**2. Die Ausbreitung
ebener elektromagnetischer Wellen längs eines
geschichteten Leiters, besonders in den Fällen der
drahtlosen Telegraphie;
von F. Hack.**

In einer unlängst veröffentlichten Arbeit¹⁾: „Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und deren Beziehung zur drahtlosen Telegraphie“ hat Hr. Zenneck die Frage aufgeworfen, in welcher Weise die Wellen der drahtlosen Telegraphie dadurch beeinflußt werden, daß der Untergrund aus zwei Schichten besteht, die hinsichtlich des Leitvermögens und der Dielektrizitätskonstante erheblich voneinander verschieden sind. Im Einverständnis mit Hrn. Zenneck habe ich die Durchführung der Untersuchung übernommen; Hr. Zenneck hat auch die Ergebnisse einer Durchsicht unterzogen.

I. Berechnung der Feldgrößen aus den Maxwell'schen Gleichungen.

Die angenommene Lage des Koordinatensystems entspricht der Fig. 1; die ebene Welle bewege sich in der Richtung der

Fig. 1.

¹⁾ J. Zenneck, Ann. d. Phys. **23**. p. 846f. 1907. Die Kenntnis dieser Abhandlung wird im folgenden vorausgesetzt und die Abhandlung mit l. c. zitiert.

zunehmenden x ; in den Bezeichnungen seien Luft, obere und untere Erdschicht durch die Marken 0, 1, 2 unterschieden. Die Bedeutung der Buchstaben ist, wie bei Zenneck, l. c. p. 846:

$$\begin{aligned} E &= \text{elektrische Feldintensität,} \\ M &= \text{magnetische Feldintensität,} \\ \epsilon &= \text{Dielektrizitätskonstante,} \\ \mu &= \text{Permeabilität} = \mu_0 = \frac{1}{4\pi} \text{ im C.G.S.-System,} \\ \sigma &= \text{Leitvermögen,} \\ \nu &= \pi \cdot \text{Wechselzahl,} \\ \iota &= \sqrt{-1}, \\ v &= \frac{1}{4\pi} \text{ im C.G.S.-System.} \end{aligned}$$

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden auch hier die Maxwellschen Gleichungen in der bei Zenneck angegebenen Form. Nimmt man für den Leiter 1 in der z -Richtung das Vorhandensein einer hinlaufenden und einer reflektierten Welle an und führt noch die Funktion

$$(1) \quad F = e^{\iota(\nu \iota + s x)}$$

ein, so ergibt die Integration der Maxwellschen Gleichungen folgende Werte der Feldgrößen:

Schicht 0 (Luft):

$$(2) \quad \begin{cases} M_{0y} = a_0 e^{-\iota r_0 z} F, \\ E_{0x} = -\frac{\iota v r_0}{\sigma_0 + \iota \nu \epsilon_0} a_0 e^{-\iota r_0 z} F, \\ E_{0z} = -\frac{\iota v s}{\sigma_0 + \iota \nu \epsilon_0} a_0 e^{-\iota r_0 z} F; \end{cases}$$

obere Erdschicht 1:

$$(3) \quad \begin{cases} M_{1y} = (a_1 e^{\iota r_1 z} + b_1 e^{-\iota r_1 z}) F, \\ E_{1x} = \frac{\iota v r_1}{\sigma_1 + \iota \nu \epsilon_1} (a_1 e^{\iota r_1 z} - b_1 e^{-\iota r_1 z}) F, \\ E_{1z} = -\frac{\iota v s}{\sigma_1 + \iota \nu \epsilon_1} (a_1 e^{\iota r_1 z} + b_1 e^{-\iota r_1 z}) F; \end{cases}$$

untere Erdschicht 2:

$$(4) \quad \begin{cases} M_{2y} = a_2 e^{\iota r_2 z} F, \\ E_{2x} = \frac{\iota v r_2}{\sigma_2 + \iota \nu \epsilon_2} a_2 e^{\iota r_2 z} F, \\ E_{2z} = -\frac{\iota v s}{\sigma_2 + \iota \nu \epsilon_2} a_2 e^{\iota r_2 z} F. \end{cases}$$

Die übrigen Komponenten der Feldstärke, E_y , M_x und M_z , verschwinden in allen drei Medien.

Die in den Gleichungen (1) bis (4) auftretenden Größen sind nun folgendermaßen voneinander abhängig.

