles PO sind r, ϱ und ω bestimmbare, bekannte Grössen. Betrachten wir der Einfachheit wegen die Wellenlinie und Brennfläche des Axenschnittes, so sind z und ζ gleich Null, und es existiren folgende realisirbare Gleichungen, worin t den beliebigen, gegenseitigen Abstand der Wellenlinien MN und $M_2 N_2 = ds_1$ bedeutet:

I. $\varrho - t = f\,(y,\ a,\ b,\ e)$,

II. $r - t = \varphi\,(y,\ a,\ b,\ e) = y : \sin\omega$,

III. $r - \varrho = \psi\,(y,\ a,\ b,\ e)$,

IV. $\cot\omega = \frac{\varrho}{r-\varrho} \cdot \frac{dr}{ds} = \frac{\varrho - t}{r - \varrho} \cdot \frac{dr}{ds_1} = F\,(y,\ a,\ b,\ e)$.

Aus diesen Gleichungen lassen sich a, b und e finden, wobei t eine willkürliche Grösse bleibt und y sich aus II. ergiebt. Hierdurch sind Grösse und Lage der osculirenden Rotationsellipsoide für alle Wellenflächen des gebrochenen Strahlenbündels bestimmt. Sie können innerhalb des Brennraumes $B_1\,B_1\,B_2\,B_2$ auch in Hyperboloide übergehen.*)

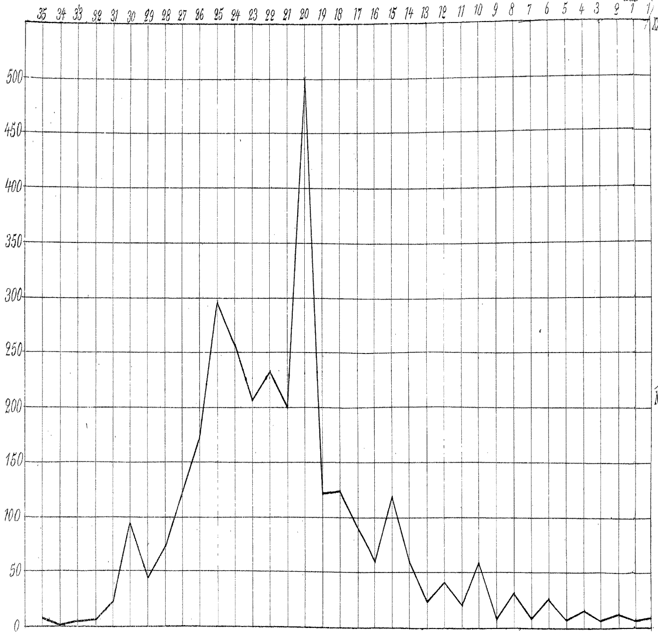
Rostock, 25. März 1884.

---

*) Man vergleiche auch: Hay, Ueber die analytische Bedeutung etc. Arch. f. Augen- u. Ohrenh. VI. 1877. S. 48.

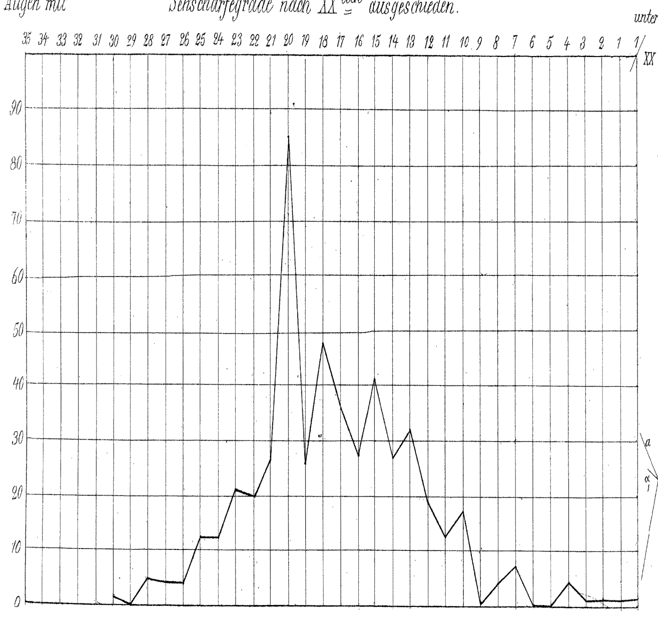
Schema I.

Augen mit Sehscharfegrade nach XX^{teln} ausgeschieden



Schema II.

Augen mit Sehscharfegrade nach XX^{teln} ausgeschieden.



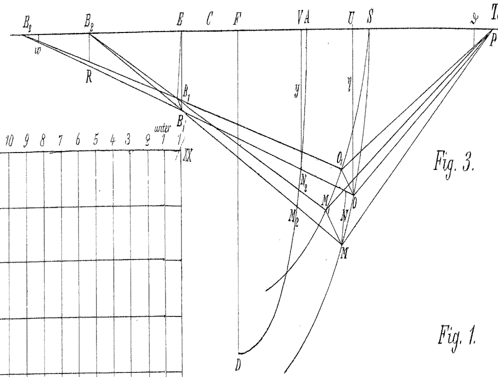


Fig. 3.

Fig. 1.

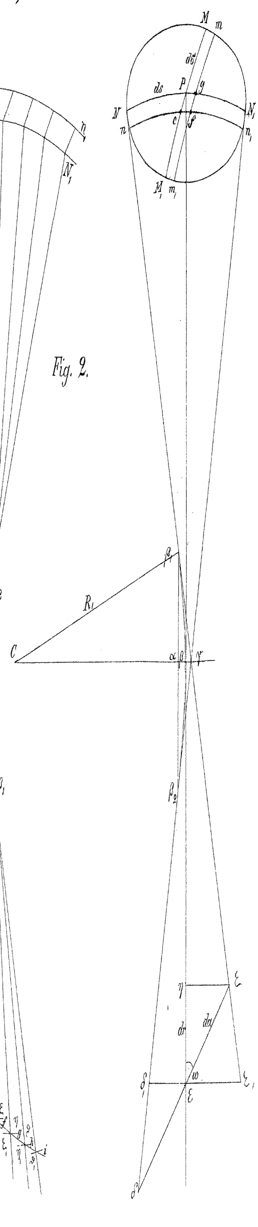


Fig. 2.