Versuch einer neuen Entwicklung der Hamilton'schen Methode, genannt „Calculus of Quaternions“.

Von

GÖRAN DILLNER,

Adj. Professor in Upsala

Die Methode Hamilton's lässt sich auf vier Fundamentalgesetze der räumlichen Complexgrössen begründen: 1) das associative Gesetz, 2) das Gesetz der Conjugirten eines Productes, 3) das Gesetz der Rechnung in doppeltem Axensysteme, 4) das distributive Gesetz. Die unter 1), 2) und 4) erwähnten Gesetze hat Hamilton auf den Begriff einer Quaterne begründet, welcher Umstand, weil die Quaterne ein abgeleiteter Begriff ist (= dem Producte zweier räumlichen Complexen), die ganze Entwicklungsweise ziemlich schwierig macht; hier sind diese drei Fundamentalgesetze auf den ursprünglichen Begriff einer räumlichen Complexen zurückgeführt worden, und dadurch wird ihr Beweis wesentlich erleichtert. Die Entwicklung des dritten Gesetzes fehlt sowohl bei Hamilton als den anderen Schriftstellern, welche über seine Methode geschrieben haben, obgleich dieses Gesetz vorzugsweise der Methode den Charakter eines brauchbaren und kräftigen Instruments für geometrische und mechanische Untersuchungen verleiht. — Ausser den zwei Hauptwerken von Hamilton: *Lectures on Quaternions*, Dublin 1853, und *Elements of Quaternions*, London 1866, ist die folgende Litteratur zu erwähnen: 1) *An elementary Treatise on Quaternions* by Tait, 2^{te} ed., Oxford 1873, 2) *Introduction to Quaternions* by Kelland and Tait, London 1873, zwei Arbeiten, in welchen die Anwendung der Methode in ausgezeichnete Weise durchgeführt worden ist; 3) *Essai sur le calcul des quaternions* par Allégret, Paris 1862; 4) *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* von Hankel, I. Theil, Leipzig 1867; 5) *Théorie élémentaire des quantités complexes* par Houël, IV^{me} partie, *Éléments de la théorie des quaternions*, Paris 1874; 6) *Theorie der Quaternionen* von Unverzagt, Wiesbaden 1876.

Vorbereitende Bemerkungen.

1. Es sei $OXYZ$ ein gegebenes rechtwinkliges Axensystem. Nach den positiven Richtungen der Axen OX , OY , OZ sind von dem Nullpunkte O die respectiven Einheitslängen i , j , k abgesteckt; für diese Einheitslängen, welche wir nachher *Einheitsaxen* oder mit Hamilton kurz *Axen* nennen werden, wird folgendes Multiplicationsgesetz festgestellt:

$$(1) \quad \begin{cases} ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j, \end{cases}$$

d. h. das Product zweier Axen ist gleich der dritten, alle in cyclischer Ordnung genommen, und dieses Product ändert das Vorzeichen, wenn die Ordnung der Factoren geändert wird.

Dieses Gesetz, obgleich von geometrischem Gesichtspunkte ganz conventionell, findet doch in der Mechanik seine Erklärung: es bedeute nämlich der erste Factor i einen Hebelarm, der zweite j eine in dessen Endpunkt eingreifende Kraft; das Product ij repräsentirt also das *Drehungsmoment* um die Axe k . Dieses Moment, als *lineares* betrachtet, soll mit k bezeichnet werden; eine Vertauschung des Hebelarms und der Kraft verwandelt die Drehung in eine entgegengesetzte; also muss das Product ji als lineares Moment mit $-k$ bezeichnet werden. Das Gleiche gilt für die anderen Producte jk und ki .

2. Um das *associative* Gesetz (durch die Identität $(ab)c = a(bc)$ ausgedrückt) für Producte von drei oder mehreren Axen gültig zu machen, ist es nothwendig und hinreichend

$$(2) \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

zu setzen, wodurch die Axen den gemeinschaftlichen analytischen Ausdruck $\sqrt{-1}$ bekommen. Nach diesem Gesetze haben wir also $i(ij) = (ii)j = -j$ u. s. w.

3. Es seien x , y , z gewöhnliche Coordinaten; dann bezeichnet die Summe $ix + jy + kz$ einen Punkt im Raume, welcher auch durch eine der Richtung und Länge nach bestimmte Gerade α bezeichnet werden kann. Setzen wir somit

$$(3) \quad \alpha = ix + jy + kz,$$

so wird α eine *räumliche Complex* (*Triplex*) oder ein „*Vector*“ genannt. Der mit α bezeichnete Punkt wird der Punkt α oder (wie gewöhnlich) der Punkt (xyz) genannt. Die Zeichen $T\alpha$ und $U\alpha$, „*Tensor*“ und *Einheitsvector* genannt, bedeuten resp. die absolute Grösse von α und den Vector α mit der absoluten Grösse 1. Wir haben also

$$(4) \quad T\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und, wenn l, m, n die Winkel des Vectors mit den resp. Axen i, j, k bezeichnen:

$$(5) \quad U\alpha = i \cos l + j \cos m + k \cos n = \frac{ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\alpha}{T\alpha}.$$

4. Wie in der Theorie der ebenen Complexen bedeutet die Vectorsumme $\beta + \gamma$ einen aus den Stücken β und γ zusammengesetzten Weg, so dass also α in der Gleichung $\alpha = \beta + \gamma$ den Weg bedeutet, welcher gleich der Summe von β und γ ist, oder auch, weil zwei Vektoren von gleicher Grösse und Richtung als *identisch* anzusehen sind, die Diagonale des Parallelogrammes, das aus β und γ als Seiten construirt ist. Hieraus folgt, dass eine Summe von Vektoren $\Sigma\alpha = 0$ in *geometrischer Hinsicht* ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten die Summanden sind, und, in *mechanischer Hinsicht*, das Gleichgewicht der von den Summanden repräsentirten Kräfte bedeutet. In einer solchen Summe ist die Ordnung der Summanden gleichgültig; ferner gelten für sie die Gleichungsaxiome „Gleiches zu Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches“, „Gleiches mit gleichen Zahlen multiplicirt giebt Gleiches“; also ist $\alpha - \beta = \gamma$, $\mu\alpha = \mu\beta + \mu\gamma$, wenn μ eine reelle Zahl ist. Diese Sätze werden hier in derselben Weise bewiesen wie in der Theorie der ebenen Complexen.

Multiplication der Vektoren.

5. Ein Product von Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ wird als *identisch* mit dem algebraischen Multiplicationsresultate derselben definirt, wenn die Vektoren nach (3) in dem Axensysteme (ijk) ausgedrückt worden sind und Rücksicht auf die Gesetze (1) und (2) genommen wird.

Unterscheidet man also die Coordinaten der verschiedenen Vektoren durch Indices, so hat man, wenn W, X, Y, Z reelle Zahlen bezeichnen:

$$(6) \quad \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = (ix_1 + jy_1 + kz_1)(ix_2 + jy_2 + kz_2) \dots (ix_r + jy_r + kz_r) \\ = W + iX + jY + kZ.$$

Unter der Annahme von drei Factoren hat man in dem Multiplicationsresultate *ursprünglich* die dreigliedrigen Axenproducte iii, ij, iik u. s. w., von denen jedes mit einem reellen Coefficienten multiplicirt ist; bei der Multiplicationsordnung $(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3$ werden diese Axenproducte $(ii)i, (ii)j, (ii)k$ u. s. w.; bei der Multiplicationsordnung $\alpha_1(\alpha_2 \alpha_3)$ werden dieselben Producte $i(ii), i(ij), i(ik)$ u. s. w. Also gilt für das dreigliedrige Vectorproduct $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ das *associative* Gesetz, weil dieses Gesetz nach Nr. 2. für die Producte der Axen i, j, k gilt. Dasselbe Raisonement kann auf ein Product von einer beliebigen Anzahl Vektoren ausgedehnt werden*). Wir können also folgendes

*) Vergl. Allégret, Nr. 7 etc.

allgemeine Gesetz, welches von fundamentaler Bedeutung ist, aussprechen:

Das associative Gesetz gilt für ein Product von einer beliebigen Anzahl Vektoren.

6. Ein Product von Vektoren, als zerlegbar in vier Theile [vgl. (6)], wird eine „Quaternion“ oder kürzer eine *Quaterne* genannt. Wenn also ein Product von Vektoren, je zwei in ihrer Reihenfolge zusammengekommen, als ein Product von Quaternen anzusehen ist, so gilt auch das associative Gesetz für ein Product von einer beliebigen Anzahl Quaternen.

7. Das erste Glied W der Quaterne (6), welches reell und ganz unabhängig von dem Axensysteme ist, heisst die *Scaläre**) oder der *algebraische Theil*, die Summe der übrigen drei Glieder, welche ein *Vector* ist, der *geometrische Theil der Quaterne*. Die vier reellen Zahlen W, X, Y, Z nennen wir die *Coordinationen der Quaterne*.

Wir haben also die folgende Bezeichnung:

$$(7) \quad \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = S \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r + V \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r^{**}),$$

wo

$$(8) \quad \begin{cases} S \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = W, \\ V \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = iX + jY + kZ. \end{cases}$$

Eine wesentliche Eigenschaft eines Vectors ist die folgende:

$$(9) \quad V^2 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = - (X^2 + Y^2 + Z^2) = - T^2 V \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r,$$

d. h. das Quadrat eines Vectors ist gleich dem Quadrate seines Tensors, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen.

Die *Conjugirte* eines Productes, bezeichnet mit $K \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$, wird durch folgende Gleichung definirt:

$$(10) \quad K \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = S \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r - V \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r,$$

d. h. als die Differenz zwischen der Scaläre und dem Vector des Productes.