Zwischen r_0 , r_1 , r_2 und s bestehen die Beziehungen:

$$(5) \quad \begin{cases} r_0^2 + s^2 = -\frac{\iota \nu \mu (\sigma_0 + \iota \nu \varepsilon_0)}{v^2}, \\ r_1^2 + s^2 = -\frac{\iota \nu \mu (\sigma_1 + \iota \nu \varepsilon_1)}{v^2}, \\ r_2^2 + s^2 = -\frac{\iota \nu \mu (\sigma_2 + \iota \nu \varepsilon_2)}{v^2}. \end{cases}$$

Hierzu treten noch die Grenzbedingungen, wobei unter T die Tiefe der Zwischenschicht 1 verstanden ist:

$$(6) \quad \begin{cases} a_0 = a_1 + b_1, \\ \frac{a_0 r_0}{\sigma_0 + \iota \nu \varepsilon_0} = - (a_1 - b_1) \frac{r_1}{\sigma_1 + \iota \nu \varepsilon_1}; \\ a_1 e^{\iota r_1 T} + b_1 e^{-\iota r_1 T} = a_2 e^{\iota r_2 T}, \\ \frac{r_1}{\sigma_1 + \iota \nu \varepsilon_1} (a_1 e^{\iota r_1 T} - b_1 e^{-\iota r_1 T}) = a_2 \frac{r_2}{\sigma_2 + \iota \nu \varepsilon_2} e^{\iota r_2 T}. \end{cases}$$

Wir führen nunmehr die folgenden Vereinfachungen und Abkürzungen ein:

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_0 = 0, & a_0 = 1, \\ \frac{\sigma_0 \mu \nu}{v^2} = \alpha_0 = 0, & q_0 = \frac{\nu \varepsilon_0}{\sigma_1}, \\ \frac{\sigma_1 \mu \nu}{v^2} = \alpha_1, & q_1 = \frac{\nu \varepsilon_1}{\sigma_1}, \\ \frac{\sigma_2 \mu \nu}{v^2} = \alpha_2, & q_2 = \frac{\nu \varepsilon_2}{\sigma_2}. \end{cases}$$

Demzufolge gehen die Gleichungen (5) und (6) über in:

$$(8) \quad \begin{cases} r_0^2 + s^2 = \alpha_1 q_0 = A_0, \\ r_1^2 + s^2 = -\iota \alpha_1 (1 + \iota q_1) = A_1, \\ r_2^2 + s^2 = -\iota \alpha_2 (1 + \iota q_2) = A_2; \end{cases}$$

sowie:

$$(9) \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ (a_1 - b_1) r_1 \frac{\iota q_0}{1 + \iota q_1} = -r_0, \\ a_2 e^{\iota r_2 T} = a_1 e^{\iota r_1 T} + b_1 e^{-\iota r_1 T}, \\ \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{1 + \iota q_1}{1 + \iota q_2} a_2 e^{\iota r_2 T} = a_1 e^{\iota r_1 T} - b_1 e^{-\iota r_1 T}. \end{cases}$$

Eliminiert man zwischen den vier Gleichungen (9) die Größen a_1, b_1, a_2 , so erhält man die für die Lösung der Aufgabe entscheidende Beziehung zwischen r_0, r_1, r_2 oder gemäß (8) eine Bestimmungsgleichung für die eine Unbekannte s^2 .

Setzt man:

$$(10) \quad C_0 = \frac{1 + \epsilon q_1}{q_0}, \quad C_2 = \frac{\epsilon \sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{1 + \epsilon q_1}{1 + \epsilon q_2},$$

so ergibt die Ausführung der Rechnung:

$$\frac{r_1 (C_0 r_0 + C_2 r_2)}{r_1^2 - C_0 C_2 r_0 r_2} = -\operatorname{tg}(r_1 T).$$

Ist nun:

$$(11) \quad r_0 = \operatorname{arctg} \frac{C_0 r_0}{r_1}, \quad r_2 = \operatorname{arctg} \frac{C_2 r_2}{r_1},$$

so erhält man die sehr einfache Beziehung:

$$(12) \quad \underline{r_0 + r_2 + r_1 T = 0}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung könnte durch ein Vielfaches von π ersetzt werden; für die numerische Auflösung der Gleichung ist dies belanglos.

Ist $|r_1 T|$ so klein, daß innerhalb der Genauigkeitsstufe der Rechnung $\operatorname{tg}(r_1 T)$ durch $r_1 T$ ersetzt werden darf, so tritt an die Stelle der transzendenten Gleichung (12) die algebraische Gleichung:

$$(13) \quad \underline{C_0 r_0 + C_2 r_2 = T(C_0 C_2 r_0 r_2 - r_1^2)};$$

diese läßt sich auch unmittelbar aus (9) ableiten, wenn man dort die Näherungswerte:

$$e^{\epsilon r_1 T} = 1 + \epsilon r_1 T, \quad e^{-\epsilon r_1 T} = 1 - \epsilon r_1 T$$

einführt.

Bei geeigneten numerischen Werten von C_0, C_2 und den in r_0, r_1, r_2 enthaltenen Konstanten A_0, A_1, A_2 ist auch (13) noch weiterer Vereinfachung fähig. Bezüglich der Vorzeichen ist zu beachten, daß das Vorzeichen von r_1 unbestimmt bleibt; r_0 und r_2 sind beide mit positivem imaginären Anteil zu wählen; denn nur so verschwindet $e^{-\epsilon r_0 z}$ für $z = -\infty$, $e^{\epsilon r_2 z}$ für $z = +\infty$.

