$$\text{II) } 10,6 (\text{Mm. } \ddot{\text{Cu}} \ddot{\text{S}} \text{H}_3 \text{N VII 4}) + 4,18 (\text{Mm. } \ddot{\text{Co}} \ddot{\text{S}} \text{II } b) \\ + 18,78 (\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3, \bar{\text{A}}, \text{VIII } i) = 0,$$

durch deren Combination:

$$\text{III) } 18,78 (\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3, \bar{\text{A}}, \text{VIII } i) \\ = 10,4 \left(\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3 \times \frac{a+b}{2} \right)^{1)} + 3,2 (\text{Mm. } \ddot{\text{Co}} \ddot{\text{S}} \text{II } b).$$

B.

$$\text{I) } 10,6 (\text{Mm. } \ddot{\text{Cu}} \ddot{\text{S}} \text{H}_3 \text{N VII 4}) + 7,37 (\text{Mm. } \ddot{\text{Co}} \ddot{\text{S}} \text{II } b) \\ + 10,4 \left(\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3 \times \frac{a+b}{2} \right)^{1)} = 0, \text{ und}$$

$$\text{II) } 10,6 (\text{Mm. } \ddot{\text{Cu}} \ddot{\text{S}} \text{H}_3 \text{N VII 4}) + 5,85 (\text{Mm. } \ddot{\text{Co}} \ddot{\text{S}} \text{II } b) \\ + 5,02 (\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3, \bar{\text{A}}, \text{VIII } h) = 0,$$

durch deren Combination:

$$\text{III) } 5,02 (\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3, \bar{\text{A}}, \text{VIII } h) \\ = 10,4 \left(\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3 \times \frac{a+b}{2} \right)^{1)} + 1,52 (\text{Mm. } \ddot{\text{Co}} \ddot{\text{S}} \text{II } b).$$

Wird die letzte Gleichung (B III) abgezogen von obiger A III, so entsteht

$$\text{IV) } 18,78 (\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3, \bar{\text{A}}, \text{VIII } i) \\ = 5,02 (\text{Mm. } \text{Fe}_2 \text{Cl}_3, \bar{\text{A}}, \text{VIII } h) + 1,68 (\text{Mm. } \ddot{\text{Co}} \ddot{\text{S}} \text{II } b).$$

(Schluß im nächsten Heft.)

IX. Beiträge zur Kenntnifs des Stabmagnetismus; von Dr. Heinrich Schneebeli.

Ein großer Fortschritt in der Kenntnifs der magnetischen Kräfte und ihrer Wirkungen geschah durch das von Gauss aufgestellte Gesetz über die ideale Vertheilung des magnetischen Fluidums, welches dahin lautet, daß die Wir-

1) Nach den S. 130 mitgetheilten Beziehungen zwischen den verschiedenen

X-Lösungen sind $10,4 \text{ Mm. } \times \frac{a+b}{2}$ gleich $10,3 \text{ Mm. } \times \frac{b+e}{2}$.

kung magnetischer Körper auf andere Körper so beschaffen ist, daß man sich dieselbe erklären kann aus der Annahme einer Anhäufung der magnetischen Massentheilchen auf der *Oberfläche* des magnetischen Körpers. Für die Wirkungsweise magnetischer Körper ist es nach Feststellung dieses Gesetzes vollkommen gleichgültig, wie man sich die innere Ursache des Magnetismus denkt, ob man entweder zwei magnetische Fluida annimmt, welche in den Moleculen geschieden sind, oder ob man sich jedes Molecul von einem elektrischen Strome umflossen denkt ¹⁾).

Die GröÙe der Anziehungs- oder Abstofungskraft, welche zwei magnetische Massentheilchen μ_1 und μ_2 im Abstände r auf einander ausüben, ist wie bekannt:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}.$$

Wir können aus dieser Formel sofort zu einer Maafseinheit des magnetischen Fluidums gelangen; es ergibt dieselbe nämlich folgende Definition:

Wir betrachten diejenige Quantität des magnetischen Fluidums als Einheit, welche auf eine ihr gleiche Quantität, die sich in der Entfernung Eins befindet, die Einheit der Kraft ausübt.

Auf diese Weise haben wir nun freilich eine Maafseinheit für magnetische Fluida gewonnen, die aber für praktische Zwecke von keinem Nutzen ist. Es gelingt nun auf andere Weise, eine allgemeine Maafseinheit und damit auch ein allgemein anwendbares Messungsverfahren für magnetische Kräfte zu erhalten. Einen magnetischen Körper stellen wir uns nach dem Gesetze, das wir im Anfange erwähnt haben, so vor, daß wir uns eine Hälfte desselben mit Nordmagnetismus, die andere Hälfte mit Südmagnetismus bedeckt denken. Wir wollen uns hiebei an einen bestimmten Fall halten, nämlich an unsere Erde. Betrachten wir die Neigung einer Inclinationsnadel an verschiedenen Punkten der Erde, so finden wir dieselbe an zwei Punkten der Erde zu 90° . Man nennt diese

1) Ueber diese Hypothesen und deren Berechtigung vergleiche Wilhelm Weber: Diamagnetismus S. 557 — 574.

beiden ausgezeichneten Punkte die *magnetischen Pole* der Erde. Dieselbe Definition kann man nun auch z. B. auf Stahlmagnete übertragen und also diejenigen Punkte des *Magnetes Pole* nennen, in welchen die Resultirende aller Elementarkräfte senkrecht zu der Längsrichtung des Stabes steht.

Wesentlich anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn wir die Wirkung eines *Magnetes* auf einen sehr entfernten Punkt oder umgekehrt bestimmen. Wir dürfen alsdann die von den einzelnen magnetischen Massentheilchen auf den Punkt ausgeübten Kräfte als parallel betrachten und die unendlich vielen Elementarkräfte, die von der einen Hälfte des Magnets auf den Punkt ausgeübt werden, analog den gravitirenden Massen, summirt und in einen einzigen Punkt des Magnets verlegt denken und den Punkt so wählen, daß die Wirkung der Gesamtkraft in diesem Punkte dieselbe ist, wie diejenige der Elementarkräfte in den verschiedenen Punkten des Körpers. Ganz analog den gravitirenden Massen können wir auch hier den Punkt, in den wir die Gesamtkraft verlegen müssen, *Schwerpunkt* nennen; auch diesen Punkt belegt man aber mit dem Namen *magnetischer Pol* des Körpers. Es würde also bei dieser Auffassung des Namens Pol die Definition für dieselben so lauten: *Die Pole eines Magnets sind diejenigen zwei Punkte, in denen man sich die magnetischen Massentheilchen concentrirt denken kann, ohne an der Wirkung des Magnets auf einen sehr entfernten Punkt etwas zu ändern, oder ganz kurz:*

Pole eines Magnetes nennt man die Schwerpunkte des freien Nord- oder Südmagnetismus.

Je nachdem wir also die Wirkung eines Magnets auf einen Punkt seiner Oberfläche oder aber auf einen sehr entfernten Punkt betrachten, erhalten wir zwei verschiedene Punkte, die wir mit dem Namen Pol belegen.

Für den Erdmagnet werden wir die erste Definition annehmen, während wir im Folgenden für die künstlichen Magnete die zweite Definition beibehalten. Von den künst-

lichen Magneten wollen wir im Folgenden nur die Stabmagnete betrachten, was hier schon ein- für allemal erwähnt werden soll.

