ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 927.

Mémoire
sur la Théorie du Magnétisme. Par Mr. *Jean Plana*.

Si quelques observations n'établissent pas la possibilité d'une action magnétique émanée du globe de la Lune, il faudrait regarder ce Mémoire comme trop étranger à l'Astronomie, pour être publié dans ce savant recueil de Notices Astronomiques. Mais, en considérant qu'il est intéressant de pouvoir, sous ce point de vue, comparer la Théorie avec les Observations Magnétiques les plus délicates, on sera disposé à lire, du moins, le Second Article, où il y a des formules susceptibles d'une telle application. Peut-être, après cette lecture, on sera curieux d'acquiescer des idées plus étendues de cette question, et en prenant connaissance du Premier Article, on verra qu'il offre le double avantage: de présenter une démonstration nouvelle d'un important théorème sur la loi générale de la force émanée de tout corps aimanté par influence, et de faciliter singulièrement la solution du problème proposé dans le Second Article.

Turin, le 9. Nov. 1854.

Jean Plana.

Article Premier.

Sur une propriété générale, inhérente à l'état magnétique des corps homogènes aimantés par influence.

§ 1.

D'après la Théorie mathématique du Magnétisme exposée par *Poisson*, en 1824 et 1826, dans trois de ses Mémoires on admet que les élémens magnétiques des corps aimantés par influence, ont la propriété caractéristique que les quantités des deux fluides boréal et austral qui s'y trouvent, soit à l'état neutre, soit à l'état libre, sont égales entre elles, quoique en proportions très-différentes. Cette différence porte à la fois sur la quantité absolue, et sur l'inégale distribution qui a lieu à l'égard du fluide libre. C'est en vertu de cette inégalité, que les élémens magnétiques deviennent capables d'exercer une action sur les points extérieurs. On exprime cette propriété fondamentale, en disant, que l'intégrale $\int \mu d\nu$, étendue au volume entier ν de l'élément magnétique, censé fini quoique insensible, constitue une quantité toujours nulle; ce qui a lieu en observant

que, par le facteur variable μ , le produit $\mu d\nu$ donne la portion de fluide libre contenue dans le volume différentiel $d\nu$, avec le signe positif ou négatif, suivant que la force émanée de cette portion sera produite par du fluide boréal ou austral. A l'aide de ce principe, combiné avec celui de l'équilibre magnétique, *Poisson* a formé les expressions générales des attractions ou répulsions exercées par un corps dénué de toute force coercitive aimanté par influence.

L'équilibre que je viens de nommer est cet état permanent de la masse aimantée, où toute décomposition du fluide neutre a cessé. Mais le fluide libre, qui se trouve dans les élémens magnétiques, n'est pas pour cela dans un repos absolu. Il y a une action réciproque entre le fluide libre appartenant à deux élémens magnétiques en présence, qui doit être une fonction de leur distance, et d'autres variables trigonométriques. Il suffit de différentier convenablement les formules de *Poisson* pour obtenir cette fonction.

Ces mêmes formules offrent, relativement aux corps homogènes (ayant partout la même température) une équivalence qui mérite de fixer l'attention des Géomètres, et des Physiciens qui la voient associée à l'existence d'une équation aux différences partielles du second ordre, susceptible d'avoir une infinité de solutions différentes. Elle consiste en ceci: que la résultante des forces émanées de tous les élémens magnétiques d'un corps aimanté par influence est équivalente, en grandeur et en direction, à la résultante des forces émanées d'une couche fictive de fluide libre qui couvrirait la surface entière du corps ainsi aimanté.

En désignant par E l'épaisseur de la couche de fluide magnétique (mesurée dans le sens de la normale à la surface), la formule qui l'exprime analytiquement est telle que l'on a:

$$E = K \left\{ \frac{d\Phi'}{dx'} \cos \overline{Nx'} + \frac{d\Phi'}{dy'} \cos \overline{Ny'} + \frac{d\Phi'}{dz'} \cos \overline{Nz'} \right\}. \quad (1)$$

K étant un coefficient constant spécifique, toujours inférieur à l'unité positive; et Φ' une fonction des trois variables x' , y' , z' (considérées comme tout-à-fait indépendantes) qui doit rendre identique l'équation

$$\frac{d^2\Phi'}{dx'^2} + \frac{d^2\Phi'}{dy'^2} + \frac{d^2\Phi'}{dz'^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Soit $F(x', y', z) = 0$ l'équation de la surface du corps aimanté; et $dz' = p'dx' + q'dy'$ son équation différentielle; l'on aura pour les cosinus des angles $\overline{Nx'}$, $\overline{Ny'}$, $\overline{Nz'}$, que la partie extérieure N de la normale fait avec les axes:

$$\cos \overline{Nx'} = \frac{-p'}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}};$$

$$\cos \overline{Ny'} = \frac{-q'}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}};$$

$$\cos \overline{Nz'} = \frac{1}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}}.$$

De sorte que l'on a

$$E = \frac{K \left\{ \frac{d\Phi'}{dz'} - q' \frac{d\Phi'}{dy'} - p' \frac{d\Phi'}{dx'} \right\}}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}}.$$