Endlich geben wir noch die aus (9) und (10) folgenden Werte an, welche der Quotient

$$(14) \quad \Phi(z) = \frac{a_1 e^{\epsilon r_1 z} - b_1 e^{-\epsilon r_1 z}}{a_1 e^{\epsilon r_1 z} + b_1 e^{-\epsilon r_1 z}}$$

an der oberen und unteren Grenze des Mediums 1 annimmt:

$$(15) \quad \Phi(0) = \iota \frac{C_0 r_0}{r_1}, \quad \Phi(T) = -\iota \frac{C_2 r_2}{r_1}.$$

II. Anwendung auf den Fall der nassen Oberschicht.

Zunächst mögen die vorstehenden Gleichungen auf den Fall angewendet werden, daß Medium 1 eine von Regenwasser durchfeuchtete Erdschicht von geringer Tiefe ist, Medium 2 aus trockenem Boden besteht.

Eine ungefähre Abschätzung zeigt, daß unter dieser Annahme in (13) das Glied $T r_1^2$ mindestens für die erste Annäherung vernachlässigt werden kann; die Glieder $C_0 r_0$ und $C_2 r_2$ werden im allgemeinen von gleicher Größenordnung sein. Bei hinreichend kleinem Wert von T läßt sich dann die Gleichung

$$(16) \quad f(s^2) = C_0 r_0 + C_2 r_2 - T C_0 C_2 r_0 r_2 = 0$$

durch allmähliche Annäherung auflösen, indem man von dem Wert $T=0$ ausgeht. Die zugehörigen Werte von s^2 , r_0 , r_2 sind:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^2 = \frac{A_0 C_0^2 - A_2 C_2^2}{C_0^2 - C_2^2}, \\ \bar{r}_0 = C_2 \sqrt{\frac{A_2 - A_0}{C_0^2 - C_2^2}}, \quad \bar{r}_2 = -C_0 \sqrt{\frac{A_2 - A_0}{C_0^2 - C_2^2}}. \end{array} \right.$$

Man überzeugt sich leicht von der Übereinstimmung dieser Werte mit der Formel (7) in der Arbeit von Zenneck.¹⁾

Zu weiterer Annäherung benutzen wir das von Newton angegebene Verfahren.²⁾ Es ist:

$$f'(s^2) = -T C_0 C_2 \bar{r}_0 \bar{r}_2;$$

bezeichnet man ferner Derivierte nach s^2 durch Akzente, so hat man nach (8):

$$r_0 r_0' = r_1 r_1' = r_2 r_2' = -\frac{1}{2}.$$

Somit erhält man aus (16):

$$f'(\bar{s}^2) = \frac{T C_0 C_2 (\bar{r}_0^2 + \bar{r}_2^2) - (C_0 \bar{r}_2 + C_2 \bar{r}_0)}{2 \bar{r}_0 \bar{r}_2};$$

1) l. c. p. 848. Die Werte von r_0 und r bei Zenneck, Gl. (7), sind zu vertauschen; bei s , r_0 und r müssen die imaginären Anteile positiv ausfallen, woraus sich die Vorzeichen bestimmen.

2) Vgl. z. B. E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, deutsch von G. Kowalewski) p. 453 ff. Leipzig 1904.

also ist die an $\bar{s}^2$ anzubringende Verbesserung:

$$(18) \quad \delta = -\frac{f(\bar{s}^2)}{f'(\bar{s}^2)} = -\frac{2\bar{r}_0^2\bar{r}_2^2}{\bar{r}_0^2 + \bar{r}_2^2 - \frac{1}{T}\left(\frac{\bar{r}_0}{C_0} + \frac{\bar{r}_2}{C_2}\right)}.$$

Der so gefundene Wert $\bar{s}^2 + \delta$ wird dem genauen, der Gleichung (13) genügenden Wert schon sehr nahe kommen.

Dieses Annäherungsverfahren ist jedoch nur dann brauchbar, wenn in (16) der dritte Term erheblich kleiner ist als die beiden anderen. Trifft dies nicht zu, so setze man:

$$(19) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) - (A_0 + A_2), \\ q = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{A_0}{C_0^2} + \frac{A_2}{C_2^2} \right) + A_0 A_2, \end{cases}$$

und berechne hieraus die Zahlenwerte von:

$$(20) \quad \begin{cases} p_1 = 2p, \\ p_2 = p^2 + 2q - \frac{4}{T^4 C_0^2 C_2^2}, \\ p_3 = 2pq + \frac{4(A_0 + A_2)}{T^4 C_0^2 C_2^2}, \\ p_4 = q^2 - \frac{4A_0 A_2}{T^4 C_0^2 C_2^2}. \end{cases}$$