Das Quadrat des Tensors einer Quaterne wird als das Product der Quaterne und ihrer Conjugirten definirt; also ist nach Nr. 5., (8) und (9):

$$(11) \quad T^2 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = (S \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r + V \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r)(S \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r - V \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \\ = S^2 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r - V^2 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Wir sehen also, dass der Tensor einer Quaterne die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate ihrer Coordinationen ist [vergl. (4)].

8. Wie man durch directe Multiplication findet, hat man gleichzeitig:

*) Quantitas „scalaris“.

**) Wenn die Deutlichkeit es fordert, setze man eine Parenthese nach S und V und analoge Zeichen, um den Umfang solcher Zeichen anzudeuten.

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 = S \alpha_1 \alpha_2 + V \alpha_1 \alpha_2, \\ (-1)^2 \alpha_2 \alpha_1 = S \alpha_1 \alpha_2 - V \alpha_1 \alpha_2. \end{cases}$$

Wir nehmen jetzt an, dass dieses Gesetz für ein Product von $(r-1)$ Vectoren gilt, oder dass wir gleichzeitig haben:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} &= S \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} + V \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}, \\ (-1)^{r-1} \alpha_{r-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1 &= S \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} - V \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}. \end{aligned}$$

Wir wollen dann beweisen, dass dasselbe Gesetz ebenso für ein Product von r Vectoren gilt.

Wir setzen nach (6):

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} = \omega + i\xi + j\eta + k\xi;$$

dann bekommen wir durch Multiplication mit $\alpha_r = ix_r + jy_r + kz_r$ folgendes Resultat:

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{r-1} \alpha_r = \omega \alpha_r - (\xi x_r + \eta y_r + \xi z_r) + \begin{vmatrix} i & \xi & x_r \\ j & \eta & y_r \\ k & \xi & z_r \end{vmatrix}.$$

Ferner ist nach der Voraussetzung:

$$(-1)^{r-1} \alpha_{r-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1 = \omega - (i\xi + j\eta + k\xi);$$

durch Multiplication mit $-\alpha_r$ ergibt sich das Resultat:

$$(-1)^r \alpha_r \alpha_{r-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1 = -\alpha_r \omega - (x_r \xi + y_r \eta + z_r \xi) + \begin{vmatrix} i & x_r & \xi \\ j & y_r & \eta \\ k & z_r & \xi \end{vmatrix},$$

und somit erhalten wir durch Vergleichung mit dem vorigen Multiplicationsresultate:

$$(13) \quad (-1)^r \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1 = S \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r - V \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = K \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r.$$

Aber nach (12) ist diese Formel richtig für $r=2$, also ist sie richtig für $r=3$, und im Allgemeinen für r = einer beliebigen ganzen pos. Zahl.

Wir können also folgenden allgemeinen Satz, welcher von fundamentalen Bedeutung ist, aussprechen: *die Conjugirte eines Productes von einer beliebigen Anzahl Vectoren ist gleich dem Producte derselben Vectoren, alle mit entgegengesetztem Vorzeichen und in umgekehrter Ordnung genommen.*

Dieses Fundamentalgesetz werden wir das *Gesetz der Conjugirten eines Productes* nennen.

9. Wenn die Anzahl der Vectoren in (13) gerade oder $r=2n$ ist, und die Producte von je zwei Vectoren mit den Quaternen $q_1, q_2, \cdots q_n$ bezeichnet werden, bekommen wir folgende sehr wichtige Formel:

$$(14) \quad K q_1 q_2 \cdots q_n = K q_n \cdots K q_2 K q_1,$$

d. h. die *Conjugirte eines Productes von Quaternen ist gleich dem Producte der Conjugirten der Quaternen in umgekehrter Ordnung genommen.*

10. Durch Multiplication der Formeln (7) und (13) bekommen wir nach (9) und (11), mit Hülfe des associativen Gesetzes, folgendes Resultat:

$$(15) \quad T^2 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2 \cdots T^2 \alpha_r,$$

d. h. (nach Ausziehung der Quadratwurzel) *der Tensor eines Productes von Vektoren ist gleich dem Producte der Tensoren derselben Vektoren.*

Durch Multiplication des Quaternenproductes $q_1 q_2 \cdots q_n$ mit der Conjugirten dieses Productes in (14) bekommen wir nach (11) und Nr. 6.:

$$(16) \quad T^2 q_1 q_2 \cdots q_n = T^2 q_1 T^2 q_2 \cdots T^2 q_n,$$

d. h. (nach Ausziehung der Quadratwurzel) *der Tensor des Productes von Quaternen ist gleich dem Producte der Tensoren derselben Quaternen.*

Nach den Formeln (15) und (16) können wir also ein Product einer beliebigen Anzahl Summen, deren Summanden drei oder vier Quadrate sind, als eine Summe von vier Quadraten ausdrücken, wie wir in den folgenden Beispielen sehen werden.

Ex. 1. In (15) haben wir für $r = 2$:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \\ = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

Ex. 2. In (16) bekommen wir für $n = 2$, wenn wir $q_1 = w_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1$ und $q_2 = w_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2$ setzen, folgende Formel [von Euler gegeben]:

$$(w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2)^2 + (w_1 x_2 + w_2 x_1 + y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 \\ + (w_1 y_2 + w_2 y_1 + z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (w_1 z_2 + z_1 w_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \\ = (w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (w_2^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

Von diesen Beispielen können wir auf die grosse algebraische Umfassung der Formeln (15) und (16) schliessen.

11. Durch Addition und Subtraction der Formeln (7) und (13) bekommen wir:

$$(17) \quad \begin{cases} 2 S \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r + (-1)^r \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1, \\ 2 V \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r - (-1)^r \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1, \end{cases}$$

eine Formel von grosser Bedeutung in den folgenden Reductionen.

Aus (13) erhalten wir ferner:

$$(18) \quad \begin{cases} S \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = (-1)^r S \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1, \\ V \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r = (-1)^{r+1} V \alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1, \end{cases}$$

was als ein anderer Ausdruck der Formel (13) anzusehen ist.

12. Der reciproke Werth $\frac{1}{p}$ oder p^{-1} einer Quaterne p wird in algebraischer Weise als die Quantität definirt, welche, multiplicirt mit der Quaterne selbst, eins als Resultat giebt, d. h. $p \cdot \frac{1}{p} = pp^{-1} = 1$.

Nach dieser Definition bekommt man, weil nach (11) $pKp = T^2p$:

$$(19) \quad \frac{1}{p} = p^{-1} = \frac{Kp}{T^2p},$$

d. h. der reciproke Werth einer Quaterne ist gleich ihrer Conjugirten, dividirt durch das Quadrat ihres Tensors.

Die Bedeutung eines Quotienten $\frac{q}{p}$ von Quaternen wird durch die folgende Gleichung angegeben:

$$(20) \quad \frac{q}{p} = q \cdot \frac{1}{p} = qp^{-1} = \frac{qKp}{T^2p}.$$

Wir sehen also, dass die Quotienten von Quaternen unmittelbar unter die Gesetze der Multiplication subsumirt werden können.

Weil der Vector als eine Quaterne, deren Scaläre Null ist, betrachtet werden kann, so gelten auch die Formeln (19) und (20) für die Vektoren α_1 und α_2 statt der Quaternen p und q . Wir haben also, weil nach (10) $K\alpha_1 = -\alpha_1$, folgende Ausdrücke für den reciproken Werth eines Vectors α_1 :

$$(21) \quad \frac{1}{\alpha_1} = \alpha_1^{-1} = \frac{-\alpha_1}{T^2\alpha_1},$$

und für den Quotient zweier Vektoren α_2 und α_1 :

$$(22) \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha_2 \cdot \frac{1}{\alpha_1} = \alpha_2 \alpha_1^{-1} = \frac{-\alpha_2 \alpha_1}{T^2 \alpha_1}.$$

13. Folgender Satz wird als selbstverständlich ausgesprochen, weil eine Scaläre, als eine rein algebraische Grösse, und ein Vector, als eine bestimmte geometrische Grösse, nicht einander aufheben können:

Wenn q eine Quaterne bezeichnet, so kann die Gleichung $q = Sq + Vq = 0$ nicht existiren, ohne dass $Sq = 0$ und $Vq = ix + jy + kz = 0$ ist, welche letztere Gleichung in die drei folgenden zerfällt: $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.

Als eine Folge dieses Satzes haben wir den Satz:

Die Gleichung $q - q' = 0$ oder $q = q'$, wenn $q = w + ix + jy + kz$ und $q' = w' + ix' + jy' + kz'$, kann nicht existiren, wenn nicht $w = w'$, $x = x'$, $y = y'$ und $z = z'$.

Rechnung in doppeltem Axensysteme.

14. Ein Product von Vektoren $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$, in einem gegebenen Axensysteme (i, j, k) ausgeführt, wird mit $^{(s)}\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ bezeichnet; der Index $s = 0$ wird als dem Axensysteme (i, j, k) entsprechend angesehen.

Wir haben also das zweigliedrige Product

$$(23) \quad {}^{(1)}\alpha_1 \alpha_2 = - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

und nach (15)

$$(24) \quad T^2 \alpha_1 \alpha_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 = T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2.$$

Wählen wir jetzt ein anderes Axensystem $(i j k)$ mit demselben Nullpunkte O [Fig. 1] und so gelegen, dass die Axe i längs dem Vector α_1 und das Dreieck $\alpha_1 O \alpha_2$ in der Ebene (ij) liegt; und nennen wir ferner θ den Winkel $\alpha_1 O \alpha_2$, von α_1 nach α_2 gerechnet, so bekommen wir folgendes Multiplicationsresultat:

$$(25) \quad {}^{(0)}\alpha_1 \alpha_2 = i T \alpha_1 (i T \alpha_2 \cos \theta + j T \alpha_2 \sin \theta) \\ = - T \alpha_1 T \alpha_2 \cos \theta + k T \alpha_1 T \alpha_2 \sin \theta.$$

Wir haben nun zu beweisen, dass die in (23) und (25) aufgestellten Multiplicationsresultate *identisch* sind.