Cela posé; soit ω' l'angle $\overline{Nr'}$ que le rayon vecteur r' de la surface, mené depuis l'origine des coordonnées, fait avec la normale N , l'on a d'abord l'équation

$$\cos \omega' = \frac{x'}{r'} \cos \overline{Nx'} + \frac{y'}{r'} \cos \overline{Ny'} + \frac{z'}{r'} \cos \overline{Nz'},$$

qui donne

$$\cos \omega' = \frac{\frac{z'}{r'} - q' \frac{y'}{r'} - p' \frac{x'}{r'}}{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)}} \dots \dots \dots (4)$$

Le plan tangent à la surface, et le plan normal au rayon vecteur r' font entre eux l'angle ω' . Donc, en nommant $d\omega'$ l'élément de la surface, l'on aura $d\omega' \cdot \cos \omega'$ pour la surface

$$Q = \iint \frac{E' d\omega'}{\rho};$$

$$Q = K \iiint \left\{ \frac{d\Phi'}{dz'} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{dx'} + \frac{d\Phi'}{dy'} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{dy'} + \frac{d\Phi'}{dx'} \cdot \frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{dz'} \right\} dx' dy' dz' \dots \dots \dots (7)$$

où l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (8)$$

L'intégrale double doit être étendue à toute la surface, et l'intégrale triple à tout le volume du corps aimanté. Le volume entier de la couche fictive est exprimé par l'intégrale

$$\iint E' d\omega' = S E' d\omega',$$

étendue à toute la surface ayant pour équation $F(x', y', z') = 0$. De sorte que, si cette couche était composée de fluide boréal et de fluide austral, en quantités égales, on devrait avoir l'équation

$$S E' d\omega' = 0, \dots \dots \dots (9)$$

c'est-à-dire une équation tout-à-fait semblable à l'équation $\int \mu d\nu = 0$, admise à l'égard de chacun des éléments magnétiques.

de ce même élément projeté sur le plan normal au rayon vecteur r' . Ainsi, en désignant par $d\lambda'$ ce que devient la surface $d\omega'$ par cette projection, l'on a l'équation $d\lambda' = d\omega' \cdot \cos \omega'$, de laquelle on tire

$$d\omega' = \frac{d\lambda' \cdot \sqrt{(1+p'^2+q'^2)}}{\frac{z'}{r'} - q' \frac{y'}{r'} - p' \frac{x'}{r'}} \dots \dots \dots (5)$$

Le produit des équations (3) et (5) donne

$$E' d\omega' = \frac{K d\lambda' \left\{ \frac{d\Phi'}{dz'} - q' \frac{d\Phi'}{dy'} - p' \frac{d\Phi'}{dx'} \right\}}{\frac{z'}{r'} - q' \frac{y'}{r'} - p' \frac{x'}{r'}} \dots \dots \dots (6)$$

pour l'expression du volume différentiel $E' d\omega'$ de la couche fictive, capable d'exercer sur les points extérieurs, de fluide boréal ou austral, une action équivalente à celle produite par la totalité du fluide libre disséminé dans la masse du corps aimanté par influence.

Analytiquement parlant, cela signifie, que les trois composantes

$$X = -\frac{dQ}{dx}, \quad Y = -\frac{dQ}{dy}, \quad Z = -\frac{dQ}{dz}$$

de la force émanée du corps aimanté pour faire mouvoir une molécule de fluide boréal qui lui est extérieure, et dont x, y, z sont les coordonnées, on pourra les former par cette double expression de la fonction Q des trois coordonnées x, y, z ; savoir

Avec ce degré de généralité, il n'y a aucune indication explicite de l'existence de cette équation dans les trois Mémoires de *Poisson* publiés dans les Volumes V et VI de l'Institut de France. Mais, dans l'extrait du Premier de ces Mémoires, publié dans le Tome XXV des *Annales de Chimie et de Physique* par M. M. *Gay-Lussac* et *Arngo*, il est dit (Lisez la page 127), que la couche très-mince dont il est ici question doit être formée (sans rien statuer sur l'équation de la surface) „des deux fluides en quantités égales, et telle que l'action totale sur les points intérieurs soit égale à zéro.“ Ce passage remarquable n'a pas été reproduit dans les Volumes V et VI que je viens de

citer: mais le cas particulier relatif aux corps sphériques, se trouve démontré à la page 66 du premier de ces trois Mémoires publié au mois d'Octobre de l'année 1824. De là à la démonstration du cas général il y a un intervalle assez considérable, qui ne peut être franchi sans combiner l'intégration du second membre de l'équation (6) avec les propriétés de la fonction Φ' , qui satisfait à l'équation (2). C'est ce que nous allons mettre en évidence.

§ II.