Bezeichnen wir alsdann die Menge des freien Nord- und Südmagnetismus, von denen auf demselben Körper immer gleiche Mengen vorhanden sind, mit μ , ferner den Abstand der Magnetpole von einander mit $2l$, so nennt man das Produkt:

$$M = 2l\mu$$

nach Gauss das *magnetische Moment* des Magnetes.

Haben wir nun nach später zu erläuternden Methoden das magnetische Moment und den Abstand der Magnetpole des zu untersuchenden Magnetes bestimmt, so können wir für denselben sofort die Menge des freien Magnetismus berechnen. Es hat indessen, wie schon erwähnt, diese GröÙe für magnetische Bestimmungen keine Bedeutung, während das magnetische Moment die Wirkung des Magnetes, wenigstens auf entfernte Punkte, vollkommen definirt. Man giebt daher für irgend einen Magnet nur sein magnetisches Moment an und vergleicht die verschiedenen Magnete nach ihren Momenten, eine Vergleichung, die sehr genau und rasch ausgeführt werden kann. Das magnetische Moment Eins bezeichnet man nach Gauss mit dem Namen *absolute Einheit* des Stabmagnetismus. Gauss hat bei den Bestimmungen des magnetischen Moments als Längeneinheit das Millimeter festgesetzt; diese Annahme hat freilich den Nachtheil, daß bei selbst noch kleinen Magneten die Zahl, welche das magnetische Moment angiebt oder also die Zahl der absoluten Einheiten un bequem groß wird. Man kann aber diese Zahl der Uebersichtlichkeit und auch des Vergleichs wegen auf Milligramme reduciren, d. h. das Moment des Magnets durch sein Gewicht (in Milligramm ausgedrückt) dividiren und erhält so die Zahl der absoluten Einheiten, die auf ein Milligramm des Magnetes fallen, eine Zahl, welche dann leichte Uebersicht gewährt.

Hat dann z. B. der Magnet A n Einheiten per Milligrm.,
 der Magnet B n^1 Einheiten per Milligrm.,
 so kann man sagen: Der specifische Magnetismus der
 beiden Magnete verhalte sich wie $n:n^1$. Die Fruchtbarkeit
 dieses Messungsverfahrens erhellt am besten aus folgenden
 Consequenzen, die bezüglich der Kraftmessung aus dem-
 selben gezogen worden sind. Nämlich:

Wir setzen diejenige magnetische Kraft gleich Eins,
 welche auf einen um seinen Mittelpunkt (Mitte zwischen
 den beiden Polen) drehbaren Magnet vom magnetischen
 Moment Eins das Drehungsmoment Eins (in Millimeter
 und Milligramm) ausübt.

Die so definirte Krafteinheit nennt man die *absolute magnetische Krafteinheit*, welche also in allgemeinem mechanischem Grundmaasse ausgedrückt ist.

Es ist evident, daß wir durch diese Definition zu gleicher Zeit auch ein Maass für galvanische Kräfte ¹⁾ nach mechanischem Grundmaasse gewonnen haben, da wir ja die magnetischen Wirkungen galvanischer Ströme stets hervorbringen können durch ideale Magnete.

Das magnetische Moment giebt also ein Maass für die Intensität, mit welcher ein Magnet auf entfernte Punkte wirkt. Wir werden uns in Folgendem nicht nur auf die Bestimmung des Momentes beschränken, sondern auch den einen seiner beiden Factoren, der für practische Fälle von großer Bedeutung ist, nämlich den Abstand der Magnetpole, einer besonderen Untersuchung unterwerfen; wir begränzen indeß unsere Bestimmungen auf die *permanenten* Stabmagnete, für welche wenig sichere Angaben vorliegen. Es ist also der Zweck der vorliegenden Arbeit, einen Beitrag zur Kenntniß dieser beiden Größen zu liefern, sowie eine Anwendung davon zu practischen Zwecken anzugeben als Beispiel für die practische Wichtigkeit einer ausgedehnten Untersuchung in dieser Hinsicht.

1) Ueber Grundmaasse und die daraus abgeleiteten absoluten Maasse vergl. W. Weber, Elektrodynamische Maassbestimmungen. S. 218.

§. 1. Messung des freien Magnetismus auf einigen Stahlmagneten nach absolutem Maafse.

Messungen über den Magnetismus permanenter Stabmagnete nach absolutem Maafse liegen sehr wenige vor; eine systematische Durchführung solcher Bestimmungen ist überhaupt nie versucht worden.

W. Weber ¹⁾ giebt für sehr starke Stahlmagnete die Zahl der absoluten Einheiten per Milligramm zu 400 an, eine Zahl, welche bis jetzt meistens als das Maximum des erreichten Magnetismus angesehen wird und als solche in allen Lehrbüchern zu treffen ist. In neuester Zeit berichtete Waltenhofen ²⁾ über Versuche mit permanenten Stabmagneten, nach denen es ihm gelungen ist, dünnere Stahlstäbe bis auf die Stärke von 470 Einheiten pr. Milligr. zu bringen.

Diese Zahlen für das magnetische Moment permanenter Stahlmagnete werden aber weit übertroffen von denjenigen für das temporäre Moment von kräftigen Elektromagneten. So erhielt z. B. Weber ³⁾ folgende Werthe für das temporäre Moment weicher Eisenkerne unter dem Einflusse magnetisirender Kräfte, die in absolutem Maafse ausgedrückt sind:

No.	Magnetisirende Kraft	Magnetisches Moment per Milligramm
1	658,9	911,1
2	1381,5	1424,0
3	1792,0	1547,9
4	2151,0	1627,3
5	2432,8	1680,7
6	2757,0	1722,7
7	3090,0	1767,3.

Es hat nun Neumann ⁴⁾ einen Ausdruck aufgestellt für das entstehende magnetische Moment eines Rotations-

1) W. Weber, Resultate des magnet. Vereins 1840, S. 89.

2) A. v. Waltenhofen-Pogg. Bd. 142 S. 263. (In No. 2 pro 1871.)

3) W. Weber, Elektrodynam. Maafsbestimmungen S. 573.

4) Neumann Crelle's Journal Bd. 26.

ellipsoids unter der Einwirkung einer Scheidungskraft P , der lautet:

$$u = \frac{k P}{1 + q S k}$$

worin bedeuten:

μ das magnetische Moment per Milligramm,
 S einen vom Axenverhältniß abhängigen Factor,
 q die Dichte
 k eine Constante } der betreffenden Eisen- oder Stahlorte.

Nach den Versuchen von Weber¹⁾ ergibt sich aber k abhängig von der Größe der Scheidungskraft, und es wird nach seiner Theorie der drehbaren Molecularmagnete, wenn wir mit m das Maximalmoment, d. h. das Moment, das unter der Einwirkung einer unendlich großen Kraft entstehen würde, bezeichnen:

$$k = m \frac{F(P)}{P} \text{ daher } \mu = m \frac{F(P)}{1 + q S m \frac{F(P)}{P}}$$

in welcher Formel für $P = \infty$; $F(P) = 1$ wird.

Die vorstehende Tabelle wird nun am genauesten durch diese Formel wiedergegeben, wenn wir

$$m = 2324,68$$

setzen, d. h. man findet nach derselben die Gränze der Magnetisirbarkeit des Eisens zu etwa 2325 Einheiten per Milligramm.