Unmittelbar erkennen wir, dass $T \alpha_1 T \alpha_2 \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, und haben somit nach (24), weil $T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2 - T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2 \cos^2 \theta = T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2 \sin^2 \theta$ ist:

$$(26) \quad T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2 \sin^2 \theta = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2.$$

Der Vector $k T \alpha_1 T \alpha_2 \sin \theta$, projicirt auf das Axensystem $(i_1 j_1 k_1)$, giebt, wenn wir seine Coordinaten X, Y, Z nennen:

$$(27) \quad k T \alpha_1 T \alpha_2 \sin \theta = i_1 X + j_1 Y + k_1 Z$$

und in Folge davon [vergl. (4)]:

$$(28) \quad T^2 \alpha_1 T^2 \alpha_2 \sin^2 \theta = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Weil die Axe k senkrecht gegen die Vektoren α_1 und α_2 ist, haben wir die folgenden Gleichungen:

$$x_1 X + y_1 Y + z_1 Z = 0,$$

$$x_2 X + y_2 Y + z_2 Z = 0,$$

woraus mit Hülfe der Formeln (26) und (28) das folgende System von Gleichungen:

$$(29) \quad \frac{X}{y_1 z_2 - z_1 y_2} = \frac{Y}{z_1 x_2 - x_1 z_2} = \frac{Z}{x_1 y_2 - y_1 x_2} = \pm 1$$

Fig. 1.

hervorgeht. Um das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu bestimmen, setzen wir $z_1 = z_2 = 0$, und haben somit nach (27) $T\alpha_1 T\alpha_2 \sin \theta = Z$; wir setzen ferner $x_1 = T\alpha_1 \cos \omega$, $y_1 = T\alpha_1 \sin \omega$, $x_2 = T\alpha_2 \cos \omega'$, $y_2 = T\alpha_2 \sin \omega'$, wovon $x_1 y_2 - y_1 x_2 = T\alpha_1 T\alpha_2 \sin (\omega' - \omega)$; und wenn wir beobachten, dass $\omega' - \omega = \theta$, bekommen wir schliesslich $Z = x_1 y_2 - y_1 x_2$ und also $+$ als Vorzeichen.

Die Formeln (27) und (29), mit der oben aufgestellten Formel für die Scalären zusammengenommen, geben also:

$$(30) \quad \begin{cases} S\alpha_1 \alpha_2 = -T\alpha_1 T\alpha_2 \cos \theta = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \\ V\alpha_1 \alpha_2 = k T\alpha_1 T\alpha_2 \sin \theta = \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

oder, folgendermassen ausgedrückt:

$$(31) \quad {}^{(0)}\alpha_1 \alpha_2 = {}^{(1)}\alpha_1 \alpha_2,$$

d. h. das Product $\alpha_1 \alpha_2$ giebt identische Multiplicationsresultate in dem Axensysteme $(i j k)$ und dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$.

15. Weil das Axensystem $(i_1 j_1 k_1)$ in (31) ganz willkürlich ist, können wir statt desselben ein anderes willkürliches Axensystem $(i_2 j_2 k_2)$ mit demselben Nullpunkte einführen, und haben somit die Identität ${}^{(0)}\alpha_1 \alpha_2 = {}^{(2)}\alpha_1 \alpha_2$ und folglich die Identität

$$(32) \quad {}^{(1)}\alpha_1 \alpha_2 = {}^{(2)}\alpha_1 \alpha_2,$$

d. h. das Product $\alpha_1 \alpha_2$ giebt identische Multiplicationsresultate in den ganz willkürlichen Axensystemen $(i_1 j_1 k_1)$ und $(i_2 j_2 k_2)$.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Vektoren α_1 und α_2 in dem Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ mit resp. ξ_1 , η_1 , ξ_1 und ξ_2 , η_2 , ξ_2 , so bekommen wir folgende Identitäten zwischen Scalären und Vektoren in den zwei verschiedenen Axensystemen:

$$(33) \quad \begin{cases} S\alpha_1 \alpha_2 = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = -(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \xi_1 \xi_2), \\ V\alpha_1 \alpha_2 = \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_2 & \xi_1 & \xi_2 \\ j_2 & \eta_1 & \eta_2 \\ k_2 & \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Bemerkung. Lassen wir das Axensystem $(i_1 j_1 k_1)$ in Verhältniss zu dem Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ als einem festen sich bewegen, so werden die Axen i_1, j_1, k_1 ihrer Richtungen nach veränderliche Grössen; und somit ist die wichtige Entdeckung Hamilton's bewiesen, dass die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ im Allgemeinen eine nach der Richtung veränderliche geometrische Grösse repräsentirt.

16. Wir gehen jetzt dazu über, die Sätze „Gleiches zu Gleichem addirt und Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches“ so zu erweitern, dass sie auch die Quaternen umfassen.

1) Zu diesem Zwecke nehmen wir die Quaternen q und q' in den willkürlichen Axensystemen $(i_1 j_1 k_1)$ und $(i_2 j_2 k_2)$ ausgedrückt an. Nach (32) ist:

$$^{(1)}q = ^{(2)}q \text{ und } ^{(1)}q' = ^{(2)}q'.$$

und folglich nach (33):

$$\left. \begin{aligned} S^{(1)}q &= S^{(2)}q \\ V^{(1)}q &= V^{(2)}q \end{aligned} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{aligned} S^{(1)}q' &= S^{(2)}q' \\ V^{(1)}q' &= V^{(2)}q'. \end{aligned} \right.$$

Unmittelbar ergibt sich $S^{(1)}q + S^{(1)}q' = S^{(2)}q + S^{(2)}q'$; aus der Bedeutung eines Vectors die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, ergibt sich ferner [vergl. Nr. 4.] $V^{(1)}q + V^{(1)}q' = V^{(2)}q + V^{(2)}q'$; also ist der erste Satz bewiesen, nämlich:

$$(34) \quad ^{(1)}q + ^{(1)}q' = ^{(2)}q + ^{(2)}q',$$

d. h. der Satz „*Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches*“ gilt auch für die Quaternen, wenn sie auf jeder Seite des Zeichens = in verschiedenen Axensystemen ausgedrückt sind.

2) Ferner haben wir nach (32) $V^{(1)}q V^{(1)}q' = V^{(2)}q V^{(2)}q'$ und nach (33) und dem vorhergehenden Satze $S^{(1)}q S^{(1)}q' + S^{(1)}q V^{(1)}q' + S^{(1)}q' V^{(1)}q = S^{(2)}q S^{(2)}q' + S^{(2)}q V^{(2)}q' + S^{(2)}q' V^{(2)}q$, woraus nach (34) und der in Nr. 5. gegebenen Definition der Multiplication der Beweis des zweiten Satzes hervorgeht, nämlich:

$$(35) \quad ^{(1)}q ^{(1)}q' = ^{(2)}q ^{(2)}q',$$

d. h. der Satz „*Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches*“ gilt auch für die Quaternen, wenn sie auf jeder Seite des Zeichens = in verschiedenen Axensystemen ausgedrückt sind.

Diese Sätze (34) und (35) gelten auch für die Vektoren, weil diese als Quaternen, deren Scalären Null sind, betrachtet werden können.

17. Multipliciren wir jetzt die Gleichung (32), links mit den Vektoren $\alpha_3, \dots, \alpha_r$, alle in dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ausgedrückt, und rechts mit denselben Vektoren, alle in dem Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ ausgedrückt, so bekommen wir nach (35):

$$(36) \quad ^{(1)}\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = ^{(2)}\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r,$$

wonach wir folgenden allgemeinen Satz von fundamentaler Bedeutung aussprechen können:

Das Product $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ giebt identische Multiplicationsresultate in den ganz willkürlichen Axensystemen $(i_1 j_1 k_1)$ und $(i_2 j_2 k_2)$.

Derselbe Satz gilt auch, wie wir unmittelbar sehen können, für ein Product einer beliebigen Anzahl von Quaternen [vergl. Nr. 6.].

Da es nun ganz gleichgültig ist, in welchem Axensysteme ein Product von Vektoren oder Quaternen ausgeführt wird, so braucht man im Allgemeinen den Index für das Axensystem nicht anzugeben.

18. Es lässt sich im Voraus erkennen, von welcher grossen praktischen Bedeutung in Bezug auf Geometrie und Mechanik dieses Gesetz der Rechnung in doppeltem Axensysteme sein muss; denn jede gewonnene Kenntniss von den Coordinaten in einem gewissen Axensysteme kann hiernach ohne Weiteres durch einfache Multiplication auf die Coordinaten in einem beliebigen Axensysteme übertragen werden. Durch dieses Gesetz kann die Hamilton'sche Methode als eine Geometrie in doppeltem Axensysteme charakterisirt werden.

19. Wir haben jetzt die Formeln aufzustellen, welche die Winkel zwischen den Axen zweier beliebiger Axensysteme (ijk) und $(i_1j_1k_1)$ bestimmen. Es seien

λ, μ, ν die Winkel der Axe i mit den resp. Axen i_1, j_1, k_1 ;

λ', μ', ν' die Winkel der Axe j mit den resp. Axen i_1, j_1, k_1 ;

λ'', μ'', ν'' die Winkel der Axe k mit den resp. Axen i_1, j_1, k_1 .