En employant les coordonnées polaires r' , θ' , ψ' nous avons:

$$x' = r' \cos \theta'; \quad y' = r' \sin \theta' \sin \psi'; \quad z' = r' \sin \theta' \cos \psi'; \\ d\lambda' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\psi'.$$

$$\left(\frac{dF'}{dx'}\right) dx' + \left(\frac{dF'}{dy'}\right) dy' + \left(\frac{dF'}{dz'}\right) dz' = \left(\frac{dF'}{dr'}\right) dr' + \left(\frac{dF'}{d\theta'}\right) d\theta' + \left(\frac{dF'}{d\psi'}\right) d\psi'; \dots\dots\dots (10)$$

d'où l'on tire immédiatement, en supposant faite la substitution des valeurs de dx' , dy' , dz' ;

$$\frac{z'}{r'} \left(\frac{dF'}{dz'}\right) + \frac{y'}{r'} \left(\frac{dF'}{dy'}\right) + \frac{x'}{r'} \left(\frac{dF'}{dx'}\right) = \left(\frac{dF'}{dr'}\right) \dots\dots\dots (11)$$

Mais la même équation (10) donne en outre:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dF'}{dx'}\right) &= \left(\frac{dF'}{dr'}\right) \cos \theta' - \left(\frac{dF'}{d\theta'}\right) \frac{\sin \theta'}{r'}; \\ \left(\frac{dF'}{dy'}\right) &= \left(\frac{dF'}{dr'}\right) \sin \theta' \sin \psi' + \left(\frac{dF'}{d\theta'}\right) \frac{\cos \theta' \sin \psi'}{r'} + \left(\frac{dF'}{d\psi'}\right) \frac{\cos \psi'}{r' \sin \theta'}; \\ \left(\frac{dF'}{dz'}\right) &= \left(\frac{dF'}{dr'}\right) \sin \theta' \cos \psi' + \left(\frac{dF'}{d\theta'}\right) \frac{\cos \theta' \cos \psi'}{r'} - \left(\frac{dF'}{d\psi'}\right) \frac{\sin \psi'}{r' \sin \theta'}; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

donc, en substituant ces valeurs dans celle de $E'd\omega'$, l'on aura

$$\left. \begin{aligned} E'd\omega' &= Kr'^2 \sin \theta' d\theta' d\psi' \left\{ \cos \theta' \frac{d\Phi'}{dx'} + \sin \theta' \sin \psi' \frac{d\Phi'}{dy'} + \sin \theta' \cos \psi' \frac{d\Phi'}{dz'} \right\} \\ &\quad - \frac{Kr' \left(\frac{dF'}{d\theta'}\right)}{\left(\frac{dF'}{dr'}\right)} \sin \theta' d\theta' d\psi' \left\{ \sin \theta' \frac{d\Phi'}{dx'} - \cos \theta' \sin \psi' \frac{d\Phi'}{dy'} - \cos \theta' \cos \psi' \frac{d\Phi'}{dz'} \right\} \\ &\quad + \frac{Kr' \left(\frac{dF'}{d\psi'}\right)}{\left(\frac{dF'}{dr'}\right)} d\theta' d\psi' \left\{ \cos \psi' \frac{d\Phi'}{dy'} - \sin \psi' \frac{d\Phi'}{dz'} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

Les équations (11) et (12) étant aussi applicables à la fonction Φ' , on obtiendra, entre les coordonnées polaires r' , θ' , ψ' :

$$E'd\omega' = K \sin \theta' d\theta' d\psi' r'^2 \left(\frac{d\Phi'}{dr'}\right) + K \sin \theta' d\theta' d\psi' \frac{\left(\frac{dF'}{d\theta'}\right) \left(\frac{d\Phi'}{d\theta'}\right)}{\left(\frac{dF'}{dr'}\right)} + K d\theta' d\psi' \frac{\left(\frac{dF'}{d\psi'}\right) \left(\frac{d\Phi'}{d\psi'}\right)}{\sin \theta' \left(\frac{dF'}{dr'}\right)} \dots\dots\dots (14)$$

Le rayon vecteur r' est, implicitement, une fonction des deux variables θ' , ψ' qui doit être déterminée par l'équation

$$F(r' \cos \theta', r' \sin \theta' \sin \psi', r' \sin \theta' \cos \psi') = 0.$$

Cette expression générale de $E'd\omega'$ est fort remarquable par sa forme; on y voit, par quelle combinaison les deux fonctions F et Φ' , concourent à la formation du volume différentiel de la couche fictive.

En différentiant l'équation $F(x', y', z') = 0$, on obtient

$$p' = -\frac{\left(\frac{dF}{dx'}\right)}{\left(\frac{dF}{dz'}\right)}; \quad q' = -\frac{\left(\frac{dF}{dy'}\right)}{\left(\frac{dF}{dz'}\right)}.$$

Ainsi, au lieu de l'équation (6), nous avons

$$E'd\omega' = \frac{K d\lambda' \left\{ \left(\frac{dF'}{dz'}\right) \frac{d\Phi'}{dz'} + \left(\frac{dF'}{dy'}\right) \frac{d\Phi'}{dy'} + \left(\frac{dF'}{dx'}\right) \frac{d\Phi'}{dx'} \right\}}{\frac{z'}{r'} \left(\frac{dF'}{dz'}\right) + \frac{y'}{r'} \left(\frac{dF'}{dy'}\right) + \frac{x'}{r'} \left(\frac{dF'}{dx'}\right)}.$$

En différentiant la fonction $F(x', y', z')$ par rapport à x' , y' , z' ; et ensuite par rapport aux coordonnées polaires r' , θ' , ψ' on obtient l'équation

§ III.