Die von Weber beobachtete Tabelle benutzte später Lamont²⁾ zu einer Prüfung seiner Formel, die er unter der Voraussetzung ableitet, daß die Zunahme des magnetischen Momentes bei wachsender Stromintensität proportional sey der Differenz M des vorhandenen μ und dem Maximum m des zu erreichenden Magnetismus, und welche lautet:

$$\mu = m \left\{ 1 - e^{-k i} \right\}.$$

1) W. Weber, Elektrodynam. Maafsbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. S. 573.

2) Lamont, Magnetismus (Bd 15 der Encycl.) S. 47.

Es ergibt sich aus der vorstehenden Tabelle nach dieser Formel:

$$m = 1808,2 \text{ Einheiten per Milligramm.}$$

Vermittelst einer andern Formel erhält Waltenhofen¹⁾ die Gränze der Magnetisirbarkeit des Eisens, indem er sämtliche vorhandene Beobachtungen über den Zusammenhang zwischen Stromstärke und inducirtem Magnetismus zu deren Bestimmung benutzt:

$$m = 2125 \text{ absolute Einheiten per Milligramm.}$$

Die beim Eisen berechneten Maximalwerthe des Magnetismus sind sämtlich beinahe fünfmal gröfser, als die beim Stahl als solche bezeichneten Werthe.

Zufällig wurde nun in unserm Laboratorium eine gewöhnliche magnetische Nähnadel auf ihren specifischen Magnetismus geprüft und dabei ein so grofser Werth gefunden, dafs es geboten war, die Sache weiter zu verfolgen.

Wir werden im folgenden Paragraphen eine Formel ableiten, aus der sich das magnetische Moment von Magneten bestimmen läfst. Es lautet dieselbe, wenn wir von Gliedern höherer Ordnung absehen:

$$M = \frac{\frac{1}{2} r^3 T \operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \frac{\lambda^2}{r^2}}.$$

Hierin bedeuten:

T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus an dem Orte, wo die Versuche ausgeführt werden; φ den Ablenkungswinkel einer Magnetnadel, der hervorgebracht wird durch den zu untersuchenden Magnet, der sich in der Entfernung r östlich oder westlich von derselben horizontal von Osten nach Westen hingelegt befindet, und endlich

λ den Abstand der Magnetpole des Magnetes, den wir zu 0,85 seiner Länge annehmen.

Die horizontale Intensität des Erdmagnetismus in Zürich

1) Waltenhofen, Pogg. Ann. Bd. 137 S. 517.

rich (in einem Zimmer des ersten Stockwerkes des eidg. Polytechnicums) bestimmte Hr. Prof. Kohlrausch mittelst seines compensirten Magnetometers¹⁾ zu 1,9781. Durch Vergleichung hiermit mittelst desselben Instruments fand ich für den Ort der folgenden Beobachtungen die Intensität = 1,9735.

Eine große Magnetnadel, die wir später zu den Bestimmungen über Polabstand benutzen werden, wurde auch auf ihr magnetisches Moment geprüft. Wie aus den S. 158 mitgetheilten Zahlen hervorgeht, ergibt sich aus den beiden Ablenkungen

94,7 bei einer Entfernung des Magnets von 500 Mm.

187,9 " " " " " " 400 "

der Entfernung der Scale vom Spiegel 2010 Mm. und dem Gewichte von 3260 Milligramm *das magnetische Moment zu 855 Einheiten per Milligramm*, also mehr als das Doppelte des gewöhnlich als Maximum des permanenten Magnetismus bezeichneten.

Es wurden ferner 5 englische Nähnadeln, wie man sie gewöhnlich kauft, durch Streichen an einem Lamellenmagnet magnetisirt und untersucht. Die Resultate sind:

Nadel	Länge	Gewicht	Absolute Einheit per Milligrm.
1	25,5 Mm.	0,060 Grm.	750
2	35,5 „	0,0585 „	710
3	66,5 „	0,601 „	850
4	38,7 „	0,174 „	680
5	44,5 „	0,207 „	720.

	Länge	Durchmesser	Gewicht
1. Nadel:	210 Mm.	1,75 Mm.	4195 Milligrm.
2. „	198 „	0,83 „	1055 „

ergaben:

1. Nadel: 4082000 Einh. oder 975 per Milligrm.

2. „ 1121000 „ „ 1060 „ „

Mit der dünnen Nadel hat man also schon die Hälfte des oben angegebenen Maximums des temporären Magnetismus erreicht. Es wurde nun noch folgender Versuch angestellt: die Nadel 1 wurde in der Mitte entzwei gebrochen und das magnetische Moment beider Hälften bestimmt:

Die erste Hälfte ergab: 1578000 Einheiten.

„ zweite „ „ 1565000 „

Im Ganzen: 3143000.

Es wurden nun beide Hälften noch einmal neu magnetisirt, um sie wieder auf das Maximum zu bringen, da vielleicht durch Erschütterungen beim Brechen ihr Magnetismus sehr geschwächt worden.

Die Summe blieb dennoch kleiner, als der Magnetismus der ganzen Nadel war, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht:

1. Hälfte ergab: 1634000 absolute Einheiten.

2. „ „ 1625000 „ „

Zusammen: 3259000.

Die zweite, dünnere Nadel wurde ganz denselben Manipulationen unterworfen; hingegen ergaben ihre beiden Hälften, als man sie wieder neu magnetisirt hatte, beinahe genau wieder denselben Werth wie die ganze Nadel:

1. Hälfte 574000 Einheiten

2. „ 563000 „

Zusammen: 1137000.

Die erste Hälfte wurde nun noch einmal gebrochen und es wurde das magnetische Moment der beiden Theile, nachdem man sie wieder neu magnetisirt hatte, gefunden zu:

473000 Einheiten;

also wieder bedeutend weniger, als für die gesammte Hälfte. Es geht demnach aus diesen Versuchen hervor, daß, sobald das Verhältniß des Durchmessers zur Länge unter einen gewissen Werth gesunken ist, das magnetische Moment von Stäben, den Massen derselben proportional gesetzt werden darf, wie es auch die Theorie verlangt.

Betrachten wir nämlich die Formel, die Neumann ¹⁾ für das magnetische Moment eines Ellipsoïdes aufstellt:

$$\mu = \frac{k v P}{1 + k q S}$$

worin, wenn mit r die Axe des größten Kreisschnittes und mit $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$ die Länge der Rotationsaxe bezeichnet und ferner: $\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2} = \sigma$ gesetzt wird,

$$S = 4 \pi \sigma (\sigma^2 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma} \right\},$$

so sehen wir, daß sobald r gegen $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$ verschwindet, $\sigma = 1$ und $S = 0$ wird, was nichts anderes bedeutet, als μ wird proportional dem Volumen v oder der Masse desselben.

In unserem Falle beträgt für

die erste Nadel $S = 0,00170$

die zweite Nadel $S = 0,000504$

indem wir nämlich die Stäbe in Ellipsoide von gleichem Volumen und gleicher Länge verwandeln.

Freilich haben wir nun noch keinen Anhaltspunkt über die GröÙe des zweiten Gliedes des Nenners, indem ja die GröÙe k keine Constante ist, sondern nach den Versuchen Weber's ²⁾ eine Function der Scheidungskraft, und nach Riecke ³⁾ ferner noch abhängig ist vom Axenverhältniß und zwar so, daß k zunimmt, wenn S abnimmt. Es geht indessen aus den Versuchen hervor, daß für die zweite Nadel der Fehler, der mit Weglassung dieses Gliedes entstehen würde, jedenfalls in die Fehlergränze der Beobachtung hineinfällt.