Nach (5) haben wir also die Formeln:

$$(37) \quad \begin{cases} i = i_1 \cos \lambda + j_1 \cos \mu + k_1 \cos \nu \\ j = i_1 \cos \lambda' + j_1 \cos \mu' + k_1 \cos \nu' \\ k = i_1 \cos \lambda'' + j_1 \cos \mu'' + k_1 \cos \nu'' \end{cases}$$

Wir nennen nun die Coordinaten eines Vectors in den Axensystemen (ijk) und $(i_1j_1k_1)$ resp. x, y, z und ξ, η, ζ . Wir haben somit

$$(38) \quad ix + jy + kz = i_1 \xi + j_1 \eta + k_1 \zeta$$

und folglich mit Hülfe von (37):

$$(39) \quad \begin{cases} \xi = x \cos \lambda + y \cos \lambda' + z \cos \lambda'' \\ \eta = x \cos \mu + y \cos \mu' + z \cos \mu'' \\ \zeta = x \cos \nu + y \cos \nu' + z \cos \nu'' \end{cases}$$

Alle nöthigen Relationen zwischen den betreffenden Winkeln ergeben sich, wenn wir die Gleichungen (37) quadriren, dann die erste mit der anderen multipliciren und das Resultat mit der dritten identificiren, u. s. w. in cyclischer Ordnung.

Das distributive Gesetz.

20. Sind die Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ nach Nr. 5. in dem Axensysteme (ijk) ausgedrückt, so bekommen wir das Product:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_3 = -[(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 + (z_1 + z_2)z_3] + \begin{vmatrix} i x_1 + x_2 x_3 \\ j y_1 + y_2 y_3 \\ k z_1 + z_2 z_3 \end{vmatrix}.$$

Die Producte $\alpha_1 \alpha_3$ und $\alpha_2 \alpha_3$ auf dieselbe Weise entwickelt und addirt, geben identisch dasselbe Resultat, so dass wir die Identität haben:

$$(40) \quad (\alpha_1 + \alpha_2) \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3.$$

In ganz ähnlicher Weise bekommen wir die Identität:

$$(41) \quad \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3.$$

Nach (40) und (41) ergibt sich also folgendes distributive Gesetz:

$$(42) \quad (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4.$$

Wie wir unmittelbar sehen können, lässt sich dieses Gesetz auf zweigliedrige Producte von Summen aus einer beliebigen Anzahl Vektoren in algebraischer Weise ausdehnen.

Als specielle Fälle von (42) wollen wir mit Hülfe von (17) folgende Formeln hervorheben:

$$(43) \quad (\alpha_1 + \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 + 2S\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2,$$

$$(44) \quad (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1^2 + 2V\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2.$$

Um diese Formeln zu beleuchten, wollen wir die folgenden Beispiele behandeln, wobei wir zu bemerken haben, dass die Ausdrücke $\alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_1 - \alpha_2$ resp. die zwischenliegende und gegenüberliegende Diagonale eines Parallelogrammes mit den bestimmenden Seiten α_1 und α_2 bedeuten. Setzen wir $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, so sind α_1 , α_2 und α_3 die drei Seiten eines Dreiecks, dessen gegenüberliegende Winkel wir mit resp. A_1 , A_2 und A_3 bezeichnen.

Beispiel 1. Wir haben $\alpha_3^2 = \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2) \therefore V\alpha_3\alpha_1 = V\alpha_3\alpha_2$ oder nach (25) $T\alpha_1 \sin A_2 = T\alpha_2 \sin A_1$.

Beispiel 2. Nach (43) haben wir mit Hülfe von (25): $T^2\alpha_3 = T^2\alpha_1 - 2T\alpha_1T\alpha_2 \cos A_3 + T^2\alpha_2$.

Beispiel 3. Es sei α_1 ein fester und α_2 ein beweglicher Radius eines Kreises $\therefore T\alpha_1 = T\alpha_2$ und ferner nach (44) mit Hülfe von (25): $S(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, d. h. der Winkel in einem Halbkreise ist ein Rechter. Die Bedeutung der Identität $V(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) = 2V\alpha_1\alpha_2$ ist selbstverständlich.

Beispiele von so elementärer Natur können in unbegrenzter Menge nach dem schon oben bewiesenen distributiven Gesetze behandelt werden [vergl. Introduction to Quaternions by Kelland and Tait].

21. Wir ersetzen die Producte $\alpha_1\alpha_3$ und $\alpha_2\alpha_3$ in (40) durch die Quaternen $w + ix + jy + kz$ und $w' + ix' + jy' + kz'$, und haben somit, wenn α_4 ein Vector ist:

$$(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\alpha_4 = (w + w')\alpha_4 - [(x + x')x_4 + (y + y')y_4 + (z + z')z_4] + \begin{vmatrix} ix + x'x_4 \\ jy + y'y_4 \\ kz + z'z_4 \end{vmatrix}.$$

Ein hiermit identisches Resultat ergibt sich, wenn wir die Summe $(w + ix + jy + kz)\alpha_4 + (w' + ix' + jy' + kz')\alpha_4$ entwickeln. Damit ist also bewiesen, dass

$$(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\alpha_4 = \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Durch Wiederholung desselben Beweises ergibt sich, wenn α_3 ein Vector ist:

$$(45) \quad (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3) \alpha_4 \alpha_5 = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5,$$

u. s. w. für eine beliebige Anzahl Vector-Factoren.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass:

$$(46) \quad \alpha_4 \alpha_5 (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3) = \alpha_4 \alpha_5 \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_4 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_3$$

u. s. w. für eine beliebige Anzahl Vector-Factoren.

Führen wir jetzt in (45) und (46) statt der Producte $\alpha_1 \alpha_3$, $\alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_4 \alpha_5$ die resp. Quaternen p , q , r ein, so ergeben sich die Formeln

$$(p+q)r = pr + qr,$$

$$r(p+q) = rp + rq,$$

und folglich, wenn s eine neue Quaterne bezeichnet:

$$(47) \quad (p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$$

ein Gesetz, welches auf Producte, deren Factoren Summen einer beliebigen Anzahl von Quaternen sind, in ganz algebraischer Weise sich ausdehnen lässt. Wir können also den folgenden allgemeinen Satz, welcher von fundamentaler Natur ist, aussprechen.

Mit Ausnahme des commutativen Gesetzes [von der Gleichgültigkeit der Ordnung der Factoren], gelten alle Gesetze der algebraischen Polynome, welche auf Multiplication begründet sind, ebenso für Vektoren und Quaternen.

22. Erinuert man sich jetzt, dass nach Nr. 12. die Quotienten unter die Gesetze der Producte zu subsumiren sind, so lässt sich der vorhergehende fundamentale Satz auch auf Quotienten von Polynomen unmittelbar übertragen.

23. Bezeichnen p und q Quaternen, so haben wir als selbstverständliche Sätze: 1) $S(p+q) = Sp + Sq$; 2) $V(p+q) = Vp + Vq$; 3) $K(p+q) = Kp + Kq$; und entsprechend für mehrgliedrige Polynome.

Interpretation der Producte von zwei Vektoren.

24. Man erinnere sich, dass nach Nr. 14. das Product $\alpha_1 \alpha_2$, entwickelt in den zwei Axensystemen (ijk) und $(i_1 j_1 k_1)$, identische Resultate liefert, welche nach (23) und (25) die folgenden sind:

$$(48) \quad \alpha_1 \alpha_2 = -T\alpha_1 T\alpha_2 \cos \theta + k T\alpha_1 T\alpha_2 \sin \theta = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

wo die eingehenden Grössen die in Fig. I. angegebene Bedeutung besitzen. Identificiren wir jetzt nach (30) die Vectortheile dieser Formel, und bezeichnen wir mit l , m , n die Winkel der Axe k mit den resp. Axen i_1 , j_1 , k_1 , so ergibt sich nach (39) folgendes System von Gleichungen:

$$(49) \quad \frac{T\alpha_1 T\alpha_2 \sin \theta}{1} = \frac{y_1 z_2 - z_1 y_2}{\cos l} = \frac{z_1 x_2 - x_1 z_2}{\cos m} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\cos n}.$$

Die vier Zähler dieser Ausdrücke bedeuten geometrisch resp. den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha_1 O \alpha_2$ und der Projectionen dieses Dreiecks auf die Ebenen $(j_1 k_1)$, $(i_1 k_1)$, $(i_1 j_1)$, sodass durch die Formel (49) der bekannte Satz von den Projectionen eines Dreiecks auf drei zu einander senkrechten Coordinatenebenen ausgesprochen ist.

In Bezug auf die Mechanik, wenn die Vektoren α_1 und α_2 resp. einen Hebelarm und eine in dessen Endpunkte wirkende Kraft bezeichnen, bedeutet $T\alpha_1 T\alpha_2 \sin \theta$ das *Drehungsmoment um die Axe k*, und der Vector $k T\alpha_1 T\alpha_2 \sin \theta$ das *lineare Moment* nach Grösse und Richtung; in ähnlicher Weise bedeuten $y_1 z_2 - z_1 y_2$, $z_1 x_2 - x_1 z_2$, $x_1 y_2 - y_1 x_2$ resp. die *Drehungsmomente um die Axen i_1, j_1, k_1* und die Vektoren $i_1(y_1 z_2 - z_1 y_2)$, $j_1(z_1 x_2 - x_1 z_2)$, $k_1(x_1 y_2 - y_1 x_2)$ die *linearen Momente* nach ihren Grössen und Richtungen. Die Gleichung zwischen den Vectorthellen der Formel (48) ist also ein Ausdruck des bekannten mechanischen Satzes von den Projectionen eines linearen Momentes auf ein rechtwinkliges Axensystem. Die Scaläre $-T\alpha_1 T\alpha_2 \cos \theta$ repräsentirt mit entgegengesetztem Vorzeichen das *Kraftmoment* oder, wenn der Hebelarm durch den Weg ersetzt wird, die *mechanische Arbeit*.