Remarquons maintenant que l'équation aux différences partielles (2) est satisfaite par la fonction

$$\varphi = r'^m f(\theta', \psi'); \dots\dots\dots (15)$$

m étant un nombre entier positif, et la fonction $f(\theta', \psi')$ telle que l'on ait identiquement:

$$0 = m(m+1) \sin \theta' f(\theta', \psi') + \frac{d^2 f(\theta', \psi')}{\sin \theta' d\psi'^2} \left\{ \dots\dots (16) \right. \\ \left. + \frac{d}{d\theta'} \left\{ \sin \theta' \frac{d f(\theta', \psi')}{d\theta'} \right\} \right\}$$

Ainsi, en substituant dans l'équation (14) au lieu de φ' sa valeur donnée par l'équation (15), l'on aura

$$E'd\omega' = m K r'^{m+1} \sin \theta' d\theta' d\psi' f(\theta', \psi') \\ + K r'^m \sin \theta' d\theta' d\psi' \frac{\left(\frac{dF}{d\theta'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\theta'}}{\left(\frac{dF}{dr'}\right)} \left\{ \dots\dots (17) \right. \\ \left. + K r'^m d\theta' d\psi' \frac{\left(\frac{dF}{d\psi'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\psi'}}{\sin \theta' \left(\frac{dF}{dr'}\right)} \right\} \\ - \frac{K}{m+1} d\psi' r'^{m+1} \sin \theta' \frac{d^2 f(\theta', \psi')}{d\theta'^2} + K d\psi' \int d\theta' \sin \theta' r'^m \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\theta'}.$$

Si le rayon vecteur r' est tel que sa puissance r'^{m+1} n'a pas $\sin \theta'$ pour diviseur, il est clair, que le premier terme de ce binôme devient nul aux deux limites $\theta' = 0$, $\theta' = \pi$. Et comme on doit former la valeur de $\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)$ en traitant la variable ψ' comme quantité constante, l'on a, en différentiant l'équation de la surface par rapport à r' et θ' ;

$$\left(\frac{dF}{dr'}\right) dr' + \left(\frac{dF}{d\theta'}\right) d\theta' = 0;$$

$$SE'd\omega' = K \int_0^\pi \frac{d\theta'}{\sin \theta'} \int_0^{2\pi} d\psi' \cdot r'^m \frac{\left(\frac{dF}{d\psi'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\psi'}}{\left(\frac{dF}{dr'}\right)} - \frac{K}{m+1} \int_0^\pi \frac{d\theta'}{\sin \theta'} \int_0^{2\pi} d\psi' \cdot r'^{m+1} \frac{d^2 f(\theta', \psi')}{d\psi'^2} \dots\dots\dots (20)$$

En intégrant par partie le second terme de cette expression par rapport à la variable ψ' , on aura

$$r'^{m+1} \frac{d f(\theta', \psi')}{d\psi'} - (m+1) \int_0^{2\pi} r'^m \left(\frac{dr'}{d\psi'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\psi'} d\psi'.$$

Le produit $r'^{m+1} \frac{d f(\theta', \psi')}{d\psi'}$ devient nul aux deux limites $\psi' = 0$, $\psi' = 2\pi$ par la nature de la fonction $f(\theta', \psi')$ qui satisfait à l'équation (16) (voyez le terme général de cette

En éliminant de cette équation le produit $m \sin \theta' f(\theta', \psi')$ à l'aide de l'équation (16), nous aurons

$$E'd\omega' = \frac{-K}{m+1} d\theta' d\psi' r'^{m+1} \frac{d}{d\theta'} \left\{ \sin \theta' \frac{d f(\theta', \psi')}{d\theta'} \right\} \\ + K r'^m \sin \theta' d\theta' d\psi' \frac{\left(\frac{dF}{d\theta'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\theta'}}{\left(\frac{dF}{dr'}\right)} \\ + K r'^m d\theta' d\psi' \frac{\left(\frac{dF}{d\psi'}\right) \frac{d f(\theta', \psi')}{d\psi'}}{\sin \theta' \left(\frac{dF}{dr'}\right)} \\ - \frac{K}{m+1} d\theta' d\psi' r'^{m+1} \frac{d^2 f(\theta', \psi')}{\sin \theta' d\psi'^2} \dots\dots (18)$$

Si la surface extérieure du corps dont il est ici question est fermée de toutes parts, le volume total $SE'd\omega'$ de la couche, s'obtiendra en intégrant entre les limites $\theta' = 0$, $\theta' = \pi$, $\psi' = 0$, $\psi' = 2\pi$. Or, en intégrant par partie le premier terme de cette expression de $E'd\omega'$, par rapport à la variable θ' , l'on a le binôme

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right) = - \frac{\left(\frac{dF}{d\theta'}\right)}{\left(\frac{dF}{dr'}\right)}.$$

