PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLVII.

I. *Zur Brechung und Dispersion des Lichtes durch Metallprismen; von Daniel Shea.*

(Hierzu Taf. II Fig. 1 u. 1a.)

Einleitung.

§ 1. Die von Cauchy¹⁾ entwickelte Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes ergibt, dass das Snellius'sche Sinusgesetz nicht mehr gültig sein kann, sobald die betrachtete Substanz das Licht stark absorbiert. Jene Theorie, wie sie von Beer²⁾, Eisenlohr³⁾, Ketteler⁴⁾ u. a. weiter ausgeführt wurde, lieferte das Resultat, dass das „Brechungsverhältniss“ solcher Körper (immer noch definirt als $\sin i / \sin r$) eine Function des Einfallswinkels i sei.

Die von Hrn. v. Helmholtz⁵⁾ aufgestellte Theorie der Brechung und Dispersion ist auf folgende Annahmen begründet: 1. ponderabler, in den Aether eingelagerter und des Mitschwingens fähiger Atome, die so dicht beisammen liegen, dass sie wie ein continuirliches Medium wirken, 2. einer Kraft, die zwischen den ponderablen Atomen und denen des Aethers wirksam ist, 3. einer Kraft zwischen den festliegenden und den bewegten Körpertheilchen, welche letztere in ihre Gleichgewichtslagen zurücktreibt, 4. einer Reibung der ponderablen Atome, welche ein Theil der von dem Aether herrührenden Energie vergeudet. Diese Hypothese fordert nun ebenfalls, wie Wernicke⁶⁾ und Kirchhoff⁷⁾ bewiesen haben, eine Abhängigkeit

1) Cauchy, Compt. rend. 7. p. 1050. 1838; 8. p. 41. 1839.

2) Beer, Pogg. Ann. 92. p. 402. 1854.

3) Eisenlohr, Pogg. Ann. 104. p. 337. 1858.

4) Ketteler, Verhandl. d. Naturh.-Vereins d. Rheinl. 32. 4. II. p. 70.

5) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 154. p. 585. 1874.

6) Wernicke, Pogg. Ann. 159. p. 222. 1876.

7) Kirchhoff, Vorlesungen über Math. Optik. p. 173. 1891.

des Brechungsverhältnisses vom Einfallswinkel, sobald die Absorption eine erhebliche ist.

In der That ist letztere Eigenschaft die nothwendige und genügende Bedingung für jene Forderung; jede Theorie, welche überhaupt die Absorption durch Einführung der entsprechenden Exponentialfunction berücksichtigt, muss dasselbe Resultat ergeben, unabhängig von irgendwelchem speciellen Absorptionsmechanismus.

§ 2. Dass die Abhängigkeit der optischen Parameter der Metalle vom Einfallswinkel durch die Cauchy'sche Gleichung annähernd dargestellt wird, hat schon Jamin¹⁾ constatirt. Die von Beer a. a. O. aufgestellte Formel wurde von Quincke²⁾ mit einem Interferenzapparat geprüft; auch er gelangte zum Schlusse, dass die Brechungsverhältnisse der Metalle von der Incidenz abhängig seien und zwar mit wachsender Incidenz zunehmen. Später hielt er aber diese Anschauung für unrichtig, da die beobachteten Werthe für die Gangunterschiede zu negativen, d. h. unmöglichen Brechungsverhältnissen führten, wenn man nicht eine Phasenbeschleunigung bei dem Uebergang des Lichtes von Luft zum Metalle oder umgekehrt annimmt.³⁾ Aus Bestimmungen des Brechungsverhältnisses des Silbers, die auf Messungen der Absorption basirten, schloss Wernicke⁴⁾, dass die Abhängigkeit jener Grösse von der Incidenz, wenn überhaupt vorhanden, so doch sehr gering sei. Dagegen glaubte Eisenlohr⁵⁾ den Versuch Wernicke's als eine Bestätigung der Cauchy'schen Theorie betrachten zu können, und Voigt⁶⁾ zeigte später, dass alle Folgerungen, welche Wernicke aus den Absorptionsmessungen bei normaler und schiefer Incidenz zog, hinfällig sind. Weiter hat Voigt bewiesen, dass Quincke's Beobachtungen mit seiner (der Voigt'schen) Theorie übereinstimmen.

Neuerdings haben die Hrn. du Bois und Rubens⁷⁾, ohne

1) Jamin, Ann. d. Chim. et d. Phys. **19**. p. 296. 1847; **22**. p. 311. 1848.

2) Quincke, Pogg. Ann. **120**. p. 599. 1863.

3) Quincke, Pogg. Ann. **129**. p. 187. 1871.

4) Wernicke, Pogg. Ann. **155**. p. 87. 1875; **159**. p. 223. 1876; Wied. Ann. **3**. p. 133. 1878.

5) Eisenlohr, Wied. Ann. **1**. p. 200. 1877.

6) Voigt, Wied. Ann. **25**. p. 95. 1885.