25. In der Formel (22) haben wir die Bedeutung eines Quotienten von Vektoren erhalten, und diese Formel lässt sich mit Hülfe von (12) und (30) so schreiben:

$$(50) \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha_2 \alpha_1^{-1} = -\frac{\alpha_2 \alpha_1}{T^2 \alpha_1} = -\frac{S\alpha_1 \alpha_2 + V\alpha_1 \alpha_2}{T^2 \alpha_1} = \frac{T\alpha_2}{T\alpha_1} (\cos \theta + k \sin \theta),$$

wo zu bemerken ist, dass nach Nr. 2. die Axe k den analytischen Ausdruck $V - \bar{1}$ besitzt. Bilden wir jetzt eine Quaterne q , ausgedrückt in dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$, $= w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$ mit folgender Bedeutung der Coordinaten und des Tensors:

$$(51) \quad \begin{cases} w = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) : T^2 \alpha_1 \\ x = (y_1 z_2 - z_1 y_2) : T^2 \alpha_1 \\ y = (z_1 x_2 - x_1 z_2) : T^2 \alpha_1 \\ z = (x_1 y_2 - y_1 x_2) : T^2 \alpha_2 \\ r = T\alpha_2 : T\alpha_1 = Tq, \end{cases}$$

so lässt sich mit Hülfe von (48) die Formel (50) so schreiben:

$$(52) \quad \alpha_2 \alpha_1^{-1} = r e^{k\theta} = q = w + i_1 x + j_1 y + k_1 z,$$

und die Conjugirte Kq nach (13) in folgender Weise:

$$(53) \quad \alpha_1^{-1} \alpha_2 = r e^{-k\theta} = Kq = w - (i_1 x + j_1 y + k_1 z).$$

Der *Exponentialausdruck**) $re^{k\theta}$ wird die *reducirte Form der Quaterne* q oder auch die *reducirte Quaterne* q genannt. Der Ausdruck Uq , defnirt durch die Formel $Uq = q : Tq$ und *Einheitsquaterne* genannt [vergl. (5)], hat also die *reducirte Form* $e^{k\theta}$, welche „*Versor*“ genannt worden ist; somit haben wir die folgende Formel:

$$(54) \quad Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + i_1 x + j_1 y + k_1 z}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} = e^{k\theta} = \cos \theta + k \sin \theta.$$

Zwischen den vier Coordinaten w, x, y, z und den fünf Grössen r, θ, l, m, n , von welchen die drei letzten nach (49) die Winkel der Axe k mit den Axen i_1, j_1, k_1 bezeichnen, ergeben sich die Relationen:

$$(55) \quad \begin{cases} r = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ r \cos \theta = w \\ \frac{r \sin \theta}{1} = \frac{x}{\cos l} = \frac{y}{\cos m} = \frac{z}{\cos n}. \end{cases}$$

Die *reducirte Form* $re^{k\theta}$ enthält also, wie unmittelbar zu sehen ist, vier von einander *unabhängige* Grössen, welche *reducirte Coordinaten* der Quaterne q genannt werden sollen.

Der Beweis des Moiver'schen Lehrsatzes lässt sich auf den *Versor* in (54) in bekannter Weise durchführen, *unabhängig davon, ob k eine der Richtung nach constante oder veränderliche Grösse repräsentirt.*

26. Ausser der Bezeichnung $r = Tq$ werden wir folgende Bezeichnungen benutzen:

$$\theta = \sphericalangle q, \quad k = \text{Ax. } q, \quad \text{Dreieck } \alpha_1 O \alpha_2 = \Delta q$$

und nennen θ den *Winkel* oder die „*Amplitude*“, k die „*Axe*“ und Δq das *Dreieck***) der Quaterne q .

27. Ein *Vector* ϱ , betrachtet als specieller Fall einer Quaterne, deren *Scaläre Null* ist, erhält nach (54) folgendermassen seine Bedeutung:

$$(56) \quad U\varrho = \frac{\varrho}{T\varrho} = \frac{i_1 x + j_1 y + k_1 z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = e^{k(\pm \frac{1}{2}\pi)} = \pm k,$$

und aus diesem Gesichtspunkte wird der *reducirte Einheitsvector* ein *quadrantischer Versor***) genannt.

28. Folgende Sätze, begründet darauf, dass ein Dreieck Δq in seiner Grösse und Lage verschiedene Aenderungen erleiden kann, ohne

*) Statt des Exponentialausdruckes $e^{k\theta}$ braucht Hamilton den Ausdruck $k^{\frac{2\theta}{\pi}}$. Dass diese beiden Ausdrücke gleich sind, ergibt sich, wenn man ihre Logarithmen nimmt; also

$$k\theta = \frac{2\theta}{\pi} \log k = \frac{2\theta}{\pi} \cdot k \frac{1}{2} \pi.$$

**) Dieses Dreieck, als bestimmt durch die zwei Vektoren α_1 und α_2 mit demselben Nullpunkte O , wird von Hamilton „*Biradial*“ genannt.

***) Von Hamilton „*Quadrantal Versor*“ genannt.

dass die Coordinaten der Quaterne q sich ändern, können als selbstverständlich ausgesprochen werden.

1) Das Dreieck Δq , als nur der Form nach (durch den Winkel θ und das Verhältniss der denselben einschliessenden Seiten $T\alpha_2 : T\alpha_1$) bestimmt, kann durch ein ähnliches Dreieck von beliebiger Grösse ersetzt werden.

2) Das Dreieck Δq kann in seiner Ebene um die Axe $k = \text{Ax. } q$, um einen beliebigen Winkel gedreht werden.

3) Das Dreieck Δq kann in eine parallele Ebene transportirt werden, wobei die Axe $k = \text{Ax. } q$ ihre Richtung behält [vergl. Nr. 4.].

Die Gleichung zwischen zwei Quaternen

$$q = q'$$

enthält also die Bestimmungen:

$$\Delta q \simeq \Delta q' \text{ und } \text{Ax. } q \parallel \text{Ax. } q' *).$$

29. Um in (52) aus den als gegeben betrachteten vier Coordinaten einer Quaterne $q = w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$ die reducirte Form $re^{k\theta}$ zu construiren, hat man zuerst aus der Gleichung $krsin\theta = i_1 x + j_1 y + k_1 z$ die Richtung der Axe k zu bestimmen; dann werden in einer gegen diese Axe senkrechten und durch den Nullpunkt der Coordinaten gelegten Ebene die Axen i und j gezogen, von denen die erste i ganz willkürlich gerichtet sein kann; dann wird der Winkel θ nach (55) bestimmt, in dieser Ebene von i aus abgetragen, wobei der positive Sinn des Winkels von i nach j gerechnet ist; zuletzt werden die Schenkel $T\alpha_1$ und $T\alpha_2$ dieses Winkels, von denen der erste in der Richtung i liegt, in dem Verhältnisse $T\alpha_2 : T\alpha_1 = r = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ bestimmt. In ganz ähnlicher Weise wird der quadrantische Versor in (56) und somit ein Vector, betrachtet als specieller Fall einer Quaterne, construirt.

30. Als einen analytischen Ausdruck des in Nr. 17. gegebenen Fundamentalgesetzes, betreffend die Rechnung im doppelten Axensysteme haben wir die in (52) gegebene Identität zwischen einer Quaterne $q = w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$ ausgedrückt in einem beliebigen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ und einer ebenen Complexen $re^{k\theta}$ zu betrachten; durch diese wichtige Identität wird die Theorie der ebenen Complexen, so weit sie sich auf die hier entwickelten Gesetze begründen lässt, für die Quaternen unmittelbar gültig; und umgekehrt werden die Gesetze der Quaternen für die ebenen Complexen in verschiedenen Ebenen gelten, und somit das wichtige Problem, die Gesetze der Complexen in verschiedenen Ebenen zu finden, als vollständig gelöst zu betrachten sein.

Haben wir also die Function $f(re^{\sqrt{-1}\theta}) = f(w + \sqrt{-1}v)$ einer ebenen Complexen, welche als Summe eines reellen und eines imaginären

*; Das Zeichen $\parallel$ bedeutet hier parallel und gleichgerichtet.

Theiles $\varphi(w, v) + \sqrt{-1} \psi(w, v)$ darstellbar ist, so ergibt sich, wenn man $\sqrt{-1} = k = i_1 \cos l + j_1 \cos m + k_1 \cos n$ und $kv = i_1 x + j_1 y + k_1 z$ setzt, die folgende Identität:

$$(57) \quad f(re^{k\theta}) = f(w + kv) = f(w + i_1 x + j_1 y + k_1 z) \\ = \varphi(w, v) + \psi(w, v) \{i_1 \cos l + j_1 \cos m + k_1 \cos n\},$$

und folglich, wenn $f(w + i_1 x + j_1 y + k_1 z) = W + i_1 X + j_1 Y + k_1 Z$ gesetzt wird:

$$(58) \quad \begin{cases} W = \varphi(w, v) \\ X = \psi(w, v) \cos l \\ Y = \psi(w, v) \cos m \\ Z = \psi(w, v) \cos n, \end{cases}$$

wo $v = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *) und $\frac{v}{1} = \frac{x}{\cos l} = \frac{y}{\cos m} = \frac{z}{\cos n}$ [vergl. (55)].