Donc, dans la valeur de l'intégrale $SE'd\omega'$, le premier et le second terme du second membre de l'équation (18) disparaissent et l'on a, en général,

fonction à la page 270 du second Volume des Exercices du Cal. Int. par Legendre) et la valeur de $\left(\frac{dr'}{d\psi'}\right)$ devant être tirée de l'équation

$$\left(\frac{dF}{dr'}\right) dr' + \left(\frac{dF}{d\psi'}\right) d\psi' = 0,$$

qui donne

$$\left(\frac{dr'}{d\psi'}\right) = - \frac{\left(\frac{dF}{d\psi'}\right)}{\left(\frac{dF}{dr'}\right)}, \dots\dots\dots (21)$$

il est manifeste que les deux termes du second membre de l'équation (20) se détruisent: de sorte que, en dernière analyse, la vérité de l'équation (9) est démontrée. En outre, il est démontré, que l'équation (14) est équivalente à celle-ci:

$$E'd\omega' = K \sin \theta' d\theta' d\psi' \left\{ r'^2 \left(\frac{d\phi'}{dr'} \right) - \left(\frac{dr'}{d\theta'} \right) \left(\frac{d\phi'}{d\theta'} \right) - \frac{\left(\frac{dr'}{d\psi'} \right) \left(\frac{d\phi'}{d\psi'} \right)}{\sin^2 \theta'} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

On peut même donner une plus grande extension à cette démonstration, en observant que l'équation (16) subsiste en y remplaçant m par $-m-1$, et la fonction $f(\theta', \psi')$ par une fonction différente $\Pi(\theta', \psi')$. Alors, le passage de l'équation (18) à l'équation (20) subsistera, pourvu que le produit $r^{-m} \sin \theta'$ demeure nul aux deux limites $\theta' = 0$, $\theta' = \pi$. La destruction des deux termes qui constituent le second membre de l'équation (20) subsiste encore par le changement de m en $-m-1$. Ainsi, l'équation $SE'd\omega' = 0$ est démontrée, en prenant pour la fonction ϕ' ;

$$\phi' = r'^m f(\theta', \psi') + \frac{1}{r'^{m+1}} \Pi(\theta', \psi'), \dots\dots\dots (23)$$

où f et Π désignent deux fonctions arbitraires des deux variables θ' et ψ' . Par cette extension donnée à l'équation (15), il est possible de résoudre des problèmes plus compliqués. C'est ainsi, par exemple, que l'on peut déterminer la loi de la distribution du magnétisme dans une sphère creuse de

$$\phi' = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x' \sin \theta' d\theta' d\psi' f \left\{ \frac{y' + x' \sin \theta' \sin \psi' \sqrt{-1}}{z' + x' \sin \theta' \cos \psi' \sqrt{-1}} \right\} + \frac{d}{dx'} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x' \sin \theta' d\theta' d\psi' F \left\{ \frac{y' + x' \sin \theta' \sin \psi' \sqrt{-1}}{z' + x' \sin \theta' \cos \psi' \sqrt{-1}} \right\} \dots (25)$$

publiée par *Poisson* en 1819 dans le Tome III. des Mémoires de l'Institut de France: où f, F , désignent deux fonctions arbitraires des deux binômes imaginaires.

La forme du second membre de l'équation (22) suffit pour démontrer que les élémens $E'd\omega'$ de l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} E'd\omega'$$

ne sont pas égaux deux à deux et de signe

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} E'd\omega' = 0$$

contraire. De sorte que l'existence de l'équation

tient, ainsi qu'on vient de le voir, à des argumens différens de ceux qui, indépendans de toute intégration, seraient seulement appuyés sur les élémens $d\omega'$ et les valeurs correspondantes de E' fournies par l'équation (1).

Dans le cas particulier des barreaux aimantés à saturation par la méthode de la double touche, on a aussi cette égalité à zéro, en vertu d'une évidente égalité (avec des signes opposés) entre les intensités E' correspondantes à deux sections également éloignées des deux extrémités du

fer doux aimantée par la force magnétique qui émane du globe terrestre. Le nombre m , pouvant être 0, 1, 2, 3, etc. à l'infini, il est clair que l'on peut étendre la démonstration à la fonction

$$\phi' = \sum_0^\infty r'^m f_{(m)}(\theta', \psi') + \sum_0^\infty \frac{1}{r'^{m+1}} \Pi_{(m)}(\theta', \psi'); \dots (24)$$

en considérant $f_{(0)}, f_{(1)}, f_{(2)},$ etc.; $\Pi_{(0)}, \Pi_{(1)}, \Pi_{(2)},$ etc. comme autant de fonctions arbitraires des deux variables θ' et ψ' . Toutefois, je me hâte d'ajouter, que l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2\phi'}{dx'^2} + \frac{d^2\phi'}{dy'^2} + \frac{d^2\phi'}{dz'^2} = 0$$

ne saurait renfermer plus de deux fonctions arbitraires. En force de principe, on doit regarder le second membre de l'équation (24) comme une transformation, par les séries, de l'intégrale complète sous forme finie,

barreau. Car *Mr. Biot* (voyez la page 77 du Tome 3^{ème} de son grand Traité de Physique) a trouvé, par expérience, que dans ce cas, la loi des intensités E' est exprimée par la formule

$$E' = A(\mu^x - \mu^{2l-x});$$

où A désigne un coefficient constant, et $2l$ la longueur totale du barreau.