Für $s^2 = u$ hat man dann die biquadratische Gleichung:

$$(21) \quad p(u) = u^4 + p_1 u^3 + p_2 u^2 + p_3 u + p_4 = 0.$$

Eine genäherte Auflösung dieser Gleichung findet man folgendermaßen. Es sei:

$$(22) \quad p_r = \bar{p}_r + \iota \bar{q}_r, \quad (r = 1, \dots, 4),$$

sowie:

$$(23) \quad \begin{cases} \bar{p}(u) = u^4 + \bar{p}_1 u^3 + \bar{p}_2 u^2 + \bar{p}_3 u + \bar{p}_4, \\ \bar{q}(u) = \bar{q}_1 u^3 + \bar{q}_2 u^2 + \bar{q}_3 u + \bar{q}_4. \end{cases}$$

Ist ferner:

$$(24) \quad s = -A + \iota B, \quad \bar{s} = -\bar{A} + \iota \bar{B},$$

so gilt, wie die Durchführung der Untersuchung zeigen wird, sehr nahezu:

$$(25) \quad A = \bar{A} + \frac{6\nu T}{T+15} 10^{-12};$$

außerdem kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$(26) \quad u = A^2 - 2AB\iota = m - \iota m'$$

setzen. Dann erhält man m' aus:

$$(27) \quad m' = \frac{\bar{q}(m)}{\bar{p}'(m)},$$

wodurch auch $B = m'/2 A$ bestimmt ist.

Den auf diese Weise erhaltenen Wert von s hat man nur noch um einen sehr kleinen Betrag zu verbessern, damit er der Gleichung (13) genügt.

Ist s dem ungefähren Betrag nach bekannt, so wird man indessen am einfachsten unmittelbar von (13) ausgehen; nach einigen Versuchen erhält man leicht eine hinreichend genaue Lösung.

Der Zahlenrechnung wurden durchweg die Werte:

$$\epsilon_0 = 0,88 \cdot 10^{-22}, \quad k_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 15, \quad k_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = 2, \\ \sigma_1 = 10^{-13}, \quad \sigma_2 = 10^{-16}$$

in Einheiten des C.G.S.-Systems zugrunde gelegt, dagegen für die Wellenlänge λ und die Tiefe T des Mediums 1 verschiedene Annahmen gemacht: $\lambda = 300$ m, 600 m, 1000 m, 2000 m; T zwischen 0 und 50 cm.

Die Rechnungsergebnisse für das *elektrische Feld* sind in den Figg. 2—13 dargestellt.

Für $T = 0$ ist in der Luft eine namentlich bei großen Werten von λ nicht unerhebliche Drehfeldkomponente vorhanden und die Richtung der größten Amplitude der elektrischen Feldstärke gegen die Normale zur Leiteroberfläche ziemlich stark geneigt. Die Durchfeuchtung des Bodens bewirkt ein starkes Zurücktreten der Drehfeldkomponente; für $T = 40$ cm ist auch bei $\lambda = 2000$ m ein nahezu reines Wechselfeld vorhanden; Hand in Hand damit geht eine wenn auch geringfügige Abnahme der Neigung gegen die Normale der Leiteroberfläche.

In der durch relativ hohes Leitvermögen ausgezeichneten Zwischenschicht 1 entsteht ein beinahe vollkommenes Wechselfeld in der Richtung der X -Achse; die Drehfeldkomponente ist außerordentlich gering; man überzeugt sich hiervon leicht durch Berechnung der Ausdrücke:

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{E_{1x}}{E_{1z}} \Big|_{z=0} = -\frac{r_1}{s} \Phi(0) = -\epsilon \frac{C_0 r_0}{s}, \\ \frac{E_{1x}}{E_{1z}} \Big|_{z=T} = -\frac{r_1}{s} \Phi(T) = \epsilon \frac{C_2 r_2}{s}, \end{cases}$$

deren absolute Beträge zwischen 10^2 und 10^3 liegen.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 8.

Das Verhalten im Medium 2 ist aus den Zeichnungen ersichtlich.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der X-Achse ist, wenn, wie früher, $s = -A + iB$ gesetzt wird:

$$(29) \quad c_x = \frac{v}{A}.$$

Für kleine Werte von T ist c_x nicht unwesentlich größer als die Lichtgeschwindigkeit c ; mit wachsendem T nähert sich c_x der Grenze c (Fig. 10). Beides rührt im wesentlichen von der Neigung der Strahlungsrichtung gegen die Erdoberfläche her. Solange $T < 10$ cm ist, nimmt c_x mit wachsendem λ unbedeutend ab; für größere T ist der Einfluß von λ unmerklich. Aus Fig. 10 ist auch Gleichung (25) empirisch abgeleitet.

Die *Absorption in der Fortpflanzungsrichtung* hängt in hohem Grade von λ und T ab, wie dies in Figg. 11 und 12 dargestellt ist; die Ordinaten geben den Briggschen Logarithmus derjenigen Entfernung $1/B$ in Kilometern an, in welcher die Amplitude auf $1/e$ ihres Betrages herabsinkt. Die mit F bezeichnete gestrichelte Kurve der Fig. 12 zeigt die Größe der Absorption für den Fall, daß das gesamte Erdreich von der Beschaffenheit des Leiters 1 wäre; die Linie $T = 0$ gilt für durchaus trockenen Boden.