Auf diese Weise haben wir, wenn $q = w + i_1 x + j_1 y + k_1 z$, $\mu =$ einer reellen Zahl und $\kappa =$ einer ganzen reellen Zahl ist:

$$(59) \quad f(q) = q^\mu = r^\mu e^{k\mu(\theta + 2\kappa\pi)} = r^\mu [\cos \mu(\theta + 2\kappa\pi) + k \sin \mu(\theta + 2\kappa\pi)],$$

und somit, wenn nach dem Obigen $q^\mu = W + i_1 X + j_1 Y + k_1 Z$ gesetzt wird:

$$(60) \quad \begin{cases} W = r^\mu \cos \mu(\theta + 2\kappa\pi) \\ X = r^\mu \sin \mu(\theta + 2\kappa\pi) \cos l \\ Y = r^\mu \sin \mu(\theta + 2\kappa\pi) \cos m \\ Z = r^\mu \sin \mu(\theta + 2\kappa\pi) \cos n, \end{cases}$$

wo r, θ, l, m und n nach (55) in den vier Coordinaten w, x, y, z auszudrücken sind; damit ist die Potenzfunction einer Quaterne völlig bestimmt. In ganz derselben Weise lässt sich die Exponentialfunction $f(q) = e^q = e^{r(\cos \theta + k \sin \theta)}$, bestimmen und zerlegen

31. Eine Summe von Quaternen gleich Null gesetzt oder

$$\Sigma q = 0$$

giebt nach Nr. 13.

$$\Sigma Sq = 0 \text{ und } \Sigma Vq = 0.$$

Setzen wir die Glieder der Summe Σq in die reducirte Form $re^{k\theta}$, so repräsentirt die Vectorsumme $\Sigma Vq = 0$ ein geschlossenes Polygon, dessen Seiten die Summanden sind [vergl. Nr. 4.]. Aus mechanischem Gesichtspunkte bedeutet die Summe $\Sigma Sq = 0$, dass die Summe der von den Scalären Sq repräsentirten mechanischen Arbeiten Null ist, und die Summe $\Sigma Vq = 0$, dass die von den Vektoren Vq repräsentirten Drehungsmomente im Gleichgewicht sind, sobald sie als lineare Momente ein geschlossenes Polygon bilden [vergl. Nr. 24.].

*) Diese Wurzel und $\sin \theta$ sind gleichzeitig positive oder negative Grössen [vergl. (55)].

Interpretation der Producte von drei und mehreren Vektoren.

32. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Vektoren mit gemeinschaftlichem Nullpunkte O [Fig. 2], und A_{12}, A_{23} die Winkel $\alpha_1 O \alpha_2, \alpha_2 O \alpha_3$, nach der Ordnung der Indices gerechnet; es seien ferner ι_{12}, ι_{23} Einheitsaxen, senkrecht gegen die Ebenen der resp.

Winkel A_{12}, A_{23} , und A_2 der Winkel $\iota_{12} O \iota_{23}$, welcher, da er in einer auf α_2 senkrechten Ebene liegt, gleich ist dem Winkel zwischen den Ebenen der Winkel A_{12} und A_{23} . Dieser Winkel soll positiv gerechnet werden im Sinne einer positiven Drehung um den Vector α_2 als Axe. Eine analoge Bezeichnung soll gelten für eine beliebige Anzahl von Vektoren. Dann bekommen wir nach (48), wenn $\alpha_3 = i\xi + j\eta + k\xi$ und das Axensystem (ijk) so gewählt worden ist, dass i längs α_1 und A_{12} in der Ebene (ij) liegt und folglich $\iota_{12} = k$:

$$(61) \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \{-T\alpha_1 T\alpha_2 \cos A_{12} + k T\alpha_1 T\alpha_2 \sin A_{12}\} (i\xi + j\eta + k\xi).$$

Sind dieselben Vektoren in einem beliebigen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ausgedrückt worden, also nach (48):

$$(62) \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \left\{ -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \begin{vmatrix} i_1 & x_1 & x_2 \\ j_1 & y_1 & y_2 \\ k_1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right\} (i_1 x_3 + j_1 y_3 + k_1 z_3),$$

so müssen nach dem Fundamentalsatze (36) die in (61) und (62) erhaltenen Multiplicationsresultate identisch sein und folglich:

$$(63) \quad S\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -T\alpha_1 T\alpha_2 \sin A_{12} \xi = - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aber $T\alpha_1 T\alpha_2 \sin A_{12} \xi$ repräsentirt, von dem Vorzeichen abgesehen, das Volumen des Parallelepipeds, welches aus den Vektoren α_1, α_2 und α_3 als Kanten constiuirt wird; also muss auch die Determinante in (63) numerisch dasselbe Volumen repräsentiren.

33. Nach dem in Nr. 21. entwickelten distributiven Gesetze haben wir die Identität $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) - (\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3) \alpha_2 + \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1)$, welche nach (17) so geschrieben werden kann:

$$(64) \quad V\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 S\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_3 S\alpha_1 \alpha_2.$$

Drücken wir in (64) die Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in den Axensystemen (ijk) und $(i_1 j_1 k_1)$ aus mit den in (61) und (62) gebrauchten Coordinaten,

so ist leicht zu sehen, dass die Vektortheile dieser Formeln mit dem Vectorausdrucke in (64) identisch werden.

Zu bemerken ist nach (64), weil $V\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_1(S\alpha_2\alpha_3 + V\alpha_2\alpha_3) = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3 + V(\alpha_1 V\alpha_2\alpha_3)$, dass

$$(65) \quad V(\alpha_1 V\alpha_2\alpha_3) = \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1,$$

eine Formel, welche sehr oft gebraucht wird.

34. Setzen wir in (64) $T\alpha_1 = T\alpha_2 = T\alpha_3 = 1$, und quadriren diese Gleichung, so ergibt sich nach den in Nr. 32. gegebenen Bezeichnungen, wenn wir beachten, dass nach (11) $T^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = S^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - V^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, folgende wohlbekannte Formel:

$$1 - \cos^2 A_{12} - \cos^2 A_{23} - \cos^2 A_{31} + 2 \cos A_{12} \cos A_{23} \cos A_{31} \\ \sin^2 A_{12} \sin^2 A_{23} \sin^2 A_{31} \dots \text{etc.}$$

Andere sphärische Formeln können in analoger Weise in unbegrenzter Menge hergeleitet werden [vgl. An elem. Treat. on Quatern. by Tait, p. 56].

35. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ Einheitsvectoren mit einem gemeinschaftlichen Nullpunkte O [Fig. 3]; dann bekommen wir nach dem associativen Gesetze und mit Hülfe von (22) die folgende Identität:

$$(66) \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_r} \frac{\alpha_r}{\alpha_{r-1}} \dots \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1,$$

Diese Formel können wir auch nach (52) so schreiben, wenn wir die Bezeichnung $(\iota A)_{12}$ etc. als identisch mit $\iota_{12} A_{12}$ benutzen etc.

$$(67) \quad e^{(\iota A)_{r1}} \cdot e^{(\iota A)_{(r-1)r}} \dots e^{(\iota A)_{32}} \cdot e^{(\iota A)_{12}} = 1,$$

wo also die Winkel $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{(r-1)r}, A_{r1}$ der Reihe nach die Seiten eines geschlossenen sphärischen Polygons sind. Zerlegen wir die Factoren [oder Versoren] dieser Formel nach (54), so dass

$e^{(\iota A)_{12}} = \cos A_{12} + \iota_{12} \sin A_{12}$ etc. gesetzt wird, und führen dann die Multiplication aus, so ergeben sich nach Nr. 13. zwei Gleichungen, die erste zwischen den Scalärtheilen, die zweite zwischen den Vektortheilen, welche letztere, wenn wir z. B. nach (5) $\iota_{12} = i \cos l_{12} + j \cos m_{12} + k \cos n_{12}$ etc. setzen, in drei verschiedene Gleichungen zerfällt. Die Formel (67) mit ihren möglichen Entwicklungen enthält, wie leicht zu erkennen ist, die ganze Theorie der sphärischen Polygone.

Fig. 3.

Zu bemerken ist ferner, dass die Formel (67) die vollständige Lösung der Aufgabe, die Multiplicationsgesetze der Complexen in verschiedenen Ebenen zu finden, enthält [vergl. Nr. 30.].

36. Als ein specieller Fall der Formel (67) ergibt sich die Formel für das sphärische Dreieck

$$(68) \quad e^{(\epsilon A)_{31}} \cdot e^{(\epsilon A)_{23}} \cdot e^{(\epsilon A)_{12}} = 1$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit $e^{(\epsilon A)_{13}}$ *) multiplicirt:

$$(69) \quad e^{(\epsilon A)_{23}} \cdot e^{(\epsilon A)_{12}} = e^{(\epsilon A)_{13}}.$$

Diese Gleichung zerfällt in die folgenden, wenn wir beachten, dass $\iota_{12} \cdot \iota_{23} = -\cos A_2 + \alpha_2 \sin A_2$ und folglich $\iota_{23} \cdot \iota_{12} = -\cos A_2 - \alpha_2 \sin A_2$ [vergl. (48)]:

$$(70) \quad \cos A_{12} \cos A_{23} - \sin A_{12} \sin A_{23} \cos A_2 = \cos A_{13},$$

$$(71) \quad \iota_{12} \sin A_{12} \cos A_{23} + \iota_{23} \sin A_{23} \cos A_{12} - \alpha_2 \sin A_{12} \sin A_{23} \sin A_2 - \iota_{13} \sin A_{13}.$$

Setzen wir wie oben $\iota_{12} = i \cos l_{12} + j \cos m_{12} + k \cos n_{12}$ und für die Einheitsvectoren ι_{23} , α_2 , ι_{13} analoge Ausdrücke, so bekommen wir aus der Gleichung (71) drei verschiedene Gleichungen für die Projectionen in dem Axensysteme (ijk). Weil die Gleichung (69) weiter in die Gleichungen $e^{(\epsilon A)_{23}} = e^{(\epsilon A)_{13}} \cdot e^{(\epsilon A)_{31}}$ und $e^{(\epsilon A)_{12}} = e^{(\epsilon A)_{31}} \cdot e^{(\epsilon A)_{13}}$ transformirt werden kann, so ergeben sich zwei neue mit (70) und (71) analoge Formelgruppen, so dass wir zusammen zwölf Formeln für das betreffende sphärische Dreieck erhalten.