7) du Bois und Rubens, Wied. Ann. **41**. p. 507. 1890, Phil. Mag. (5) **30**. p. 365. 1890.

sich auf eine specielle optische Theorie zu stützen, mittels der von Hrn. Kundt entwickelten Prismenmethode zu der Beziehung zu gelangen versucht, welche bei absorbirenden Medien an Stelle des Snellius'schen Brechungsgesetzes tritt.¹⁾ In der That ergeben sich aus ihren Versuchen merkliche Abweichungen vom Snellius'schen Gesetz für die Metalle Ni, Co und Fe. Da die Beobachtungen von Hrn. Kundt²⁾ sicher gestellt haben, dass die Brechungsindices der Metalle Au, Cu und Ag bei normaler Incidenz kleiner als Eins sind, und Metalle mit kleinerem Brechungsindex sehr grosse Abweichungen vom Sinusgesetz ergeben sollten, erschien es besonders wünschenswerth, auch bei schiefem Durchgang des Lichtes unter Beibehaltung der Kundt'schen Methode Messungen an diesen Metallen vorzunehmen. Im Folgenden erlaube ich mir, einige für die Metalle Au, Ag, Cu, Pt und Ni erhaltene Resultate mitzutheilen, welche zur weiteren Erkenntniss auf diesem Gebiete einen Beitrag liefern mögen.

I. Die Brechung.

Versuchsanordnung.

§ 3. Zu diesen Bestimmungen diente das grosse Pistor-Martin'sche Spectrometer, welches im Verlaufe der von Hrn. Kundt und den Hrrn. du Bois und Rubens damit ausgeführten Arbeiten manche Verbesserung erfahren hatte. Zur Bestimmung des Prismenwinkels wurde ein Gauss'sches Ocular Abbé'scher Construction benutzt, welches an Stelle des Fadenkreuzes einen Lichtspalt besass; zur Bestimmung der Ablenkung diente theils das Gauss'sche, theils ein Micrometerocular mit parallelen Fäden. Die Einstellungen wurden bei Benutzung des Gauss'schen Oculars durch Drehung der Alhidadenschraube am Spectrometerfernrohr erhalten. Es entsprach ein Trommeltheil der Alhidadenschraube einer Drehung der Fernrohraxe um $4,20''$, ein Trommeltheil des Micrometeroculars einer Drehung um $2,20''$.

Die Prismenpräparate wurden nach den früheren Angaben von Hrn. Kundt angefertigt.

1) Vgl. die folgende Abhandlung von du Bois und Rubens p. 203.

2) Kundt, Wied. Ann. **34**. p. 469. 1888 und **36**. p. 824. 1889; Phil. Mag. (5) **26**. p. 1. 1888.

Prüfung der Methode.

§ 4. Die zahlreichen Controllversuche, welche von Hrn. Kundt selbst und den Hrrn. du Bois und Rubens angestellt worden sind, lassen nur wenige Einwände, welche gegen die Versuchsanordnung erhoben werden könnten, unberücksichtigt. Daher habe ich mich mit einer geringen Zahl weiterer Controllmessungen begnügen können.

§ 5. In erster Linie wurde das von Hrn. Kundt angewandte Collimirverfahren auch hier, bei schiefe Durchgang des Lichtes, geprüft, in ähnlicher Weise, wie die Hrrn. du Bois und Rubens das bei normaler Incidenz schon ausführten. Ein vorzügliche planparallele Glasplatte von Hrn. Brashear in Alleghany-City und mehrere, mittels Gauss'schen Oculars ausgesuchte, platinirte Glasstückchen wurden nach den Angaben von Hrn. Kundt genau so wie die Prismenpräparate mit schwarzem Lack bemalt, d. h. so, dass nur zwei (innere) Fenster, welche den Biprismen der wirklichen Prismenpräparate entsprachen, und zwei seitliche (äussere) Fenster frei blieben; (zur näheren Erläuterung siehe die citirte Abhandlung von du Bois und Rubens, und Fig. 1 der zugehörigen Tafel). An den so präparirten Platten wurden genau die nämlichen Messungen vorgenommen, wie an den Metallprismen. Eine von diesen Platten wurde vertical auf dem Spectrometertischchen befestigt. Mittels der vorhandenen Kreistheilung konnte der Plattennormale jede beliebige Neigung rechts oder links von der Fernrohraxe gegeben werden. Bei Neigungen von 0° , 10° , 20° . . . wurde die Collimirung in der von Hrn. Kundt vorgeschriebenen Weise ausgeführt. Nach der Collimirung, d. h. wenn die beiden äusseren Fenster genau an derselben Stelle des Gesichtsfeldes Spaltbilder gaben, lieferten die beiden inneren Fenster scheinbare Ablenkungen, die in Tab. 1 zusammengestellt sind. Die Zahlen sind die Mittel der bei gleichen Neigungen der Plattennormale nach links und rechts erhaltenen.

Man sieht, dass das platinirte Glas im Vergleiche mit dem planparallel geschliffenen ein sehr befriedigendes Verhalten ergibt. Die Platte A diente nachher als Unterlage für das Jodsilber-Prisma (Tab. 2), die Platte B für das dritte Kupferprisma (Tab. 3).

Tabelle 1.