Fig. 6.

Fig. 9.

In Fig. 13 ist die *Absorption beim Eindringen in den Leiter 1* dargestellt; ist $r_1 = \pm (C + iD)$, so ist $1/D$ die Tiefe, in welcher die Amplitude sich auf $1/e$ ihres Wertes vermindern würde; der Betrag von T kommt hierbei nicht merklich in Betracht. Bei den hier vorausgesetzten Werten von T ($\cong 50$ cm) erfährt also die Amplitude innerhalb des Leiters 1 nur eine ganz geringfügige Veränderung.

Bei dem *Fortgang der Wellen durch den Leiter 2* erleidet die Amplitude nochmals eine Verkleinerung; ist $\lambda = 1000$ m und $T = 20$ cm, so reduziert sich die

Amplitude auf $1/e$ im Abstand etwa 600 m von der Erdoberfläche; für kleinere Wellenlängen oder größere Werte von T vermindert sich diese Zahl um einige Prozent.

Aus dem Bisherigen ergibt sich für die Praxis der drahtlosen Telegraphie etwa folgendes: *hinsichtlich der Absorption*

in der Fortpflanzungsrichtung wirkt die Durchfeuchtung der obersten Erdschicht durchweg günstig, am meisten für Stationen,

Fig. 10.

die mit kurzen Wellenlängen arbeiten; unter dem Einfluß der Durchfeuchtung gestaltet sich ferner das elektrische Feld in der Luft zu einem fast reinen Wechselfeld, auch schon bei

Fig. 11.

Fig. 12.

geringer Tiefe der durchnässten Erdschicht; die Neigung der Feldrichtung gegen die Vertikale nimmt dagegen nur un-
erheblich ab.

Um wenigstens an einem Beispiel den Einfluß einer ver-

änderten Beschaffenheit der Leiter kennen zu lernen, wurde noch der folgende Fall berechnet:

$$\lambda = 1000 \text{ m}, \quad T = 20 \text{ cm}, \quad k_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 50,$$

σ_1 und die übrigen Konstanten wie p. 49 angegeben. Diese Zahlen entsprechen etwa der Annahme, daß trockene Erde von einer mäßig tiefen *Schneedecke* überlagert wird; Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Schnees sind allerdings innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürlich.

Fig. 13.

Die Ausführung der Rechnung ergab für das Diagramm der elektrischen Feldstärke nahezu wieder das Bild von Fig. 5, nur ist die Annäherung an das Wechselfeld in der Luft noch vollkommener. Die Absorption in der Fortpflanzungsrichtung ist geringer, als wenn die Oberschicht von feuchter Erde gebildet wird; man erhält diesmal für $\lambda = 1000$ m etwa diejenige Kurve, welche in Fig. 11 dem Wert $\lambda = 600$ m entspricht. Beim Eindringen in die Leiter 1 und 2 ist die Absorption fast genau die gleiche, wie in den früheren Fällen.

In der Hauptsache gelten also die seitherigen Ergebnisse wenigstens qualitativ auch für den Fall, daß an Stelle der nassen Erdschicht eine Schneedecke tritt.

III. Anwendung auf den Fall vorhandenen Grundwassers.

Wir gehen nunmehr zu dem Falle über, in welchem sich unter trockenem Boden Grundwasser befindet. Die Tiefe T

der trockenen Schicht wird nicht mehr als 100 m betragen; daß die aus Grundwasser bestehende Schicht nach unten unbegrenzt angenommen wird, ist eine Vereinfachung, deren Zulässigkeit weiter unten geprüft wird.

Um die das Feld bestimmenden Größen zu ermitteln, hat man auch hier die Gleichungen (12) oder (13) aufzulösen; da fast in allen untersuchten Fällen $|r_1 T| < 1$ ist, so kann (13) als Ausgangspunkt der Annäherung dienen. Dabei findet noch die Besonderheit statt, daß zunächst s^2 gegen A_2 vernachlässigt, also r_2^2 durch A_2 ersetzt werden kann; folglich ergibt sich aus (13):

$$C_0 r_0 (1 - T C_2 \sqrt{A_2}) + T r_1^2 = -C_2 \sqrt{A_2};$$

für $\sqrt{A_2}$ ist derjenige Wert zu nehmen, dessen imaginärer Anteil positiv ist. Setzt man nun:

$$(30) \quad B_0 = \frac{C_0^2}{4} \left(\frac{1}{T} - C_2 \sqrt{A_2} \right)^2, \quad B_1 = \frac{C_2 \sqrt{A_2}}{T},$$

so findet man durch eine einfache Rechnung den Näherungswert:

$$(31) \quad \bar{s}^2 = A_1 + B_1 - 2 \left[B_0 - \sqrt{B_0 (A_0 + B_0 - A_1 - B_1)} \right].$$