1) Neumann, *l. c.*

2) Weber, *l. c.*

3) Riecke, *Diess Ann. Bd. 141 S. 453.*

§. 2. Bestimmung der Lage der Magnetpole in Stabmagneten.

Die Lage der Magnetpole in Stäben hängt eng mit der Vertheilung des Magnetismus auf denselben zusammen, indem sobald das Gesetz der magnetischen Vertheilung bekannt ist, damit auch sofort die Lage dieser ausgezeichneten Punkte festgesetzt ist. Es ist indeß, trotz vieler Bemühungen, noch nicht gelungen, dieses Gesetz definitiv festzustellen, sondern die erlangten Resultate geben uns im Allgemeinen nur einen annähernden Begriff über die ideale Anhäufung des Magnetismus. Die Versuche über die Vertheilung des Magnetismus auf Stabmagneten geschahen im Wesentlichen nach folgenden drei Methoden, nämlich durch:

1) Abreißen eines an verschiedene Punkte des Magnetes angelegten Eisenstücks. (Hooke.)

2) Schwingungen einer kleinen Magnetnadel unter der Einwirkung verschiedener Punkte des zu untersuchenden Magnetes. (Coulomb.)

3) Induction in einer Spirale, die auf den Magnetstab auf verschiedenen Punkten aufgesetzt wird. (Lenz und Jacobi; Rothlauf.)

Die ersten Versuche, in dieser Richtung einiges Licht zu verbreiten, gingen von Coulomb aus, dessen Resultate Biot mit seiner Theorie übereinstimmend fand, welche ergab, dass die Intensität des Magnetismus eines sehr dünnen Stabes im Abstände x vom Ende gegeben werde durch die Formel:

$$J_x = A \{ \mu_x - \mu^2 l - x \}$$

worin A und μ Constanten und l die halbe Länge des Stabes bedeuten; d. h. die Intensität nimmt von der Mitte hin zu nach einer Kettenlinie. Dieselben Resultate findet Green aus seiner Theorie und auch Lamont¹⁾ aus seinen experimentellen Untersuchungen.

Andere Physiker erhielten ähnliche, theils aber auch

1) Lamont, Magnetismus. S. 161 usw.

abweichende Resultate, so daß bis jetzt die Frage über die Vertheilung des Magnetismus auf Stäben noch als eine offene bezeichnet werden kann.

Wir können nun aber, ohne das Vertheilungsgesetz des magnetischen Fluidums zu kennen, doch die Lage der magnetischen Pole bestimmen. Wir dürfen nämlich immer die Annahme machen, daß, wo sich auch der wirkende Punkt außerhalb des Magnetes befinde, seine Wirkung nur auf einen einzigen Punkt des Magnetes ausgeübt werde. Freilich wird dann bei verschiedener Entfernung desselben, der Angriffspunkt der ausgeübten Kraft sich verschieben und nur bei unendlicher Entfernung mit dem Pol des Magnetes zusammenfallen. Wenn wir aber auch bei praktischen Bestimmungen die Kraft nicht aus unendlicher Ferne wirken lassen, so wird doch schon bei einer Entfernung des Punktes, die gegenüber der Länge des Magnets beträchtlich ist, der Angriffspunkt der Kraft nicht erheblich von dem Pole des Magnetes abweichen, so daß wir angenähert diesen Angriffspunkt mit dem Pol identificiren können, was wir auch im Folgenden thun wollen ¹⁾).

a. Ablenkungsmethode. Eine Methode zur Bestimmung des Abstandes der Magnetpole in Stäben ergiebt sich aus folgender einfachen Betrachtung:

- 1) Wenn nun auch Lamont (Magnetismus S. 294) nach ähnlichen Ueberlegungen sagt:

„Daher kommt es, daß die strenge Lösung der Probleme, welche im Magnetismus behandelt werden, durch die Einführung der Pole weder vereinfacht noch erleichtert wird und mithin auch die Bestimmung der Lage der Pole von keiner Wichtigkeit ist.“

so darf man eine solche Behauptung jedenfalls anzweifeln, da wie er selbst dann anführt, Lambert, Kupffer und Coulomb im Allgemeinen die Pole außerhalb des Magnetes fanden und nur Dalla Bella dieselbe innerhalb der Magnete legte. Es ist nach solchen Facten jedenfalls auch für die Theorie und nicht nur für practische Fälle von Wichtigkeit, die Lage dieses Punktes, wenn auch nur angenähert, experimentell zu bestimmen, was, soviel mir bekannt ist, noch keineswegs ausgeführt wurde.

Es sei in nebenstehender Figur m eine kurze Magnetnadel. Nun nähere

manderselben senkrecht zum magnetischen Meridian den zu untersuchenden Magnet.

Bezeichnen wir mit M das magnetische Moment des Magnetes, mit λ den halben Abstand der Magnetpole, mit r den Abstand der Mitte des Magnets von der beweglichen Magnetnadel und endlich mit m das magnetische Moment der Nadel so wird für das Drehungsmoment des Magnets auf die Nadel folgender Ausdruck erhalten:

$$\frac{m M}{2} \left\{ \frac{r - \lambda}{r_1^3} - \frac{r + \lambda}{r_2^3} \right\}.$$

Bei der Einwirkung des Magnets auf die Nadel wird dieselbe aus ihrer Gleichgewichtslage abgelenkt; wir wollen annehmen um den Winkel φ . Es werden dadurch die Abstände r_1 und r_2 um die Größe $l \sin \varphi$ verändert; da wir aber Spiegelablesung benutzen und ferner l sehr klein ist, dürfen wir dieses Glied gegenüber den angewandten Entfernungen vernachlässigen. Wenn wir nun die obige Gleichung entwickeln und Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, so erhalten wir für das Drehungsmoment:

$$\varphi = \frac{2 m M}{r^3} \left(1 + \frac{2 \lambda^2}{r^2} \right).$$

Die Größe dieses Drehungsmomentes läßt sich aber auch noch auf eine andere Weise ausdrücken. Es muß nämlich die Wirkung des Magnets, welche bestrebt ist, die Nadel senkrecht zum magnetischen Meridian zu stellen, bei einer bestimmten Ablenkung φ compensirt werden durch die Wirkung der horizontalen Componente des Erdmagnetismus. Bei dieser Gleichgewichtsstellung der Nadel muß daher seyn:

$$\varphi \cos \varphi = T m \sin \varphi$$

wenn wir mit T die horizontale Componente des Erdmagnetismus bezeichnen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$M = \frac{\frac{1}{2} T r^3 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \frac{2 \lambda^2}{r^2}} \quad . \quad . \quad . \quad I.$$

Wenn wir nun mit demselben Magnet eine Ablenkung der Nadel aus der Entfernung r_1 bewirken, so wird sich in Gleichung (I) weiter nichts ändern als der Ausschlagswinkel φ , der die GröÙe φ_1 erreichen möge. Wir haben alsdann für das magnetische Moment des Magnetes eine zweite Gleichung:

$$M = \frac{\frac{1}{2} T r_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \frac{2 \lambda^2}{r_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad Ia.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nun sofort

$$2 \lambda^2 = \frac{r_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1 - r^3 \operatorname{tg} \varphi}{r^3 \operatorname{tg} \varphi - r_1^3 \operatorname{tg} \varphi_1} \cdot r_1^2 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad II.$$

Vermittelst dieser Methode wurden nun die folgenden Bestimmungen ausgeführt und nach Formel II die Werthe der Polabstände berechnet. Als Magnetnadel benutzte man den ringförmigen Magnet des Wiedemann'schen Galvanometers, der an einem sehr feinen Coconfaden aufgehängt ist, dessen Torsion bei der Kleinheit der Ausschläge zu vernachlässigen war. Senkrecht zum magnetischen Meridian lag die Schiene, auf welche die zu untersuchenden Magnete gelegt wurden; sie besitzt in der Mitte einen kreisförmigen Ausschnitt, in dessen Centrum die Magnetnadel sich befand. Dieselbe war von der Mitte aus von 100 zu 100 Millimeter mit etwa 2 Millimeter weiten Löchern versehen, deren Abstände mit dem Kathetometer genau bestimmt wurden.