Incidenz	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
Planparallel.	— 0,33	— 0,40	+ 0,17	+ 0,31	— 0,10	+ 0,12	+ 0,24	+ 0,44
Glaspl.								
Platin. { A	+ 0,91	— 0,08	+ 0,51	+ 1,20	— 0,34	+ 0,78	+ 1,98	+ 1,75
Glaspl. { B	+ 1,33	+ 1,07	+ 1,03	+ 2,00	+ 1,74	+ 0,90	+ 1,37	+ 1,47

§ 6. Sodann ist von verschiedener Seite¹⁾ der a priori nicht ganz unberechtigte Einwand erhoben worden, dass das optische Verhalten derartig dünner Schichten nur mit Vorsicht zu interpretiren sei, indem die Schwingungszustände gewissermaassen aus Raumangel nicht in normaler Weise sich ausbreiten können. Behufs Entkräftigung dieses Einwandes habe ich Beobachtungen an Jodsilberprismen angestellt, einer durchsichtigen Substanz, für die in dicken Schichten das Sinusgesetz Gültigkeit hat. Von mehreren AgJ-Prismen, welche durch Jodirung sehr dünner Silberprismen erhalten wurden, habe ich einige auswählen können, deren Dicke, ausgedrückt in Wellenlängen in der Substanz, mit der Dicke der benutzten Metallprismen vergleichbar war. Um zu entscheiden, ob das Sinusgesetz gültig sei, müssen Werthe für die Ablenkungen nach diesem Gesetz berechnet werden.

§ 7. Wir bezeichnen mit β den Prismenwinkel, mit i den Einfallswinkel, mit i' den Austrittswinkel, mit r und r' die entsprechenden Winkel in der Substanz, mit α die durch das Prisma hervorgerufene Ablenkung und mit n den Brechungsindex. Dann ist $\sin i = n \sin r$; $\sin i' = n \sin r'$, und $\alpha = i + i' - \beta$. Aus diesen Ausdrücken erhält man die Gleichung

$$(1) \quad n^2 = \frac{\sin^2 i + \sin^2 (\alpha + \beta - i) + 2 \sin (\alpha + \beta - i) \cos \beta \sin i}{\sin^2 \beta}$$

welche in die Form

$$(2) \quad \sin (\alpha + \beta - i) + \cos \beta \sin i = \sin \beta \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

umgeschrieben werden kann, und aus dieser leitet man die für α explicite Gleichung ab:

1) U. a. von Sir William Thomson (Lord Kelvin) und Hrn. O. Lodge während der Discussion in der Sect. A. der Brit. Ass. zu Leeds am 4. Sept. 1890. Vgl. übrigens Eisenlohr, Wied. Ann. 1. p. 204. 1877.

$$(A) \left\{ \begin{aligned} \sin \alpha = & -\sin(\beta - i) \sqrt{1 - (\cos \beta \sin i - \sin \beta \sqrt{n^2 - \sin^2 i})^2} \\ & - \cos(\beta - i) (\cos \beta \sin i - \sin \beta \sqrt{n^2 - \sin^2 i}) \end{aligned} \right\}$$

Es ist hier ein für allemal zu bemerken, dass die für einfache Prismen abgeleiteten Gleichungen ohne weiteres auf die untersuchten Biprismen ausgedehnt werden können. Demgemäss wurde die Gleichung A zur Berechnung von α angewandt. Der benutzte Werth von n ist das Mittel aus den bei $0^\circ \dots 70^\circ$ Neigung gefundenen Werthen, welche mit Hülfe der Gleichung (2) berechnet worden sind.

Tabelle 2.

Incidenz		0°	30°	50°	70°
Jodsilber	n	2,43	2,42	2,42	2,51
$\beta = 19,74''$	$\alpha \left\{ \begin{array}{l} \text{beobachtet} \\ \text{berechnet} \end{array} \right.$	+ 28,4''	+ 34,3''	+ 51,0''	+ 113,4''
$n = 2,44$		+ 28,4	+ 34,8	+ 51,5	+ 110,6
$\lambda = 64 \times 10^{-6} \text{ cm}$					

Auf Grundlage dieser für ein solches Jodsilberprisma erhaltenen Zahlen kann man den Schluss ziehen, dass dünne Prismen aus schwach absorbirenden Substanzen sich in Bezug auf die Ablenkung des Lichtes ebenso verhalten, wie dickere es thun würden. Der erhobene Einwand wäre damit wohl zu Genüge entkräftet.

§ 8. Weiter hat kürzlich Hr. Mascart¹⁾ folgenden Einwurf erhoben: „Mais il peut arriver, et c'est probablement le cas des expériences de M. Kundt avec des prismes métalliques très aigus, que les changements de phase par lesquels on traduit l'effet des surfaces soient variables avec l'épaisseur traversée par la lumière . . . on peut avoir une idée du résultat si l'on suppose que l'effet des deux surfaces est proportionnel à leur distance, ou à l'épaisseur du milieu, ce qui équivaut à une modification apparente de l'angle du prisme.“ Aus weiteren Betrachtungen schliesst er, dass die Resultate der Methode der prismatischen Ablenkungen bei so dünnen Schichten als zweifelhaft bezeichnet werden müssen. Um diesem Einwande zu begegnen, braucht man nur einige Stellen aus Hrn. Kundt's früheren Abhandlungen anzuführen.²⁾ Erstens ver-

1) Mascart, *Traité d'optique*. 2. p. 560—565. Paris 1891.