Die hier auftretende Quadratwurzel ist von B_0 nicht allzusehr verschieden, woraus sich ihr Vorzeichen bestimmt; der bei Anwendung dieser Näherungsformel begangene Fehler beträgt in dem ungünstigsten der durchgerechneten Fälle etwa 13 Proz. Ist $|B_0|$ hinreichend groß gegen $|A_1 + B_1 - A_0|$, so erhält man durch Reihenentwicklung aus (31):

$$(32) \quad \bar{s}^2 = A_0 - \frac{(A_1 + B_1 - A_0)^2}{4 B_0};$$

auch diese Formel gewährt eine befriedigende Genauigkeit, wenn $\lambda \geq 600$ m, $T \geq 50$ m ist.

Unter Benutzung des Wertes von $\bar{s}^2$ bekommt man unschwer eine genaue Lösung der Gleichung (12); besteht hierbei zwischen den reellen Zahlen a , b , ξ , η die Beziehung

$$\xi + i \eta = \arctg(a + i b),$$

so findet man zuerst φ und ψ aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2a}{1 - (a^2 + b^2)}, \quad \sin \psi = \frac{2b}{1 + a^2 + b^2},$$

sodann ξ und η , die letztere Größe mit Hilfe einer Hyperbelfunktion¹⁾, aus:

$$\xi = \frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Der Rechnung liegen die Zahlen:

$$\varepsilon_0 = 0,88 \cdot 10^{-22}, \quad k_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 2, \quad k_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = 80, \\ \sigma_1 = 10^{-16}, \quad \sigma_2 = 5 \cdot 10^{-14}$$

in Einheiten des C.G.S.-Systems zugrunde; für T wurden Werte zwischen 0 und 100 m, für λ wie seither die Zahlen 300 m, 600 m, 1000 m und 2000 m angenommen. Die in Fig. 38 enthaltenen Angaben für $\lambda = 400$ m und $\lambda = 500$ m sind durch Interpolation bestimmt.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung sind in Figg. 14—38 veranschaulicht; um die Vergleichung zu erleichtern, wurden auch die Figg. 2, 4, 7 nochmals aufgenommen (Figg. 23, 28, 33).

Während bei trockenem Boden die Richtung, in welcher die Amplitude der *elektrischen Feldstärke* ein Maximum ist, von der Vertikalen erheblich abweicht, bewirkt das Grundwasser eine entschiedene Annäherung der genannten Richtung an die Vertikale. Bei geringer Tiefe des Grundwasserspiegels unter der Erdoberfläche ist die Drehfeldkomponente geringfügig, besonders für größere Wellenlängen; je weiter aber der Grundwasserspiegel von der Erdoberfläche abrückt, desto stärker wird die Drehfeldkomponente und erreicht namentlich bei kürzeren Wellenlängen einen auffallend großen Betrag (Figg. 14—33).

Das Verhalten des Feldes an der oberen Grenze des Leiters 1 bietet nichts besonders Bemerkenswertes; an der unteren Grenze entsteht ein nahezu reines Wechselfeld, dessen Richtung von der Vertikalen nicht allzusehr verschieden ist; man vergleiche hierzu Fig. 34, welche ziemlich gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von T und λ gilt; je größer λ , desto geringer ist die Drehfeldkomponente.

In dem Leiter 2 entsteht ein nahezu horizontal gerichtetes Wechselfeld; in den berechneten Fällen liegt $|E_x/E_z|$ etwa zwischen 10 und 25; das Grundwasser spielt also hier eine ähnliche Rolle, wie in dem früher behandelten Falle die nasse Oberschicht.

1) W. Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen, Berlin 1889.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 37.

Fig. 35 gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_x längs der X-Achse an; wie man sieht, sinkt c_x namentlich bei kürzeren Wellenlängen erheblich unter den Betrag der Lichtgeschwindigkeit herab.¹⁾

Die Absorption in der Fortpflanzungsrichtung ist in Figg. 36 und 37 wiedergegeben; in Fig. 37 bedeutet die mit R bezeichnete gestrichelte Linie den Betrag der Absorption für den Fall, daß das Erdreich nur aus trockenem Boden (ohne Grund-

1) Ein ähnliches Ergebnis hat F. Harms in dem von ihm behandelten, dem vorliegenden einigermaßen analogen Falle gefunden; vgl. Ann. d. Phys. 23. p. 44 f. 1907.

wasser) besteht; die Kurve $T = 0$ gilt, wenn die trockene Erdschicht fehlt. Auch hier ist $1/B$ die Entfernung, welche die Amplitude auf $1/e$ reduziert. Eine außerordentlich starke Absorption findet statt bei großen Werten von T und gleichzeitig kurzen Wellenlängen; bei großen Wellenlängen von 2000 m und mehr dürfte die Absorption niemals von praktischer Bedeutung werden.