Bei dem angewendeten Verfahren kommen indeß nur die Entfernungen der symmetrischen Punkte auf beiden Seiten von einander in Betracht; es betrug deren Abstand, wenn man die Löcher von einem Ende aus fortlaufend mit den Buchstaben des Alphabets bezeichnet:

$ak = 1399,73$ Millimeter

$bi = 1198,57$ „

$ch = 999,47$ „

$dg = 799,43$ „

$ef = 599,59$ „

Für jeden der zu untersuchenden Magnete wurde eine kleine Messinghülse mit Klemmschraube angefertigt, die in der Mitte einen ungefähr 4 Mm. langen Stift hatte, der genau in die Löcher der Schiene paßte. Auf diese Weise glaube ich diejenige Genauigkeit und Präcision für die Versuche erlangt zu haben, die man für dieselben fordern muß; indem ja der Polabstand nur aus einem Correctionsglied bestimmt werden soll. Vermittelst dieser Vorrichtung läßt sich auch das für solche Versuche von größter Bedeutung werdende Commutiren sehr leicht ausführen. Das Verfahren, das man einschlug, muß ich etwas eingehender behandeln, da es zu einem Kriterium über die Methode dienen muß.

Es wurde der zu untersuchende Magnet z. B. bei c aufgesteckt und die Ablenkung der Nadel B_1 beobachtet; nun wird commutirt, d. h. der Magnet um seinen Stift um 180° gedreht; es wird die Magnetnadel auf die andere Seite abgelenkt, die auf der Scale abgelesene Zahl sey B_1^1 . Ebenso verfährt man bei d und endlich auch auf den symmetrischen Punkten g und h und erhält folgende Fernrohrablesungen: $B_2, B_2^1; B_3, B_3^1; B_4, B_4^1$. Sollte man vielleicht während einer Tageszeit beobachten, wo die Aenderungen des Erdmagnetismus bedeutend sind, was man übrigens aus den erhaltenen Zahlen ersehen kann, so thut man wohl, die Beobachtungen einigemal in umgekehrter Reihenfolge zu wiederholen, indem sich dann der Einfluss derselben compensirt. Gewöhnlich wurden bei den vorliegenden Versuchen drei Sätze nacheinander gemacht und die Mittel aus denselben genommen. Subtrahiren wir nun die B von den B^1 und halbiren diese Differenz, so erhalten wir den Ausschlag, den die Nadel auf die Distanz giebt, in welcher sich der Stift von derselben befindet und zwar

unabhängig von einer etwaigen unsymmetrischen Lage des Stiftes gegen den Magnet. Es seyen die so erhaltenen Zahlen b_1, b_2, b_3, b_4 . Befindet sich die Nadel genau in der Mitte zwischen den symmetrischen Punkten, so muß $b_1 = b_4$ sein und ebenso $b_2 = b_3$; gewöhnlich ist dies aber nicht der Fall; bilden wir nun

$$b = \frac{b_1 + b_4}{2} \text{ und } \beta = \frac{b_2 + b_3}{2},$$

so erhalten wir diejenige Ablenkung, die statthaben würde, wenn wir die Ablenkungen aus den genau bekannten Entfernungen $\frac{ck}{2}$ und $\frac{dg}{2}$ hervorbringen würden. Um nun die Ablenkungswinkel zu erhalten, haben wir diese Zahlen zu dividiren durch den doppelten Abstand der Scale vom Spiegel. Es vereinfacht sich aber in unserem Falle die Rechnung; da nämlich in unserm Ausdruck für $\lambda \operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{tg} \varphi_1$ sowohl im Nenner, als auch im Zähler in jedem Gliede als Factor vorkommen, dürfen wir für die Tangenten die an der Scale beobachteten Ausschläge setzen, nachdem wir jeden Ausschlag b um $\frac{1}{4} \frac{b^3}{d^3}$ verringert haben, wo d den Abstand des Spiegels von der Scale bedeutet.

Das Gesagte will ich an einem Beispiel erläutern. Die schon früher erwähnte Magnetnadel von der Länge 141,0^{mm} wurde auf die Punkte c, d, g, h gelegt und im Mittel folgende Tabelle gefunden:

Bestimmung der Polabstände:

	B	B_1	b
c	310,3	502,5	192,2
	310,7	503,2	192,5
d	214,6	597,1	382,5
	214,8	598,0	383,2
g	224,2	594,5	370,3
	222,2	592,4	370,2
h	315,4	502,0	186,6
	315,6	502,5	186,9.

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß sich die Nadel nicht genau in der Mitte zwischen den symmetrischen Punkten befindet, sondern etwas näher den Punkten *c* und *d*. Bilden wir nun die Mittel aus den beiden Versuchsreihen, so ergeben sich für die Abstände:

$\frac{ch}{2}$ die Ablenkung zu 94,775 Scalentheilen.

$\frac{dg}{2}$ „ „ „ 188,275 „

Aus der für eine Anzahl von Ausschlägen ein für allemal berechneten Tabelle für das Correctionsglied entnimmt man nun durch Interpolation den Werth derselben für die obigen Ausschläge und es werden so die corrigirten Ausschläge

$$b^1 = 94,720 \text{ und } \beta^1 = 187,850$$

woraus sich nun nach Formel II λ ergibt zu:

$$\lambda = 58,2 \text{ Mm.}$$

Es beträgt demnach der Abstand der beiden magnetischen Pole der Nadel:

$$2\lambda = 116,4 \text{ Mm.}$$

Zwei andere solche Beobachtungssätze ergaben ziemlich übereinstimmend:

$$2\lambda = 126,0$$

$$2\lambda = 119,0$$

Im Mittel also: 120,5 Mm.

Diese Methode verwandte man nun, um folgende Frage zu beantworten: Wie hängt die Lage der Magnetpole in parallelepipedischen Stahlstäben von dem Härtegrad derselben ab? Zu diesem Zwecke liefs ich mir von demselben quadratischen Stahlstab zwei Stücke abschneiden. Die Dimensionen derselben waren:

Seite des Querschnitts 4,8 Mm.

Stab No. 1 Gewicht: 18,730 Gram. Länge 103,0 Mm.

Stab No. 2 Gewicht: 19,090 Gram. Länge 102,55 Mm.

Die Stäbe wurden an einem sehr starken Elektromagnet gestrichen und nachher, um die Magnetisirung gleichmäfsig zu machen, in die Spiralen des Apparats

hineingelegt. Es sey übrigens hier bemerkt, daß ich dieselbe Stärke der beiden Magnete erreichte, wenn ich sie nur an einem 25 Pfund schweren Lamellenmagnete strich.