2) Kundt, *Wied. Ann.* 34. pp. 479 u. 481. 1888.

schaffte er sich auf drei verschiedene Weisen die Sicherheit, dass die brechenden Winkel der benutzten Prismen richtig gemessen wurden. Zweitens bewies er, dass, wenn die Prismen in verschiedene Medien gebracht wurden, die Aenderungen der Ablenkung den Brechungsindices dieser Medien entsprechend waren. Damit war der Beweis geliefert, dass die gefundenen Werthe der Brechungsindices wirklich die Geschwindigkeit des Lichtes in den Metallen gaben, dass also variable Phasenänderungen weder die Messungen der brechenden Winkel noch die der Ablenkung gefälscht hatten.

§ 9. Es könnte endlich der freilich höchst unwahrscheinliche Einwand erhoben werden, dass bei schiefem Durchgang des Lichtes auch eine planparallele dünne Metallschicht im Stande wäre, den auffallenden Strahl aus seiner Richtung abzulenken. In diesem Falle wären die an den Metallprismen beobachteten Werthe mit Fehlern behaftet. Dieses Bedenken kann aber als vollkommen beseitigt gelten, da experimentell noch zum Ueberfluss festgestellt wurde, dass eine planparallele Silberschicht, die chemisch auf einer geschliffenen Glasplatte niedergeschlagen war, eine Ablenkung des schief durchgehenden Lichtes nicht verursachte.

§ 10. Hätte das Snellius'sche Gesetz auch für absorbierende Körper Geltung, so müsste totale Reflexion an Silber, Gold und Kupfer schon bei geringen Neigungen eintreten. Dass dieses nicht der Fall ist, haben schon Hr. Quincke¹⁾ und die Hrrn. du Bois und Rubens a. a. O. bemerkt. Um mich davon zu überzeugen, dass jene Erscheinung auch bei Incidenzen bis nahezu 90°, bei welchen Ablenkungsbeobachtungen an den Prismen aus anderen Gründen nicht vorgenommen werden konnten, nicht eintritt, wurden folgende Versuche ausgeführt. Eine geschliffene Glasplatte, etwa 20 cm lang und 4 cm breit, wurde auf chemischem Wege mit einer sehr dünnen, homogenen und cohärenten Silberschicht bedeckt. Diese Platte wurde mit der Schmalseite vertical auf dem Spectrometertisch befestigt und durch schwarze Schirme derart abgeblendet, dass alles Licht, welches an das Objectiv des Fernrohres gelangte, erst die Silberschicht durchsetzen

1) Quincke, Pogg. Ann. 120. p. 600. 1863.

musste und alsdann die Glasplatte. Bei einer Neigung von $89^{\circ} 20'$ war das Silber noch durchsichtig, Schichten von Gold und Kupfer, electrolytisch auf platinirtes Glas niedergeschlagen, waren bei 85° noch vollkommen durchsichtig.

§ 11. In diesem Zusammenhang darf erwähnt werden, dass ausführliche Untersuchungen hinsichtlich der Brechung in Prismen aus Gold, Silber, Kupfer und Platin unter Benutzung geradlinig polarisirten Lichtes vorgenommen wurden. Das einfallende Licht wurde durch ein Nicol parallel, geneigt, oder senkrecht zur brechenden Kante des Prismas polarisirt. In keinem Falle war ein Einfluss auf die Ablenkung wahrzunehmen. Ferner wurden Prismen aus Eisen, Cobalt und Nickel zwischen die Pole eines Ruhmkorff'schen Electromagnets in der Weise gestellt, dass die magnetischen Kraftlinien der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes in den Metallen parallel waren. Messungen der Ablenkung wurden dann bei Anwendung von gewöhnlichem und auch geradlinig polarisirtem Lichte angestellt, indem der Electromagnet erregt wurde. Mittels einer geeigneten Einrichtung konnte die Intensität des magnetischen Feldes zwischen 2000 und 12000 C.G.S.-Einheiten variirt werden. In allen Fällen war die Ablenkung des durchgehenden Lichtes genau die nämliche, wie sie sich unter Benutzung von gewöhnlichem Lichte ohne Erregung des Magnets ergab.

Herstellung der Metallprismen.