Aus Fig. 38 ist die *Absorption beim Eindringen in den Leiter 1* ersichtlich; $1/D$ ist die Tiefe, in welcher die Amplitude auf

Fig. 38.

$1/e$ vermindert wird. Wie man sieht, kann die Absorption hier völlig verschwinden; bei Wellenlängen über 1000 m ist $1/D = 550-620$ m. Tatsächlich erfährt also in keinem der hier betrachteten Fälle die Amplitude eine merkliche Veränderung, solange die Wellen den Leiter 1 durchsetzen.

Weit stärker ist die *Absorption innerhalb des Leiters 2*; beim Eindringen in das als unendlich tief vorausgesetzte Grundwasser nimmt die Amplitude auf $1/e$ ab in einer Tiefe unter

dem Grundwasserspiegel, welche sich für $\lambda = 300$ m auf etwa 11 m, für $\lambda = 2000$ m auf etwa 20 m beläuft; der Wert von T hat keinen wesentlichen Einfluß.

Für die *drahtlose Telegraphie* lehren die vorstehenden Betrachtungen hauptsächlich folgendes: die Wirksamkeit der mit langen Wellen arbeitenden großen Stationen wird durch vorhandenes Grundwasser entschieden günstig beeinflusst, besonders hinsichtlich der Absorption in der Fortpflanzungsrichtung; für Stationen mit kurzen Wellenlängen kann dagegen die Absorption der Wellen durch die Anwesenheit von Grundwasser *vergrößert* werden, außerdem wird für solche Stationen die Richtung des Feldes durch das Auftreten einer starken Drehfeldkomponente erheblich beeinflusst.

IV. Einführung einer weiteren leitenden Schicht.

In der eingangs erwähnten Arbeit von Zenneck sind verschiedene Bedenken gegen die Verwendbarkeit der gewonnenen Resultate für die drahtlose Telegraphie aufgezählt¹⁾; es bedarf kaum der Erwähnung, daß alle diese Einwände auch gegen die vorliegende Arbeit geltend gemacht werden können: insbesondere bleibt es fraglich, ob der gewählte Ansatz den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie überhaupt entspricht.

Für den unter III. behandelten Fall kommt noch die weitere Schwierigkeit hinzu, daß der einfacheren Rechnung wegen die Tiefe des Grundwassers unendlich groß angenommen wurde. Dies läßt sich einigermaßen dadurch rechtfertigen, daß, wie im

Fig. 39.

vorstehenden angegeben, die Amplitude im Grundwasser verhältnismäßig rasch abnimmt; bei nicht gar zu geringer Mächtigkeit der Grundwasserschicht dürfte also — von den übrigen Bedenken abgesehen — immerhin eine für die Praxis genügende Annäherung an die Wirklichkeit erzielt sein.

Es liegt nahe, dem Übelstand dadurch abzuhelpen, daß man eine endliche Mächtigkeit der Grundwasser-

1) J. Zenneck, l. c. p. 855 f.

schicht annimmt, also das in Fig. 39 dargestellte Schema zugrunde legt: zu oberst Luft (0), dann zwischen eine begrenzte (1) und eine nach unten unbegrenzte (3) Schicht trockenen Erdsreichs eingeschlossen eine Grundwasserschicht (2) von der Mächtigkeit $T_2 - T_1$.

Zu den Gleichungen (1) bis (3) treten die folgenden:

Schicht 2 (Grundwasser):

$$(33) \quad \begin{cases} M_{2y} = (a_2 e^{\epsilon r_2 z} + b_2 e^{-\epsilon r_2 z}) F, \\ E_{2x} = \frac{\epsilon v r_2}{\sigma_2 + \epsilon \nu \epsilon_2} (a_2 e^{\epsilon r_2 z} - b_2 e^{-\epsilon r_2 z}) F', \\ E_{2z} = -\frac{\epsilon v s}{\sigma_2 + \epsilon \nu \epsilon_2} (a_2 e^{\epsilon r_2 z} + b_2 e^{-\epsilon r_2 z}) F'; \end{cases}$$

Untere Erdschicht 3, beschaffen wie 1:

$$(34) \quad \begin{cases} M_{3y} = a_3 e^{\epsilon r_3 z} F, \\ E_{3x} = \frac{\epsilon v r_3}{\sigma_1 + \epsilon \nu \epsilon_1} a_3 e^{\epsilon r_3 z} F, \\ E_{3z} = -\frac{\epsilon v s}{\sigma_1 + \epsilon \nu \epsilon_1} a_3 e^{\epsilon r_3 z} F'. \end{cases}$$