§ IV.

C'est en vertu de l'équation $SE'd\omega' = 0$, que la valeur de

$$Q = \int \frac{E'd\omega'}{\rho},$$

développée suivant les puissances réciproques de la distance r du point attiré ou repoussé au centre de gravité de tout corps homogène aimanté par influence, ne contient pas le terme divisé par la première puissance de r , et que le premier terme de ce développement est divisé par le carré de r . Car en posant, d'après un principe connu

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} F_{(1)} + \frac{r'^2}{r^3} F_{(2)} + \text{etc.}$$

l'on a

$$\int \frac{E'd\omega'}{\rho} = \frac{1}{r} \int E'd\omega' + \frac{1}{r^2} \int E'd\omega' \cdot r' Y'_{(1)} + \text{etc.}$$

Et comme $\int E'd\omega' = 0$, le premier terme disparaît; ce qui donne

$$Q = \frac{1}{r^2} \int E'd\omega' \cdot r' Y'_{(1)} + \frac{1}{r^3} \int E'd\omega' \cdot r'^2 Y'_{(2)} + \text{etc.}$$

La composante $-\left(\frac{dQ}{dr}\right)$ de la force émanée du corps aimanté (dirigée suivant la distance r) commence donc par un terme qui varie en raison inverse du cube de la distance.

Ainsi, il y a une connexion intime entre ce principe, qui appartient à la fois à la Physique et à la Mécanique rationnelle, et l'équation $SE'd\omega' = 0$, qui est un pur résultat de l'intégration opérée sur les formules primitives.

Si l'on admettait que la couche fictive doit être formée en disséminant sur la surface du corps aimanté la totalité du fluide libre contenu dans chacun de ses éléments magnétiques, l'équation $SE'd\omega' = 0$ serait évidente a priori. Mais une telle manière de voir n'exclut pas la nécessité de démontrer que cette égalité est une conséquence forcée de l'intégration.

Article Second.

Application des formules (7), (8), et (22) à une sphère de fer doux aimantée par la force magnétique, constante en grandeur et en direction, qui émane du globe terrestre.

§ I.

Puisque le rayon vecteur r' appartient à une surface sphérique, l'on a $\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right) = 0$, $\left(\frac{dr'}{d\psi'}\right) = 0$, ce qui réduit la formule (22) à

$$E'd\omega' = Kr'^2 \left(\frac{d\Phi'}{dr'}\right) \sin \theta' d\theta' d\psi'.$$

$$Q = 4\pi K \left\{ \frac{1}{3} r U_{(1)} + \frac{2}{5} r^2 U_{(2)} + \frac{3}{7} r^3 U_{(3)} + \dots + \frac{i}{2i+1} U_{(i)} + \text{etc.} \right\} \quad (8)$$

où $U_{(i)}$ représente ce que devient la fonction $U'_{(i)}$ après avoir remplacé θ' par θ et ψ' par ψ .

La même équation (7), en y remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par la série (4), donne par l'intégration

$$Q = \frac{4\pi K \cdot r'^3}{r^2} \left\{ \frac{1}{3} U_{(1)} + \frac{2}{5} \frac{r'^2}{r} U_{(2)} + \dots + \frac{i}{(2i+1)} \cdot \frac{r'^{2i-2}}{r^{i-1}} U_{(i)} + \text{etc.} \right\} \quad (9)$$

La série (8) est applicable à tout point intérieur à la sphère, et la série (9) à tout point qui lui est extérieur.

§ II.

Cela posé, si l'on nomme A, B, C les trois composantes rectangulaires de la force magnétique de la Terre, il faudra pour que l'équilibre magnétique de la sphère, en repos, puisse avoir lieu, que l'équation

En faisant

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta \sin \psi; \quad z = r \sin \theta \cos \psi; \\ \cos \varepsilon = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cos (\psi - \psi') \quad \dots \dots (1)$$

la formule (8) devient

$$\frac{1}{\rho} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots \dots (2)$$

En développant ce radical, successivement, suivant les puissances de $\frac{1}{r}$ et de $\frac{1}{r'}$, l'on a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r'} + \frac{r'}{r'^2} Y'_{(1)} + \frac{r'^2}{r'^3} Y'_{(2)} + \frac{r'^3}{r'^4} Y'_{(3)} + \text{etc.}; \dots (3)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} Y'_{(1)} + \frac{r'^2}{r^3} Y'_{(2)} + \frac{r'^3}{r^4} Y'_{(3)} + \text{etc.}; \dots (4)$$

où $Y'_{(1)}, Y'_{(2)}$ etc. sont des fonctions connues de $\cos \varepsilon$. Cela posé, si l'on réduit la formule (23) au seul premier terme, l'expression de Φ' sera

$$\Phi' = r' U'_{(1)} + r'^2 U'_{(2)} + r'^3 U'_{(3)} + r'^4 U'_{(4)} + \text{etc.}; \dots (5)$$

et par conséquent l'on a:

$$\left(\frac{d\Phi'}{dr'}\right) = U'_{(1)} + 2r' U'_{(2)} + 3r'^2 U'_{(3)} + 4r'^3 U'_{(4)} + \text{etc.} (6)$$

Les fonctions $U'_{(1)}, U'_{(2)}$ etc. des deux variables θ', ψ' doivent satisfaire, séparément, à l'équation (16), et leur forme générale est connue.