§ 12. Wie schon oben bemerkt, wurden die Prismen nach den Angaben von Hrn. Kundt hergestellt, und zwar die von Gold, Silber, Nickel und Kupfer durch electrolytische Zersetzung cyanhaltiger Lösungen, die Platinprismen dagegen durch Zerstäuben eines Platinbleches. Die Methoden von Hrn. Kundt sind an den erwähnten Stellen hinreichend ausführlich angegeben, sodass eine Beschreibung hier unterbleiben kann. Nur in Betreff der Anfertigung der Platinprismen möchte ich Einiges hinzufügen. Am sichersten führt die folgende Methode zum Ziel: Man erhitzt mittels des electrischen Stromes einen Streifen Platinblech, welcher über einem Stück Spiegelglas derart befestigt wird, dass die Ebene des Bleches senkrecht auf der Glasfläche steht, ohne das Glas zu berühren. Das Zerstäuben eines Streifens von 4 mm Breite

und etwa $\frac{1}{50}$ mm Dicke durch einen Strom von 20 Ampère ist bereits so erheblich, dass bei einer Entfernung von $\frac{1}{2}$ mm eine doppelkeilförmige Schicht von hinreichender Dicke innerhalb einer halben Stunde auf dem Glase sich bildet. Ohne geeignete Kühlvorrichtung würde bei dieser geringen Entfernung das Glas zerspringen; man verhütet dieses am besten durch Auflegung des Glases auf einen kleinen wasserdichten Kupferblechkasten, welcher durch Wasserspülung auf constanter niedriger Temperatur erhalten wird. Die in dieser Weise gewonnenen Niederschläge bestehen zum grössten Theil aus Platinoxyd, welches sich aber leicht reducirt, wenn man den Niederschlag im Sandbad bis auf 200° erwärmt und dann mit dem Reductionskegel der Bunsenflamme darüber hinfährt. Bei zu raschem Vorgehen löst sich das Platin ab. Die Schwierigkeiten der Herstellung sind bei den einzelnen Metallen ausserordentlich verschieden; ich möchte hierzu nur bemerken, dass sich unter 20 Prismen von Kupfer, Nickel und Platin ein brauchbares ergibt, während sich bei Silber und Gold kaum unter 200 der hergestellten ein brauchbares befindet.

Messungen.

§ 13. Zunächst wurden Fernrohr und Collimator für paralleles Licht genau eingestellt; dann wurde untersucht, ob die äusseren Fenster des Prismenpräparates bei der Collimirung verschiedene Einstellungen hinsichtlich der reflectirten, bez. der durchgehenden Strahlen ergaben, da man es anderenfalls nicht mit vollkommen ebenem Glase zu thun hat. Alsdann erfolgten die Messungen des Prismenwinkels, nachdem die Bilder vor den Fenstern in genaue Uebereinstimmung gebracht worden waren; darauf wurden die Ablenkungen des durch die Prismen gehenden Lichtes bei normalen und schiefen Incidenzen bis zu 65° oder 70° bestimmt. Zu den Messungen der Ablenkung diente als Lichtquelle ein Zirkonbrenner mit vorgeschobener Linse, in dessen reellem Bilde sich der Collimatorspalt befand. Direct vor dem Spalt stand ein rothes Glas, welches Licht durchliess, dessen mittlere Wellenlänge etwa 6×10^{-6} cm betrug.

§ 14. Wegen der sehr grossen Schwierigkeiten der Herstellung brauchbarer keilförmiger Schichten musste ich mich

Tabelle 3.

No.	β	Incidenz									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°
Gold											
1	16,23''	-10°,5	-10,6	-10,5	-9,3	-6,7	-5,2	—	-7,8	—	—
2	16,76	-13,4	-13,9	-15,6	-17,3	-17,1	-17,3	—	-13,9	—	—
3	28,08	-21,0	-19,5	-19,4	-20,2	-18,7	-19,4	—	-18,1	—	—
4	41,83	-30,8	-24,4	-27,9	-30,5	-30,0	-20,6	—	-17,3	—	—
Silber											
1	13,31	-10,8	-7,9	-7,1	-4,7	-3,6	-3,2	—	-1,2	—	—
2	15,37	-11,6	-11,7	-10,9	-10,7	-8,8	-8,7	—	-8,4	—	—
3	18,52	-15,1	-12,0	-9,9	-8,7	-6,1	-6,0	—	-2,6	—	—
4	25,28	-19,2	-18,0	-14,7	-16,5	-15,2	-12,7	—	-10,4	—	—
Kupfer											
1	29,06	-17,3	—	-16,5	-14,1	-13,4	-9,7	—	-5,9	—	+0,7
2	34,48	-17,5	—	-12,9	-14,7	-11,2	-6,8	—	-3,9	—	+19,0
3	37,50	-20,6	—	-19,9	-16,3	-12,6	-6,8	—	-3,2	—	+12,3
Nickel											
1	16,59	+17,6	—	—	+21,9	+27,5	+33,6	+47,0	+55,0	+59,6	—
2	23,63	+18,5	—	—	+24,6	+29,8	+37,7	+46,4	+58,7	+73,3	—
3	50,15	+53,1	—	—	+71,5	+87,7	+109,9	+127,5	+160,2	+196,8	—
Platin.											
1	19,15	+19,6	—	—	+24,1	+30,9	+41,0	+48,2	+55,5	+61,4	—
2	21,63	+23,2	—	—	+26,5	+34,3	+46,6	+56,0	+66,4	+79,8	—
3	24,82	+23,4	—	—	+27,0	+34,8	+51,9	+57,9	+77,8	+91,3	—

mit einer geringen Anzahl Prismen aus jedem Metalle begnügen. In Tab. 3 sind die Resultate für alle Prismen niedergelegt. Jede Zahl ist das Mittel aus vier Bestimmungen der zu messenden Grösse und jede von diesen Bestimmungen umfasst 20 Ablesungen bei Neigungen rechts, resp. links; daher entspricht jede der Zahlen der Tabelle 80 Ablesungen. Bei jeder Neigung wurde die endgültige Collimirung durch 20 Ablesungen geprüft. Die Bedeutung von α und β ist schon in § 7 angegeben.