Als Ausdruck für das Polar-Dreieck des Dreieckes (68) haben wir die Formel

$$(72) \quad e^{(\alpha A)_1} \cdot e^{(\alpha A)_2} \cdot e^{(\alpha A)_3} = 1.$$

Daraus lassen sich für dieses Dreieck in analoger Weise die Formeln deduciren.

Man ersieht hieraus, welcher Reichthum von Entwicklungen für die Sphärik in dieser Methode enthalten ist.

37. Wir wollen jetzt das in Nr. 6. gegebene associative Gesetz durch eine geometrische Deutung beleuchten.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke nach Nr. 35. mit $e^{(\epsilon A)_{12}}$, $e^{(\epsilon A)_{23}}$, $e^{(\epsilon A)_{31}}$ drei Versoren, so ist die Identität

$$(73) \quad e^{(\epsilon A)_{31}} [e^{(\epsilon A)_{23}} e^{(\epsilon A)_{12}}] = [e^{(\epsilon A)_{31}} e^{(\epsilon A)_{23}}] e^{(\epsilon A)_{12}}$$

geometrisch zu deuten.

Haben wir also drei Gross-Kreise einer Kugel mit dem Radius eins, auf welchem drei Bogen A_{12} , A_{23} , A_{31} nach der Zeichnung in Fig. 4 liegen, so kann man nach Nr. 28. diese Bogen längs ihren Kreisen so verschieben, dass je zwei die Seiten eines sphärischen Dreiecks bilden; alsdann haben wir die dritte Seite dieses Dreiecks mit dem übrigen Bogen zu combiniren. Die erste Combination der Versoren sei $e^{(\epsilon A)_{31}} e^{(\epsilon A)_{12}}$, welche $e^{(\epsilon A)_{13}}$ giebt und somit den Bogen A_{13} als die dritte Seite des sphärischen Dreiecks, von dem zwei Seiten A_{12}

*) Man bemerke, dass $A_{31} = -A_{13}$ [vergl. Nr. 32.], indem ι_{31} als identisch mit ι_{13} anzusehen ist.

und A_{23} sind. Diese dritte Seite wird durch Verschiebung in ihrem Gross-Kreise mit dem übrigen Bogen A_{34} combinirt, und somit haben

Fig. 4.

wir A_{14} als die dritte Seite eines neuen sphärischen Dreiecks, von dem zwei Seiten A_{13} und A_{34} sind; dieses sphärische Dreieck entspricht also dem analytischen Ausdrucke $e^{(t A)_{13}} e^{(t A)_{34}} = e^{(t A)_{14}}$, welcher mit der linken Seite der Formel (73) identisch ist. Ein analoges Verfahren*) giebt zuerst die Construction des Ausdruckes

$e^{(t A)_{14}} e^{(t A)_{23}} = e^{(t A)_{24}}$ und ferner des Ausdruckes $e^{(t A)_{23}} e^{(t A)_{12}} = e^{(t A)_{13}}$, der also mit der rechten Seite der Formel (73) identisch ist. Die nach diesen zwei Verfahrungsweisen erhaltenen zwei Bogen, die mit A_{14} bezeichnet sind, müssen also nach dem in (73) benutzten associativen Gesetze identisch sein**), d. h. sie müssen auf demselben Gross-Kreise liegen, gleich gross und in denselben Sinn gerichtet sein. Dieselbe Construction kann auf ein Product von einer beliebigen Anzahl Vektoren ausgedehnt werden.

38. Um die geometrische Bedeutung des in Nr. 6. gegebenen Gesetzes der Conjugirten eines Productes von Quaternen darzulegen, hat man nur die Gleichung (69) in folgende Form zu bringen:

$$e^{(t A)_{21}} e^{(t A)_{12}} = e^{(t A)_{11}}.$$

Diese Gleichung, deren geometrische Bedeutung nach der Fig. 3 unmittelbar einleuchtet, kann nach (53) so geschrieben werden:

$$K e^{(t A)_{12}} K e^{(t A)_{21}} = K \{ e^{(t A)_{23}} e^{(t A)_{12}} \};$$

und entsprechend für eine beliebige Anzahl Vektoren. Die Werthe der Tensoren sind für dieses Gesetz natürlich ganz gleichgültig.

39. Ein Ausdruck von besonderem Interesse soll jetzt untersucht werden. Es sei in der Ebene (ij) eines Axensystemes (ijk) ein Vector $\alpha = T\alpha (i \cos A + j \sin A) = T\alpha (\cos A + k \sin A) i = T\alpha e^{k A} \cdot i$; der zu untersuchende Ausdruck ist alsdann $e^{k \theta} \alpha$. Wir bekommen unmittelbar die folgende Gleichung:

*) Die nach diesem Verfahren angewandten Bogen sind in der Figur mit doppelten Strichen gezeichnet worden.

**) Der geometrische Beweis dieser Identität dient bei Hamilton und Tait als Beweis des associativen Gesetzes der Quaternen.

$$(74) \quad e^{k0} \alpha = T \alpha e^{k(0+A)} \cdot i = T \alpha [i \cos(\theta + A) + j \sin(\theta + A)],$$

d. h. ein Vector α wird in seiner Ebene um einen Winkel θ gedreht, wenn ein Versor als Factor vor ihm tritt, dessen Winkel θ ist und dessen Axe senkrecht gegen die betreffende Ebene steht.

In derselben Weise können wir den Ausdruck αe^{-k0} untersuchen. Wir setzen nämlich $\alpha = i T \alpha (\cos A - k \sin A)$, und bekommen somit

$$(75) \quad \alpha e^{-k0} = i T \alpha e^{-k(0+A)} = T \alpha [i \cos(A + \theta) + j \sin(A + \theta)];$$

also werden die zwei Ausdrücke in (74) und (75) identisch, oder

$$(76) \quad e^{k0} \alpha = \alpha e^{-k0}.$$

Setzen wir vor jede Seite dieser Gleichung den Factor e^{k0} , so ergibt sich

$$(77) \quad e^{k(20)} \alpha = e^{k0} \alpha e^{-k0},$$

d. h. der Ausdruck $e^{k0} \alpha e^{-k0}$ bedeutet einen Vector, mit dem der Vector α identisch sein wird, wenn er um einen Winkel 2θ in seiner Ebene um die Axe k gedreht wird.

40. Es sei ferner in dem Axensysteme (ijk) eine Quaterne $q = w + ix + jy + kz$; das Product $e^{k0} q e^{-k0}$ wird alsdann $w + e^{k0}(ix + jy) e^{-k0} + kz$ oder nach (77) $w + e^{k(20)}\{ix + jy\} + kz$, und somit haben wir die Identität:

$$(78) \quad e^{k0} q e^{-k0} = w + e^{k(20)}\{ix + jy\} + kz = q_1,$$

d. h., der Ausdruck $e^{k0} q e^{-k0}$ bedeutet eine Quaterne q_1 , mit der die Quaterne q identisch sein wird, wenn ihre Axe $Ax. q$ um einen Winkel 2θ um die Axe k gedreht wird.

Die geometrische Deutung dieser Formel ergibt sich folgendermassen:

Auf einer Kugel mit dem Radius 1 und der Polaraxe k [Fig. 5] zeichne man im Aequator von dem Durchschnitte mit dem Bogen $\sphericalangle q$ den Winkel 2θ ; der Bogen des Ausdruckes $q e^{-k0}$ wird dann die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks, von dem zwei Seiten $—\theta$ und $\sphericalangle q$ sind; diese dritte Seite, in ihrem Gross-Kreise verschoben [Nr. 28.] und mit θ combinirt, giebt den Bogen des Ausdruckes $q_1 = e^{k0} q e^{-k0}$ als dritte Seite eines neuen sphärischen Dreiecks, das jenem gleich ist; die Bogen $\sphericalangle q$ und $\sphericalangle q_1$ sind also gleich, aber die Axe $Ax. q$ muss um den Winkel 2θ um die Axe k gedreht werden, um mit der Axe $Ax. q_1$ identisch zu werden.

Fig. 5.

41. Setzen wir $p = re^{k\alpha}$, wo also $Ap = r$, $\angle p = \theta$ und $Ax.p = k$ ist, so können wir, weil nach (59) $p^{-1} = r^{-1}e^{-k\alpha}$, den Ausdruck (78) so schreiben:

$$(79) \quad pqp^{-1} = q_1;$$

es bedeutet also in dieser Formel q_1 eine Quaterne, mit der die Quaterne q identisch sein wird, wenn ihre Axe $Ax.q$ um einen Winkel $2\angle p$ um die Axe $Ax.p$ gedreht wird.

Als ein specieller Fall von (79) ergibt sich die Formel

$$(80) \quad \alpha q \alpha^{-1} = q_1,$$

wo α und ρ und folglich auch ρ_1 Vektoren sind. Betrachten wir diese Vektoren nach (56) als quadrantische Versoren, so bedeutet also ρ_1 einen Vector [Fig. 6], mit dem der Vector ρ identisch sein wird, wenn er um den Winkel π um den Vector α als Axe gedreht wird.

Wird in der Formel (80) $\sigma = -\rho$ gesetzt, so können σ und ρ_1 als der einfallende und reflectirte Strahl gegen eine Fläche, deren Normale α ist, betrachtet werden. Beachten wir, dass α , σ und ρ_1 in einem beliebigen Axensysteme ausgedrückt werden können, so ist die Bedeutung der Formel (80) für die Theorie des reflectirten Lichtes augenfällig.