La formule (7) donne dans ce cas

$$Q = \int \frac{E'd\omega'}{\rho} = Kr'^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Phi'}{dr'}\right) \frac{\sin \theta' d\theta' d\psi'}{\rho} \quad \dots (7)$$

En remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par la série (3) et intégrant ensuite, à l'aide des deux théorèmes connus sur ces intégrales définies doubles, l'on aura

$$Ax + By + Cz + \frac{4\pi}{3} (1-K) \Phi + Q = 0 \quad \dots (10)$$

soit satisfaite par identité; x, y, z étant les coordonnées appartenantes à une molécule quelconque de fluide magnétique libre placée dans son intérieur. Donc, en remplaçant Q

par sa valeur en série convergente donnée par l'équation (8), nous aurons entre les coordonnées polaires :

$$\left. \begin{aligned} r(A \cos \theta + B \sin \theta \sin \psi + C \sin \theta \cos \psi) \\ + \frac{4\pi}{3} (1-K) r \left\{ U_{(1)} + r C_{(2)} + r^2 U_{(3)} + \text{etc.} \right\} \\ + 4\pi K r \left\{ \frac{1}{3} U_{(1)} + \frac{2}{5} r U_{(2)} + \frac{3}{7} r^2 U_{(3)} + \text{etc.} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Or il est évident que cette équation ne peut être satisfaite par identité, sans avoir

$$U_{(2)} = 0, \quad U_{(3)} = 0, \text{ etc.}$$

Alors l'on a

$$\frac{4\pi}{3} U_{(1)} = -A \cos \theta - B \sin \theta \sin \psi - C \sin \theta \cos \psi,$$

et l'équation (9) devient

$$Q = -\frac{K r^3}{r^2} (A \cos \theta + B \sin \theta \sin \psi + C \sin \theta \cos \psi) \dots (12)$$

ou bien

$$Q = -\frac{K a^3}{r^3} (Ax + By + Cz), \dots (13)$$

Donc, si la distance r est peu différente du rayon a de la sphère, la force directrice sera affaiblie dans le rapport de la fraction $1 - K \frac{a^3}{r^3}$ à l'unité.

Si la Lune est susceptible d'être aimantée par influence sous l'action magnétique de la Terre, et si la petitesse du facteur $\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{1}{60^3}$, ne rend pas insensibles les effets d'une telle cause, on pourra reconnaître s'ils sont conformes

$$E' d\omega' = -\frac{3K}{4\pi} a^2 \sin \theta' d\theta' d\psi' (A \cos \theta' + B \sin \theta' \sin \psi' + C \sin \theta' \cos \psi').$$

La seconde des formules (7) du Premier Article donne

$$Q = -\frac{3K}{4\pi} \iiint \left[A \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dx'} + B \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dy'} + C \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{dz'} \right] dx' dy' dz',$$

en observant que l'on a

$$\phi' = r' U_{(1)} = -\frac{3}{4\pi} (Ax' + By' + Cz').$$

Ainsi, chaque élément $dx' dy' dz'$ du volume de la sphère aimantée par influence exerce sur les points magnétiques extérieurs une force telle; que en nommant dX , dY , dZ ses composantes, et posant, pour plus de simplicité,

$$\rho = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]};$$

$$q = A \frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{dx'} + B \frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{dy'} + C \frac{d \cdot \frac{1}{\rho}}{dz'},$$

en écrivant a au lieu du rayon r' de la sphère. Il suit de là que les composantes

$$X = -\frac{dQ}{dx}, \quad Y = -\frac{dQ}{dy}, \quad Z = -\frac{dQ}{dz}$$

de la force émanée de la sphère aimantée par influence pour faire mouvoir un point de fluide boréal libre qui lui est extérieur (ou le pôle d'une aiguille de boussole) sont exprimées par les formules suivantes:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{K a^3}{r^3} \left\{ A - \frac{3x}{r^2} (Ax + By + Cz) \right\}; \\ Y &= \frac{K a^3}{r^3} \left\{ B - \frac{3y}{r^2} (Ax + By + Cz) \right\}; \\ Z &= \frac{K a^3}{r^3} \left\{ C - \frac{3z}{r^2} (Ax + By + Cz) \right\}. \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Si le point attiré est situé dans le plan ayant pour équation $Ax + By + Cz = 0$; c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à la direction de la force magnétique qui émane du globe terrestre, la résultante totale sera proportionnelle à cette dernière force, puisque

$$\sqrt{(-A+X)^2 + (-B+Y)^2 + (-C+Z)^2} = \left(1 - K \frac{a^3}{r^3}\right) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

aux formules (14). Sur ce point, il convient de consulter les observations publiées par Mr. *J. A. Brown* dans le XIXème Volume des Transactions of Edinburgh.

§ III.