Theorie.

§ 15. Um unsere Resultate mit der Theorie vergleichen zu können, schlagen wir am besten folgendes Verfahren ein. Wir wollen uns vorläufig auf die specielle Theorie des Hrn. v. Helmholtz stützen. Daraus werden wir für die Ablenkung α vier explicite Gleichungen herleiten, und aus diesen die Werthe berechnen, welche gegebenen Werthen von i entsprechen.

§ 16. Das für stark absorbirende Substanzen variable „Brechungsverhältniss“ n' soll nach wie vor als der Quotient $\sin i / \sin r$ definirt werden, wo i den Einfallswinkel, unter welchem das Licht in das absorbirende Medium eintritt, und r den entsprechenden Winkel im Medium bedeutet. Für normale Incidenz wird der Werth von n' mit n_0 bezeichnet werden; n_0 ist dann der Brechungsindex. Mit g soll der Extinctionsindex bezeichnet werden.¹⁾ Endlich soll wie oben (§ 7) β den

1) Da in dieser Beziehung unter den verschiedenen Autoren völlige Nichtübereinstimmung der Ausdrucksweise herrscht, sei Folgendes hinzugefügt, um die Bedeutung der Grösse g klarzustellen: Falls Licht von der anfänglichen Intensität I_0 in einer absorbirenden Substanz eine Strecke x durchläuft, so beträgt die Intensität nur noch

$$I_x = I_0 e^{-gx} = I_0 e^{-\frac{4\pi g}{\lambda} x}.$$

Darin ist g , [$L^{-1} M^0 T^0$], der Bruchtheil der Intensität, welcher pro Längeneinheit absorbtirt wird, dagegen g , [$L^0 M^0 T^0$], der auf der Strecke $\lambda/4\pi$ (wo λ die Wellenlänge im Vacuum) absorbirte Bruchtheil. Letztere Grösse nennen wir mit Wernicke, der sie zuerst einführte (Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8. p. 67. 1877) den *Extinctionsindex*. Beer (Pogg. Ann. 92. p. 404. 1854); Rubens (Wied. Ann. 37. p. 267. 1889), und Rathenau (Diss. Berlin 1889) brauchen dafür den Namen *Extinctionscoefficient*. In der Voigt'schen Theorie wird unser g mit $n_0 \kappa$ bezeichnet, und n_0 Brechungsindex, κ Absorptionsindex genannt (Wied. Ann. 23. p. 132. 1884).

Prismenwinkel und α die durch das Prisma bewirkte Ablenkung bedeuten.

§ 17. Zunächst ergibt sich aus der v. Helmholtz'schen Theorie, wie schon Wernicke¹⁾ und Kirchhoff²⁾ bewiesen haben:

$$(3) \quad n'^2 = \frac{1}{2} \{ n_0^2 - g^2 + \sin^2 i + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2} \}.$$

Dieselbe Gleichung muss aus jeder Theorie einfach abzuleiten sein, welche überhaupt die Absorption in Betracht zieht. Die Gleichung A (§ 7) gilt nun auch für absorbirende Substanzen, wofern dort an Stelle von n obiger Ausdruck für n' eingesetzt wird. Man erhält, wenn man diese Substitution ausführt, die in α explicite Gleichung:

$$(B) \quad \begin{cases} \sin \alpha = -\sin(\beta - i) \sqrt{1 - (\cos \beta \sin i - \sin \beta} \\ \sqrt{\frac{1}{2} [n_0^2 - g^2 - \sin^2 i + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2}])^2} \\ - \cos(\beta - i) (\cos \beta \sin i - \sin \beta \sqrt{\frac{1}{2} [n_0^2 - g^2 - \sin^2 i} \\ + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2}]) \}. \end{cases}$$

Da die Durchführung der Rechnung nach dieser Gleichung nicht gerade bequem ist, werden wir versuchen, einen einfacheren Ausdruck aufzustellen

§ 18. Aus der Gleichung ((2) § 7) erhält man unmittelbar

$$(4) \quad \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \cos \alpha \sin \beta \\ - (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \cos \beta) \operatorname{tg} i \end{cases}$$

Da α und β nur wenige Secunden betragen, darf man $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ gleich Eins setzen. Es wird dann

$$\sin \alpha = \sin \beta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} i.$$

Das Glied $\sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} i$ bleibt sehr klein gegen $\sin \alpha$, bis i sich 90° nähert; daher darf man als Annäherung schreiben

$$\sin \alpha = \sin \beta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \sin \beta,$$

1) Wernicke, Pogg. Ann. 159. p. 198. 1876.