Die in (7) und (8) eingeführten Größen behalten ihre Bedeutung bei; es kommt noch hinzu:

$$(35) \quad r_3^2 + s^2 = -\epsilon \alpha_1 (1 + \epsilon q_1) = A_1.$$

Hiernach ist also $r_3 = \pm r_1$; nimmt man¹⁾

$$(36) \quad r_3 = -r_1,$$

und setzt, wie bisher, $a_0 = 1$, so erhält man die folgenden Grenzbedingungen:

$$(37) \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ (a_1 - b_1) r_1 \frac{\epsilon q_0}{1 + \epsilon q_1} = -r_0; \\ a_2 e^{\epsilon r_2 T_1} + b_2 e^{-\epsilon r_2 T_1} = a_1 e^{\epsilon r_1 T_1} + b_1 e^{-\epsilon r_1 T_1}, \\ (a_2 e^{\epsilon r_2 T_1} - b_2 e^{-\epsilon r_2 T_1}) \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1 + \epsilon q_1}{1 + \epsilon q_2} = a_1 e^{\epsilon r_1 T_1} - b_1 e^{-\epsilon r_1 T_1}; \\ a_3 e^{-\epsilon r_1 T_2} = a_2 e^{\epsilon r_2 T_2} + b_2 e^{-\epsilon r_2 T_2}, \\ -a_3 e^{-\epsilon r_1 T_2} \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{1 + \epsilon q_2}{1 + \epsilon q_1} = a_2 e^{\epsilon r_2 T_2} - b_2 e^{-\epsilon r_2 T_2}. \end{cases}$$

Haben C_0 und C_2 die seitherige Bedeutung und können die Quadrate von $|r_1 T_1|$, $|r_2 T_1|$, $|r_2 T_2|$ gegen 1 vernachlässigt

1) Vgl. unten p. 62.

werden, so ergibt sich durch Entwicklung der Exponentialfunktionen:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 = 1, \\ a_1 - b_1 = \iota \frac{r_0}{r_1} C_0; \\ a_2 + b_2 + \iota r_2 T_1 (a_2 - b_2) = 1 + \iota r_1 T_1 (a_1 - b_1), \\ a_2 - b_2 + \iota r_2 T_1 (a_2 + b_2) = \frac{\iota r_1}{C_2 r_2} (a_1 - b_1 + \iota r_1 T_1); \\ a_3 e^{-\iota r_1 T_2} = a_2 + b_2 + \iota r_2 T_2 (a_2 - b_2), \\ a_3 e^{-\iota r_1 T_2} = \frac{\iota C_2 r_2}{r_1} [a_2 - b_2 + \iota r_2 T_2 (a_2 + b_2)]. \end{array} \right.$$

Setzt man den Wert von $a_1 - b_1$ in die zwei nächstfolgenden Gleichungen ein und subtrahiert die zwei letzten Gleichungen, so erhält man für $a_2 + b_2 = \xi$ und $a_2 - b_2 = \eta$:

$$\begin{aligned} \xi + \iota r_2 T_1 \eta &= 1 - r_0 C_0 T_1, \\ \iota r_2^2 C_2 T_1 \xi + r_2 C_2 \eta &= -(r_0 C_0 + r_1^2 T_1), \\ (r_1 + r_2^2 C_2 T_2) \xi + \iota r_2 (r_1 T_2 - C_2) \eta &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(39) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & T_1 & 1 - r_0 C_0 T_1 \\ r_2^2 C_2 T_1 & -C_2 & \iota (r_0 C_0 + r_1^2 T_1) \\ r_1 + r_2^2 C_2 T_2 & r_1 T_2 - C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hätte man in (36) $r_3 = r_1$ gesetzt, was aber den vorhergehenden, hier nicht aufgenommenen Zahlenrechnungen widersprechen würde, so wäre in (39) r_1 durch $-r_1$ zu ersetzen.

Nimmt man für Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante die bisherigen Werte, ferner $T_1 = 10^3$ cm, $T_2 = 1,1 \cdot 10^3$ cm, also $T_2 - T_1 = 1$ m an, so läßt sich statt Δ die Näherung benutzen:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & T_1 & 1 \\ r_2^2 C_2 T_1 & -C_2 & \iota (r_0 C_0 + r_1^2 T_1) \\ 1 & T_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$(40) \quad \iota (r_0 C_0 + r_1^2 T_1) (T_2 - T_1) = C_2 (1 + r_2^2 T_1 T_2).$$

Es bietet keine Schwierigkeit, aus dieser Gleichung die Werte der gesuchten Größen zu berechnen; allein die Resultate

erweisen sich als physikalisch unmöglich, indem z. B. r_0 der p. 46 gegebenen Vorzeichenregel nicht genügt, auch zeigt sich mit wachsendem T_2 keine Annäherung an die früheren Ergebnisse.

Dies rührt davon her, daß der gewählte Ansatz in diesem Falle nicht den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie entspricht: da der Raum ober- und unterhalb der relativ gut leitenden Schicht 2 annähernd gleichwertig ist, so findet Energieströmung in die Schicht 2 von oben und unten statt; bei der drahtlosen Telegraphie hingegen kommt in den Raum 3 nur solche Energie, welche vorher die Schicht 2 durchsetzt hat.

Stuttgart, Juni 1908.

(Eingegangen 14. Juni 1908.)