Le volume différentiel $E' d\omega'$ de la couche fictive de magnétisme libre a donc, dans le cas de la sphère, une expression analytique fort simple, puisque l'on a

$$dX = \frac{3K}{4\pi} \left(\frac{dq}{dx} \right) dx' dy' dz';$$

$$dY = \frac{3K}{4\pi} \left(\frac{dq}{dy} \right) dx' dy' dz';$$

$$dZ = \frac{3K}{4\pi} \left(\frac{dq}{dz} \right) dx' dy' dz'.$$

l'on a :

Les élémens $dx' dy' dz'$ d'une sphère conductrice électrisée n'exercent aucune force au dehors; toute la force qui en émane est due à la couche électrique qui couvre sa surface que nous supposons isolée. Cette différence entre l'électricité statique et le magnétisme est ainsi clairement établie par la théorie. Les Physiciens qui adoptent le principe de la négation de l'action à distance expliquent le fait d'une autre manière; mais l'expression analytique des forces élémentaires demeure toujours la même.

En réfléchissant sur l'ensemble de cette analyse on reconnaît que la possibilité de déterminer complètement la fonction Φ' tient à l'existence de l'équation (11) par laquelle on exprime l'équilibre magnétique. Sans cette condition, le problème serait indéterminé.

§ IV.

L'action d'une sphère sur les points extérieurs change, si elle acquiert au mouvement de rotation uniforme autour d'un axe. C'est un fait, que Mr. *P. Barlow* a fait connaître le premier par expérience. Pour adapter les formules (14) au cas d'une sphère qui aurait une vitesse angulaire n autour de l'axe des x qui passe par son centre, il suffit d'y remplacer

$$B \text{ par } BM + CN;$$

$$\text{et } C \text{ par } CM - BN;$$

où M et N sont deux coefficients variables dans les premiers momens du mouvement; mais qui deviennent sensiblement constans après un temps très-court. On démontre par la théorie de ce phénomène, que, dans l'état permanent, ces mêmes coefficients sont tels, que

$$M = \int_0^x dx \cos nx \frac{d \cdot f(x)}{dx}; \quad N = \int_0^x dx \sin nx \frac{d \cdot f(x)}{dx}.$$

La fonction $f(x)$ est inconnue; mais, par sa nature, elle doit acquérir des valeurs sensiblement constantes dès que la variable x dépasse une certaine limite x' , qui est fort petite.

A cette limite l'on a $f(x') = 1$. Et comme pour toute autre valeur de x plus grande que x' l'on aurait encore

$$f(x) = 1; \quad \frac{d \cdot f(x)}{dx} = 0;$$

on peut substituer l'infini à la limite x' , et dire que l'on a:

$$M = \int_0^\infty dx \cos nx \frac{d \cdot f(x)}{dx}; \quad N = \int_0^\infty dx \sin nx \frac{d \cdot f(x)}{dx}.$$

Le coefficient M est, en général, très-peu différent de l'unité positive, et le coefficient N , qui est aussi positif, a une valeur à-peu-près proportionnelle à la vitesse angulaire n .

Ces formules sont dues à *Poisson*; ainsi qu'il le dit aux pages 57 et 58 de son Mémoire sur la Théorie du Magnétisme en mouvement, elles s'accordent avec les expériences de Mr. *P. Barlow*. On sait, par les expériences de Mr. *Faraday*, que l'acte de la rotation, en présence des aimans, fait naître des courants électriques continus. Mais la découverte de ces courants change seulement la manière de voir la cause de ces phénomènes, et n'apporte aucun changement dans les formules auxquelles *Poisson* est parvenu pour en calculer a priori les effets, après avoir déterminé, par expérience, les deux coefficients M et N . C'est sur quoi il serait fort intéressant de faire des expériences comparatives; sur-tout avec des sphères pleines et creuses de fer doux, et de cuivre. Quelle que soit l'action des courants d'induction développés par le magnétisme terrestre; on verra que la déviation exercée sur une aiguille aimantée est conforme aux formules de *Poisson*. Relativement aux sphères en repos, pleines et creuses, il y a une condition nécessaire pour que la différence de leur action soit insensible: il est impossible qu'elle soit complètement nulle. Sur ce point il faut lire les pages 86 et 87 du premier Mémoire de *Poisson* publié dans le Tome V de l'Académie des Sciences de Paris.

Jean Plana.

I n h a l t.

- (Zu Nr. 924). Beobachtungen, Elemente und Ephemeride der Polyhymnia und Beobachtungen der Pomona auf der Berliner Sternwarte 177. — Elemente und Ephemeride des Planeten (31) 179. — Aus einem Schreiben des Herrn *Ferguson* an Herrn Professor *Hansen* 181. — Observations of Psyche, Themis, Proserpine, IV. Comet 1854 and Euphrosyne 181. — Beobachtungen der Egeria und der Euphrosyne auf der Hamburger Sternwarte 185. — Beobachtungen des Cometen IV. 1854 mit dem Königsberger Heliometer 187. — Fortsetzung der Beobachtungen des Cometen IV. 1854 auf der Altonaer Sternwarte 187. — Beobachtungen auf der Wiener Sternwarte 189. — Anzeige 191. —
- (Zu Nr. 925). Ueber den Einfluss der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Bewegung des freihangenden Pendels 193. — Elemente und Ephemeride der Pomona 207. —