Die beiden Stäbe wurden immer derselben Manipulation unterworfen; man untersuchte dieselben in folgenden drei Zuständen:

- 1) gewöhnlich, wie sie aus der Fabrik geliefert werden;
- 2) glashart, indem man sie weißglühend plötzlich in Wasser tauchte, und endlich
- 3) weich, indem man sie in einem Kohlenbecken bis zur Weißgluth erhitzte und nachher hermetisch verschlossen erkalten ließ.

Die Bestimmungen mit diesen beiden Magneten lieferten folgende Resultate:

Magnet No. I.		Magnet No. II.	
	λ		λ
Gewöhnlich	43,38		41,50
	43,14		41,18
	<u>43,26</u>		<u>41,34</u>
	$k = \frac{\lambda}{2} = 0,840$		$k = 0,803$
Glashart	43,33		40,68
	46,05		44,41
	<u>44,98</u>		<u>43,10</u>
	<u>44,80</u>		<u>42,73</u>
	$k = 0,870$		$k = 0,830$
Weich	42,88		43,81
	43,07		44,67
	<u>42,98</u>		<u>44,24</u>
	$k = 0,834$		$k = 0,859.$

Bei dem Magnet No. I zeigt sich mit der Härte eine regelmäßige Zunahme des Polabstandes, hingegen bei dem zweiten Magneten sind die Verhältnisse unregelmäßiger. Indessen fallen die Abweichungen, wie aus den mitgetheilten Zahlen hervorgeht, so ziemlich in die Fehlergränzen der Beobachtung hinein, so daß sich kein evidentere Unterschied des Polabstandes bei verschiedenen

Härtegraden herausstellt. Im Mittel aus allen Beobachtungen würde sich ergeben:

Magnet I.

$$k = 0,848$$

Magnet II.

$$k = 0,831.$$

Die Stärke der Magnete variirte bei den Versuchen zwischen 190 und 230 Einheiten per Milligramm, je nach dem Härtegrad derselben, so nämlich, daß bei glashartem Zustand das Maximum erreicht wurde.

b. *Vermittelst der Tangentenbussole.* Wie bekannt, gilt für eine Tangentenbussole das Tangentengesetz nur, wenn entweder die Nadel der Bussole gegenüber dem Durchmesser der Windungen sehr klein ist, oder auch die Ausschläge bei einer nicht sehr kleinen Nadel unter einer bestimmten Gränze bleiben. Die erste Bedingung ist practisch meistens nicht genügend erfüllt, man ist daher gezwungen, für genaue Bestimmungen mit größern Ausschlägen eine Correction anzubringen. Schon vor geraumer Zeit¹⁾ ist deßhalb durch verschiedene Physiker und Mathematiker, Hädenkamp, Helmholtz, Bravais, Kinkelin und Andere das Wirkungsgesetz eines kreisförmigen Stromleiters auf eine nicht unendlich kurze Nadel aufgestellt worden. Es zeigte sich aus diesen mathematischen Betrachtungen, daß die Intensität des Stromes, der die Windungen durchfließt, nicht proportional ist der Tangente des Winkels, sondern daß für größere Ausschläge die Intensität zu klein angezeigt wird. Die Correction, die man an die abgelesenen Winkel anzubringen hat, läßt sich nicht in geschlossener Form ausdrücken, sondern es gelingt deren Ermittlung nur durch Reihenentwicklung. Von dieser Reihe braucht man indeß bei nicht gar zu langer Nadel nur das erste Glied als Correctionsglied. Gerade diese Nichtübereinstimmung des Tangentengesetzes mit der Intensität kann nun dazu benutzt werden, die Entfernung der Magnetpole von einander zu bestimmen. Es enthält nämlich das erste Corrections-

1) Das Gesetz wurde zuerst von Hädenkamp in Grunerts Archiv Bd. 21 entwickelt.

glied diese Gröfse, und können wir den Zusammenhang zwischen Stromintensität und Ausschlag der Tangentenbussole feststellen, so ist damit auch das Correctionsglied bestimmt.

Lassen wir also einen Strom durch eine Tangentenbussole gehen, so wird mit Weglassung höherer Glieder die Intensität desselben gegeben durch

$$(1) \quad J = A \operatorname{tg} \varphi \{ 1 + B \sin^2 \varphi \}$$

worin:

$$A = \frac{r T}{2 n \pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} - \frac{1}{3} \frac{b}{r^2} - \frac{3}{4} \frac{\lambda^2}{r} \right\}^1) \quad B = \frac{15}{4} \frac{\lambda^2}{r^2}$$

wenn wir mit 2λ den Abstand der Magnetpole der Nadel, mit r den Halbmesser der Windungen, $2a$ die Breite und $2b$ die Höhe des rechteckigen Querschnitts der Windungen bezeichnen.

Geht nun derselbe Strom durch ein Galvanometer mit Spiegelablesung, so dürfen wir ohne weiteres die Stromintensitäten den erhaltenen Ausschlägen proportional setzen; indem ja, wie aus obiger Formel hervorgeht, das zweite Glied für so kleine Ausschläge, wie man sie bei Spiegelablesung benutzt, vernachlässigt werden kann. Freilich hat man dann immer noch die Ausschläge nach der Formel:

$$a_0 = a \left(1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{A^2} \right)$$

auf Tangenten zu reduciren. Der so berechnete Ausschlag a_0 kann dann für die Stromintensität J gesetzt werden, wenn es nur auf Vergleichung ankommt.

Durchfließt somit derselbe Strom eine Tangentenbussole und ein Galvanometer, und beobachtet man am ersteren den Ausschlag der Nadel, auf dem zweiten durch Spiegelvorrichtung die Ablenkung des Magnetes in Scalentheilen, so ergibt sich aus diesen beiden Gröfsen eine Gleichung von der Form:

$$J_1 = A \operatorname{tg} \varphi_1 \{ 1 + B \sin^2 \varphi_1 \}$$

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. Bd. 141, S. 457.

Für eine zweite Stromintensität ergibt sich wieder eine Gleichung von obiger Gestalt:

$$J_2 = A \operatorname{tg} \varphi_2 \{ 1 + B \sin^2 \varphi_2 \}.$$

Wir können auf diese Weise eine ganze Reihe solcher Gleichungen aufstellen, und es besteht nunmehr unsere Aufgabe darin, aus einer Reihe solcher Bestimmungen den wahrscheinlichsten Werth für die beiden Constanten A und B zu finden. Kennen wir z. B. B , so erhalten wir sofort:

$$\frac{\lambda}{r} = \sqrt{\frac{1}{15}} B$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhalten wir den wahrscheinlichsten Werth für A und B , wenn die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist, d. h. wenn:

$$R = \sum \{ J - A \operatorname{tg} \varphi - B_1 \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi \}^2 = \text{Minimum}.$$

Dies findet statt für:

$$\frac{dR}{dA} = 0$$

$$\frac{dR}{dB_1} = 0$$

Führen wir die Differentiation aus, so ergibt sich aus den beiden Gleichungen:

$$\text{I. } B_1 = \frac{\sum J \operatorname{tg} \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi - \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sum J \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi}{[\sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi]^2 - \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^4 \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\text{II. } A = \frac{\sum J \operatorname{tg} \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^4 \varphi - \sum J \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^4 \varphi - (\sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi)^2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man den wahrscheinlichsten Werth von B zu:

$$\text{III. } B = \frac{B_1}{A} = \frac{\sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sum J \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi - \sum J \operatorname{tg} \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\sum J \operatorname{tg} \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^4 \varphi - \sum J \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi \sum \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi}$$

worans dann:

$$\frac{\lambda}{r} = \sqrt{\frac{4}{15}} B$$

Zur Spiegelbeobachtung diene ein Wiedemann'sches Galvanometer, dessen beide Spiralen gegen einander ein-

geschaltet waren, da die angewandte Tangentenbussole für grössere Ausschläge sehr starke Ströme verlangte.