2) Kirchhoff, Math. Optik. p. 173–177. Leipzig 1891.

oder wenn man noch an Stelle von $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ die Winkel α , bez. β selbst einsetzt, so wird

$$(5) \quad \alpha = \beta \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - 1 \right).$$

Die mit Hülfe von (5) berechneten Werthe für α werden alle zu gross sein, bis zur Incidenz 65° aber nur um wenige Secunden, bei 90° allerdings um unendlich viel. Lässt man nun an Stelle von n in (5) den Ausdruck für n' (3) treten, so erhält man die Gleichung

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\frac{1}{2} [n_0^2 - g^2 - \sin^2 i]} \right. \\ \left. + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2} \right\} - 1 \right\}, \end{aligned} \right.$$

welche α als Function bekannter Grössen explicit darstellt, also die Berechnung der numerischen Werthe gestattet, welche nun ebenfalls um wenigens zu gross ausfallen werden.

§ 19. Die Gleichung (C), nach welcher die Berechnung von α immer noch sehr mühsam ist, lässt sich in folgender Weise vereinfachen. Durch Addition und Subtraction der Grösse

$$\left(\frac{2 \sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} + \frac{\sin^4 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2} \right)$$

unter dem ersten Wurzelzeichen geht sie über in

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left(n_0^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right\}^2 \right.} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} - \frac{\sin^4 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} - \sin^2 i - n_0^2 (1 + g^2/n_0^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{n_0^4 (1 + g^2/n_0^2)^2 - 2 n_0^2 \sin^2 i + 2 n_0^2 (g^2/n_0^2) \sin^2 i + \sin^4 i} \right] \right\} - 1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man nun $(+ 2 n_0^2 \sin^2 i)$ an Stelle von $(- 2 n_0^2 \sin^2 i)$ unter dem zweiten Wurzelzeichen in (6) ein, d. h. addirt¹⁾ man $4 n_0^2 \sin^2 i$, so erhält man die Gleichung

1) Es beträgt die Grösse $4 n_0^2 \sin^2 i$ bei Silber nur etwa $1/5000$, bei Gold $1/250$, bei Kupfer $1/70$, bei Platin $1/40$, bei Nickel $1/25$ des Gesamtwertes des Ausdruckes unter diesem Wurzelzeichen.

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left(n_0^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) - \frac{1 + g^2/n_0^2}{2} - \frac{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2}{2 \sin^2 i} \right] + \sqrt{\frac{n_0^4 (1 + g^2/n_0^2)^4}{4 \sin^4 i} + \frac{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^3}{2 \sin^2 i} + \frac{(1 + g^2/n_0^2)^2}{4}} \right) - 1 \right\}.$$

Diesen Ausdruck kann man ohne weiteres in die Form

$$(7) \quad \left\{ \alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left(n_0^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right\}^2 + \left[\frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) \right] - 1 \right\} \right. \right.$$

bringen, und wenn man noch

$$\frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right)$$

gleich Null setzt¹⁾, so wird

$$(D) \quad \alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) - 1 \right\}.$$

Diese Gleichung gibt die berechneten Werthe von α algebraisch zu klein. Bezeichnet man nämlich die Differenz zwischen den addirten und subtrahirten Grössen

$$\left\{ \frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) - \sqrt{\frac{n_0^4 (1 + g^2/n_0^2)^2 + 2 n_0^2 \sin^2 i + 2 n_0^2 g^2/n_0^2 \sin^2 i + \sin^4 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2 + 2 n_0^2 g^2/n_0^2 \sin^2 i - 2 n_0^2 \sin^2 i + \sin^4 i}} \right\}$$

mit d , so ergibt sich, dass d annähernd gleich dem Ausdruck

$$\frac{3 \sin^4 i}{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)}$$

ist, d. h. der subtrahirte Ausdruck ist ein wenig grösser als

1) Der Werth von

$$\frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right)$$

ist bei Silber etwa $\frac{1}{60}$ des Gesamtwertes unter dem Wurzelzeichen; bei Nickel $\frac{1}{30}$.

der addirte. Demgemäss unterscheiden sich die Werthe von α nach (C) und nach (D) um eine Grösse, die kleiner als

$$\frac{3 \beta \sin^4 i}{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2}$$

sein muss. Wenn man aber das letzte Glied des Ausdruckes unter dem Wurzelzeichen in Gleichung (7) *nicht* gleich Null setzt, so reducirt sie sich sofort auf

$$(E) \quad \alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} - 1 \right\}.$$

Die Theorie ergibt also schliesslich vier Gleichungen, welche die Berechnung von α gestatten, und zwar (B) die strenge Gleichung, (C) und (D) bedeutend vereinfachte Formeln, von denen erstere zu grosse, letztere zu kleine Werthe für α ergeben, welche aber selbst bei beträchtlichen Werthen von i nicht wesentlich von den mit Hülfe von (B) berechneten differiren. Schliesslich (E) ein sehr einfacher Ausdruck, der für Metalle mit grossem g und kleinem n_0 in erster Annäherung gilt.