42. Mit Benutzung der in (69) gegebenen Bezeichnung der Winkel, ergibt sich nach (78) die geometrische Bedeutung der Identität

$$(81) \quad e^{(A)_{12}} e^{(A)_{13}} q e^{-(A)_{12}} e^{-(A)_{13}} = e^{(A)_{13}} q e^{-(A)_{13}} = q_2$$

in folgender Weise:

Drehen wir die Axe einer Quaterne $Ax.q$ zuerst um einen Winkel $2A_{12}$ um die Axe ι_{12} und dann um einen Winkel $2A_{23}$ um die Axe ι_{23} , so ist die Lage der Axe $Ax.q$ nach diesen zwei Drehungen identisch dieselbe, als wenn sie um einen Winkel $2A_{13}$ um die Axe ι_{13} gedreht worden wäre, wenn nämlich A_{13} die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks ist, von dem zwei Seiten A_{12} und A_{23} sind*).

*) Ein Ausdruck von der Form

$$\left(\alpha_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha_3\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo α_1 , α_2 und α_3 Einheitsvectoren sind, der sich auch schreiben lässt:

$$e^{\frac{1}{2}(A)_{12}} \cdot e^{\frac{1}{2}(A)_{23}} \cdot e^{\frac{1}{2}(A)_{13}},$$

hat eine für die Sphärik merkwürdige Bedeutung [vergl. Tait, An elem. Treat. on Quat. pag. 58].

Die Formel (81) erhält unmittelbar ihre geometrische Erläuterung aus der Fig. 7, wo vor und nach den zwei ersten Drehungen $[2 A_{12}, 2 A_{23}]$ der Winkel $\angle q$ durch vollgezogene Striche, vor und nach der dritten Drehung $[2 A_{13}]$ derselbe Winkel durch punktirte Striche bezeichnet ist, entsprechend für mehrere Drehungen.

Fig. 7.

In Analogie mit (79) kann die Formel (81) so geschrieben werden, wenn p_1 und p Quaternen bedeuten, deren Versoren resp. $e^{(A)_{12}}$ und $e^{(A)_{13}}$ sind:

$$(82) \quad p_1 p q p^{-1} p_1^{-1} = q_2$$

und entsprechend für eine beliebige Anzahl Factoren.

43. Wollen wir einen Vector α_4 nach den Richtungen der gegebenen Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zerlegen, so ergibt sich unmittelbar nach (17) und Nr. 21. die Identität:

$$(83) \quad \alpha_1 S \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_1 S \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_2 S \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 + \alpha_3 S \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2,$$

wenn wir beachten, dass die Stellung der Scaläre als Factor in einem Producte gleichgültig ist.

Wollen wir aber einen Vector α_4 nach den durch die drei Vektoren $V \alpha_1 \alpha_2, V \alpha_2 \alpha_3, V \alpha_3 \alpha_1$ angegebenen Richtungen [vergl. (25)] zerlegen, so ergibt sich in derselben Weise oder nach einer von Tait*) angewandten Herleitung die folgende Identität:

$$(84) \quad \alpha_4 S \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = V \alpha_1 \alpha_2 S \alpha_3 \alpha_4 + V \alpha_2 \alpha_3 S \alpha_4 \alpha_1 + V \alpha_3 \alpha_1 S \alpha_2 \alpha_4.$$

Analoge Identitäten von vier und mehreren Vektoren lassen sich nach den in (17) und Nr. 21. gegebenen Gesetzen in unbegrenzter Menge entwickeln

Transformation zu neuen Axensystemen und zu neuen Nullpunkten.

44. Wir wollen jetzt einen in dem Axensysteme (ijk) ausgedrückten Vector $q = ix + jy + kz$ zu einem neuen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ mit demselben Nullpunkte O und mit der Axe $k = k_1$ transformiren [Fig. 8]. Setzen wir zu diesem Zwecke den Winkel $\angle i_1 O i = K$, von der neuen Axe i_1 nach der alten Axe i gerechnet, so ergibt sich unmittelbar nach (78), wenn $q_1 = i_1 x_1 + j_1 y_1 + k_1 z_1$ der Werth von q in dem neuen Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ist:

Fig. 8.

*) An elem. Treat. on Quat. pag. 45.

$$(85) \quad \varrho_1 = e^{\frac{1}{2}kK} \varrho e^{-\frac{1}{2}kK},$$

wo, statt der Drehung [= K] des Vectors ϱ um die Axe k , das Axensystem (ijk) selbst in die neue Lage $(i_1 j_1 k_1)$ um die Axe $k = k_1$ um den Winkel = K gedreht wird, wenn $K = \angle i_1 O i$ von der neuen Axe i_1 nach der alten Axe i gerechnet wird.

Weil nach (78)

$$e^{\frac{1}{2}kK} \varrho e^{-\frac{1}{2}kK} = e^{kK} (ix + jy) + kz = (\cos K + k \sin K) (ix + jy) + kz,$$

so bekommen wir, nach Ausführung der Multiplication und Ersetzung der Axen i, j, k in dem Resultate durch i_1, j_1, k_1 , folgende wohlbekannte Formeln:

$$(86) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos K - y \sin K, \\ y_1 = x \sin K + y \cos K, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

45. Setzen wir beiden Seiten der Gleichung (85) die Versoren $e^{\frac{1}{2}kK}$ und $e^{\frac{1}{2}kK}$ resp. vor und nach, so ergibt sich die Gleichung:

$$(87) \quad \varrho = e^{-\frac{1}{2}kK} \varrho_1 e^{\frac{1}{2}kK},$$

wodurch also ϱ_1 , in dem Axensysteme $(i_1 j_1 k_1)$ ausgedrückt, zu dem neuen Axensysteme (ijk) transformirt worden ist.

46. Haben wir in (85) den Vector ϱ_1 zu einem neuen Axensysteme $(i_2 j_2 k_2)$ zu transformiren, und setzen wir die Axe $i_2 = i_1$ und $\angle j_2 O j_1 = I_1$, so ergibt sich, wenn $\varrho_2 = i_2 x_2 + j_2 y_2 + k_2 z_2$ den Werth von ϱ_1 nach dieser Transformation bezeichnet, die folgende Formel:

$$(88) \quad \varrho_2 = e^{\frac{1}{2}(iI_1)} e^{\frac{1}{2}kK} \varrho e^{-\frac{1}{2}kK} e^{-\frac{1}{2}(iI_1)},$$

wo (iI_1) statt $i_1 I_1$ geschrieben worden ist [vergl. Nr. 35.].

In derselben Weise lassen sich Transformationen zu neuen Axensystemen in einer beliebigen Anzahl ausführen, wobei immer zu bemerken ist, dass, wenn um eine der Axen i_s, j_s, k_s z. B. i_s gedreht wird, der Drehungswinkel von j_{s+1} zu j_s u. s. w. in cyclischer Folge gerechnet wird. Eine Transformation von besonderem Interesse ist die folgende, wenn $\varrho_3 = i_3 x_3 + j_3 y_3 + k_3 z_3$ gesetzt wird:

$$(89) \quad \varrho_3 = e^{\frac{1}{2}(kK)_2} e^{\frac{1}{2}(iI)_1} e^{\frac{1}{2}kK} \varrho e^{-\frac{1}{2}kK} e^{-\frac{1}{2}(iI)_1} e^{-\frac{1}{2}(kK)_2},$$

welche, ausgeführt, die wohlbekannten Euler'schen Coordinaten-Transformationsformeln ergibt.

Zu den Formeln (88) und (89) haben wir zu bemerken, dass die in Nr. 42. behandelte Reduction der Versoren auch in ihnen angewandt werden kann.

47. Ein Vector ϱ wird zu einem neuen Nullpunkte transformirt durch die Gleichung:

$$(90) \quad P = \alpha + \varrho,$$

wo die Vektoren P und α von dem neuen Nullpunkte und ϱ von dem Punkte α als Nullpunkt zu rechnen sind. Sind die drei Vektoren P , α und ϱ in demselben*) Axensysteme (ijk) durch die resp. Coordinaten XYZ , abc und xyz ausgedrückt, so ergibt sich das Formelsystem:

$$(91) \quad \begin{cases} X = a + x, \\ Y = b + y, \\ Z = c + z. \end{cases}$$

Diese zwei Transformationen: 1) zu neuen Axensystemen und 2) zu neuen Nullpunkten, können in verschiedener Weise combinirt und durch die Anwendung des distributiven Gesetzes vollständig ausgeführt werden; hiermit ist die allgemeine Lösung des Problems der Coordinatentransformationen in der Cartesianischen Geometrie erledigt.

48. Als eine bemerkenswerthe Anwendung der hier entwickelten Formeln ergeben sich die astronomischen Coordinatentransformationen. Setzen wir z. B. in (88) $\varrho = i \sin A \cos h + j \cos A \cos h + k \sin h$, $\varrho_2 = i_2 \cos \alpha \cos \delta + j_2 \sin \alpha \cos \delta + k_2 \sin \delta$, $h =$ der Axe gegen den Westpunkt, $K = -(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, $i_1 =$ der Polaxe, $I_1 = \theta - \frac{1}{2}\pi$ [A , h , α , δ , φ und θ bezeichnen resp. das Azimuth, die Höhe, die Rectascension, die Declination, die Polhöhe und die Sternzeit], so bekommen wir, ohne das sphärische Dreieck zu brauchen, die bekannten Relationen zwischen den erwähnten Grössen; u. s. w.

Upsala, November 1876.

*) Wir haben hier zu bemerken, dass Axensysteme mit gleichgerichteten Axen als identisch anzusehen sind [vergl. Nr. 4.].