Durch geeignete Veränderung ihres Abstandes konnte dann die Wirkung der Spulen zu passender Grösse geregelt werden.

Als elektromagnetische Kraft dienten zwei große Bunsen'sche Becher, deren Strom durch einen Rheostaten verändert werden konnte. Gewöhnlich benutzte man für eine Versuchsreihe vier verschiedene Intensitäten, die an der Tangentenbussole ungefähr den Ausschlägen 15° , 30° , 45° , 60° entsprachen.

Bei diesen Versuchen wurde auch der Commutator angewendet, der wesentlich zur Genauigkeit der Beobachtungen beiträgt; es befand sich derselbe, sowie auch der Rheostat, neben dem Fernrohr, so daß Ein Beobachter die Versuche durchführen konnte.

Die benutzte Tangentenbussole besitzt 16 Umwindungen und hat einen mittlern Durchmesser von 316,5 Mm. Die Nadel, deren Polabstand zuerst bestimmt wurde, hat eine Länge von 141,0 Mm. (es war die schon früher benutzte Nadel) und liegt in einem Agathütchen auf einer Stahlspitze auf. Um das Verfahren klar zu machen, will ich eine Beobachtungsreihe hier anführen:

Tangentenbussole				Spiegelgalvanometer	
Ablenkung				Abgelesener	Scalenthell
gewöhnlich		commutirt		gewöhnlich	commutirt
I. Spitze	II. Spitze	I. Spitze	II. Spitze		
14,8	14,9	14,8	14,7	460,0	505,9
28,7	28,6	29,1	29,3	430,0	534,2
43,9	43,8	44,8	44,8	377,9	585,0
58,7	58,9	57,3	57,3	290,1	662,0

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich nun:

Tangentenbussole	Ablenkung des Spiegel- Galvanometers
$\varphi_1 = 14^\circ 48'$	$c_1 = 22,95$
$\varphi_2 = 28 \ 56$	$c_2 = 52,08$
$\varphi_3 = 44 \ 19$	$c_3 = 103,47$
$\varphi_4 = 58 \ 03$	$c_4 = 185,55$

Berechnen wir nun nach der Formel II und III die Constanten A und B , so erhalten wir für dieselben folgende Werthe

$$A = 84,286$$

$$B = 0,51921$$

Es würde uns also bei einer Ablenkung φ der Nadel der Tangentenbussole die entsprechende Intensität in Scalentheilen ausgedrückt gegeben durch:

$$J = 84,286 \operatorname{tg} \varphi \{ 1 + 0,51921 \sin^2 \varphi \}$$

Wir können nun rückwärts aus dieser Formel für die obigen vier Winkel die zugehörigen Ausschläge des Spiegelgalvanometers berechnen; es liefert uns diese Rechnung eine Controle für die Richtigkeit der Constanten und ferner ein Kriterium über die Zulässigkeit der Annahme, daß wir von der Reihe, selbst für eine so lange Nadel, nur das erste Glied zu berücksichtigen brauchen. Die Berechnung ergab:

	$\varphi = 14^\circ 48'$	$28^\circ 56'$	$44^\circ 19'$	$58^\circ 3'$
J {	berechnet 23,02	52,24	103,15	185,66
	beobachtet 22,95	52,08	103,47	185,55
	Diff. + 0,07	+ 0,16	— 0,32	+ 0,11

Es bleibt uns nun nur noch übrig, aus den Constanten die gesuchte Größe λ zu berechnen.

Man erhält für dieselbe:

$$\lambda = r \sqrt{\frac{4}{15}} B = 58,86 \text{ Mm.}$$

Also ist der Abstand der Magnetpole dieser Nadel = 117,7 Mm. Aus einer Reihe anderer Bestimmungen mit derselben Nadel ergaben sich ziemlich übereinstimmende Resultate, nämlich:

No. II. Abstand der Magnetpole $2\lambda = 123,1$

„ III. „ „ „ = 118,2

„ IV. „ „ „ = 119,8

Im Mittel also aus 4 Reihen $2\lambda = 119,7$

und das Verhältniß der Länge der Nadel zu ihrem Polabstand $k = 0,848$, während wir nach der ersten Methode für diese Nadel fanden $k = 0,854$.

Hr. Prof. Kohlrausch, durch dessen Anregung ich diese Versuche an die Hand nahm, hat schon vor längerer Zeit eine solche Bestimmung ausgeführt und mir dieselbe zur Benutzung überlassen.

Die Dimensionen seiner Apparate betragen:

Mittlerer Durchmesser der Windungen der Tangentenbussole 258,4.

Länge der Magnetnadel: $l = 40$ Mm.

Er erhielt folgende Resultate:

Tangentenbussole	Spiegelgalvanometer	
	Anschlag	
φ	in Scalentheilen	in Graden α
61° 53'	399,45	5° 44',19
64 28,5	218,35	3 10,27
29 33'	115,65	1 40,89
13 25,5	48,10	0 42,00

Während wir im vorigen Beispiel die reducirten Scalentheile als Intensitäten setzten, nahmen wir hier die Tangenten der Winkel α . Es ergaben sich so die beiden Constanten zu:

$$A = 0,050853$$

$$B = 0,067313$$

also wird für diese Tangentenbussole:

$$J = \operatorname{tg} \alpha = 0,050853 \operatorname{tg} \varphi (1 + 0,067313 \sin^2 \varphi)$$

Die Controlrechnung ergibt in diesem Falle:

	$\varphi = 61^\circ 57'$	$46^\circ 28',5$	$29^\circ 33'$	$13^\circ 25',5$
$\operatorname{tg} \alpha$	berechnet 0,10044	0,05543	0,02930	0,01223
	beobachtet 0,10046	0,05540	0,02935	0,01222
Diff. = -0,00002 +0,00003 -0,00005 +0,00001				

also eine gute Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werthen.

Es ergibt sich aus dieser Beobachtung der Abstand der Magnetpole der benutzten Nadel zu:

$$2 \lambda = 34,62 \text{ Mm.}$$

$$\text{oder also } k = 0,866.$$

Fassen wir sämmtliche Resultate über den Abstand der Pole in Magneten, die wir nach beiden Methoden erhalten haben, zusammen, so muß es überraschen, bei den verschiedenen Gestalten ¹⁾ und Dimensionen der Magnete, die wir untersuchten, gar nicht sehr verschiedene Werthe für die GröÙe k erhalten zu haben; es wird für die meisten praktischen Fälle genügen, für dieselbe den Mittelwerth 0,85 anzunehmen, wenn man eben nicht vorzieht, die Bestimmung selbst durchzuführen. Ich denke indeß eine planmäßige Bestimmung der Polabstände in Magneten von verschiedener Form und GröÙe später noch auszuführen.

§. 3. Anwendung der erlangten Resultate zur Correction der Tangentenbussole.

Die Beobachtungen über den Abstand der Magnetpole geben uns die Mittel an die Hand, mit einer nicht unendlich kleinen Nadel, doch für jeden Ausschlag der Tangentenbussole, die richtige Intensität zu finden, d. h. den Ausschlag, den eine sehr kurze Nadel angeben würde, zu berechnen. Die Nadel zeigt, wie schon erwähnt, immer einen zu kleinen Ausschlag φ an, wir erhalten aber sofort den richtigen Ausschlag φ_1 nach der Formel:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{15}{4} \frac{\lambda^2}{r^2} \sin^2 \varphi \right)$$

Die folgende Tabelle ist aus den Versuchen Kohlrausch's, für seine Tangentenbussole und die betreffende

- 1) Die große Magnetnadel war von dünnem Stahlblech; sie wurde nach den Enden hin schmaler, ohne indeß in eine Spitze auszulaufen.

Die kleinere Nadel, die Prof. Kohlrausch benutzte, war ein langgestrecktes Rechteck, das an den Enden etwas abgerundet war.

Nadel berechnet. In der ersten Columnne sind die wirklichen Ausschläge der Nadel, in der zweiten die corrigirten Ausschläge und in der dritten die Abweichung derselben:

Correctionstabelle für die Tangentenbusssole.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{15} \sin^2 \varphi \right\}^1)$$

φ		φ_1	$\varphi_1 - \varphi$
0°	0°	0,0	0°,00
10	10	1,2	0,02
20	20	8,6	0,14
30	30	24,7	0,41
40	40	46,1	0,77
50	51	4,8	1,08
60	61	11,7	1,20
65	66	8,9	1,15
70	71	1,8	1,03
80	80	35,7	0,60
85	85	18,6	0,31
90	90	0	0,00

Fehlercurve.

1) $\frac{1}{15}$ abgekürzt für 0,067313.

Man könnte auf diese Weise für jede Tangentenbusssole die Correctionen berechnen und hätte so für Bestimmungen auch bei nicht sehr kurzer Nadel doch noch ein brauchbares Instrument. Ich habe in vorstehender Figur die Correctionen graphisch aufgetragen, die wirklichen Ausschläge in Graden als Abscissen, die zugehörigen Correctionen in Minuten als Ordinaten. Der Fehler in der Einstellung der Nadel erreicht bei ungefähr 60° das Maximum und nimmt dann wieder ab bis zu 90° , wo er Null ist. Es ist natürlich sowohl die Lage dieses Maximums wie auch dessen Gröfse abhängig von der Länge der Nadel resp. deren Polabstand. Wir können nun, und dies wird für praktische Fälle von Interesse seyn, sofort bei gegebenen Dimensionen die Lage und Gröfse dieses Maximums von vornherein bestimmen. Wir haben also zu bestimmen, für welche Werthe von φ ist die Differenz $\varphi' - \varphi$ oder auch $\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi$ ein Maximum. Es ist aber:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi = \frac{B \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi (1 + B \sin^2 \varphi)}$$

Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum, wenn φ folgender Gleichung genügt

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \{ 1 + B \sin^2 \varphi \} = 3$$

Aus dieser Formel ergibt sich:

- 1) Bei Tangentenbussolen mit kurzer Nadel sind die Fehler in den Ablenkungswinkeln bei 60° ein Maximum.
- 2) Für nicht sehr kurze Nadeln rückt die Lage dieses Fehlermaximums etwas hinunter.

Diesen ausgezeichneten Werth von φ erhält man aus obiger Gleichung zu:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{-\frac{2}{B} + \sqrt{\frac{4}{B^2} + \frac{3}{B}}}$$

In unserm vorliegenden Falle wäre das Fehlermaximum wenn wir B zu $\frac{1}{15}$ annehmen:

$$\varphi = 59^\circ 24'$$

und würde dasselbe betragen:

$\varphi' - \varphi = 60^{\circ} 35,9' - 59^{\circ} 24' = 1^{\circ} 11,9'$ (vergl. die graphische Darstellung).

Um nun für einen ganz abnormen Fall einen Ueber-schlag zu bekommen, wollen wir ebenso Lage und Gröfse des Fehlermaximums für die andere gebrauchte Nadel bestimmen.

Es liegt bei jener das Fehlermaximum bei $58^{\circ} 16'$ und beträgt $65^{\circ} 45' - 58^{\circ} 16' = 7^{\circ} 29'$.

Trotz dieser sehr grofsen Abweichung vom Tangentengesetz erhellt aus den früher mitgetheilten Zahlen, dafs auch bei dieser Nadel das erste Correctionsglied noch genügt, um mittelst desselben den richtigen Ausschlag in sehr kleinen Fehlergränzen zu bekommen. Die nach Gangain oder Helmholtz benannte Tangentenbussole mit excentrischer Aufhängung ist allerdings durch ihre Construction von dieser Nothwendigkeit der Correction befreit, so lange Stromstärken nur verglichen werden sollen. Dagegen würden absolute Messungen mit derselben unmöglich seyn, denn der Reductionsfactor der Tangente auf absolute Stromstärke wird hier eine höchst complicirte Function der Dimensionen und Gestalt des Multiplicators, was die Reduction auf absolutes Maafs so sehr verwickelt, dafs eine Anwendung für praktische Zwecke ausgeschlossen ist.

Es ist dieser Punkt noch um so mehr zu betonen, da es nämlich sehr wünschenswerth ist, dafs die absoluten Maafsverfahren auch auf dem Gebiete des Galvanismus mehr Verbreitung finden, was wohl nur durch einfache und wohlfeile Mefsapparate und einfache Berechnungsformeln erreicht werden kann. Durch leichte Ueberlegung sieht man übrigens auch ein, dafs die Anordnung, wie sie den Gangain'schen Bussolen gegeben wird, sehr vereinfacht werden kann. Legt man nämlich die Windungen symmetrisch um den theoretisch berechneten Kreis (gibt man ihnen z. B. einen kreisförmigen Querschnitt, oder auch einen rechteckigen, wo bei bestimmten Verhältnissen der Seiten dieselbe Genauigkeit wie bei der obigen An-

ordnung erreicht wird), so fällt auch auf diese Weise das Correctionsglied erster Ordnung weg und ist dann auch die Wirkung der Windungen auf die Nadel für absolute Messungen leichter zu ermitteln.

Wenn man aber an die gewöhnlich gebrauchten Tangentenbussolen die obige Correction, die sich ja für ein Instrument sehr leicht bestimmen läßt und nur Einmal bestimmt werden muß, anbringt, so sind die absoluten Bestimmungen mit derselben für praktische Zwecke genügend genau und, was eben für eine allgemeinere Einführung absoluter Messungen eine Hauptsache ist, sehr einfach. So berechnet sich z. B. für die von Kohlrausch benutzte Tangentenbussole die Formel, welche die Intensität von Strömen, die durch dieselbe geleitet werden, nach absolutem magnetischem Maasse giebt, nach Formel (1) S. 161 für Göttingen zu:

$$J = 1,615 \cdot \operatorname{tg} \varphi (1 + 0,067 \sin^2 \varphi)$$

Die beiden Factoren A und B können numerisch für eine beliebige Tangentenbussole sofort aus ihren Dimensionen der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus und der Gröfse λ , die sich bei kürzerer Nadel mit genügender Genauigkeit zu 0,85 der Länge der Nadel annehmen läßt, bestimmt werden, und es lassen sich dann damit Ströme nach dem allgemein vergleichbaren, dem absoluten magnetischen Maasse, messen.

X. Ein Faraday'scher Explosionsversuch von G. Krebs.

In Tyndall's „die Wärme, betrachtet als eine Art der Bewegung“, 2. Auflage, Seite 146, wird bemerkt: Faraday schmolz reines Eis unter Terpentinöl und fand, daß die so erlangte Flüssigkeit weit über den Siedepunkt