§ 20. Aus der Voigt'schen Theorie hat schon Hr. Drude¹⁾ die Gleichung

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + \kappa^2)} \right) - 1 \right\}$$

zur annähernden Berechnung von α abgeleitet, und mit den Beobachtungen der Hrn. du Bois und Rubens an Eisen, Nickel und Cobalt verglichen. Diese Gleichung ist mit (D) identisch, da nach Hrn. Voigt $n_0 \kappa = g$ ist, und, wie Hr. Drude gezeigt hat, darf sie in der einfacheren Form

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} - 1 \right\}$$

geschrieben werden, wenn der Werth des Ausdruckes $2n_0^2(1 + \kappa)$ beträchtlich ist. Diese Form aber ist mit (E) identisch. Letztere Gleichung lässt sich auch aus der Beer'schen Entwicklung der Cauchy'schen Theorie herleiten. Als annähernde Formel zur Berechnung von n' hat Beer²⁾ die Gleichung

$$(8) \quad n'^2 = n_0^2 + \sin^2 i$$

1) P. Drude, Wied. Ann. **42**. p. 666. 1891.

2) Beer, Pogg. Ann. **92**. p. 412. 1854.

aufgestellt. Wenn man diesen Ausdruck für n' an Stelle von n in die Gleichung (5) einsetzt, so erhält man sofort

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} - 1 \right\},$$

welche Beziehung wieder mit Gleichung (E) identisch ist.

§ 21. Die bisherigen Rechnungen sind rein algebraischer Natur und verloren allmählich jegliche physikalische Anschaulichkeit, wenn auch eine solche den ersten Ansätzen der Theorie innegewohnt haben mag. Anlässlich der mit der Prismenmethode schon erhaltenen Resultate hat Hr. H. A. Lorentz¹⁾ eine directe Ableitung für diesen Specialfall gegeben, wobei gerade jener Standpunkt möglichst gewahrt wird. Ausgangspunkt dieser inzwischen veröffentlichten, mir vom Verfasser vorher gütigst zur Verfügung gestellten Rechnung bilden einige völlig allgemeine und einwandfreie Ansätze, die in einfacher Weise zu folgender Gleichung für die Ablenkung führen:

$$\alpha = \beta \left\{ -1 + \operatorname{tg} i \sqrt{\left[-\frac{(\kappa^2 - 1)n_0^2}{2 \sin^2 i} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(\kappa^2 + 1)^2 n_0^4}{\sin^4 i} + 2 \frac{(\kappa^2 - 1)n^2}{\sin^2 i} + 1 \right)} \right]} \right\}$$

(a. a. O. § 14, Gleichung (21)), welche sich leicht so umformen lässt, dass sie mit unserer Gleichung (C) identisch wird. Am Ende desselben § 14 gibt Hr. Lorentz dann noch zwei Gleichungen, welche mit unseren (D), bez. (E) ohne weiteres übereinstimmen.

Vergleich mit den Beobachtungen.

§ 22. Um die gefundenen Gleichungen anzuwenden, braucht man die Werthe von g und von n_0 . Die Grösse g ist schon von Wernicke²⁾ und Rathenau³⁾ direct gemessen worden. Abgesehen von älteren Autoren hat Hr. Rubens⁴⁾ sie aus Bestimmungen des Reflexionsvermögens, und Hr. Drude⁵⁾ aus Messungen der Reflexionsparameter berechnet. Aus der

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. **46**. p. 244. 1892.

2) Wernicke, Pogg. Ann. Erg.-Bd. **8**. p. 75. 1878.

3) Rathenau, Inaug.-Dissert. Berlin 1889.

4) Rubens, Wied. Ann. **37**. p. 267. 1889.

5) Drude, Wied. Ann. **39**. p. 481. 1890.

Gleichung (2) erhält man leicht eine explicite Gleichung für n_0 . Ersetzt man nämlich in (2) n durch den Ausdruck für n' (3), so wird

$$(9) \quad n_0 = Q \sqrt{1 + \frac{\sin^2 i}{Q^2 + g^2}},$$

wo durch Q der Ausdruck

$$\frac{\sin(\alpha + \beta - i) + \cos \beta \sin i}{\sin \beta}$$

bezeichnet werden soll. Da bei so spitzen Prismen die Ablenkung direct proportional dem Prismenwinkel ist, durften die Mittel aus den Bestimmungen an allen Prismen eines jeden Metalls benutzt werden. In dieser Weise sollte die Wirkung der kleinen Unebenheiten und anderer Unvollkommenheiten der einzelnen Prismen ausgeglichen werden.

Es sind also die in Tab. 4 eingetragenen Zahlen die für das mittlere Prisma eines jeden Metalls mittels Gleichung (9) berechneten Werthe von n_0 . Die Mittel aus diesen Zahlen müssen der Wirklichkeit besser entsprechen als die Werthe, die man mit Hülfe der Gleichung $\alpha = \beta(n_0 - 1)$ berechnet, auf welche sämtliche Gleichungen (A—E) sich reduciren, wenn i gleich Null wird. Die Tabelle enthält nicht nur die Werthe von n_0 für die Metalle, die ich untersucht habe, sondern auch diejenigen für Eisen und Cobalt, nach den Beobachtungen der Hrn. du Bois und Rubens berechnet. Vorzugsweise habe ich die von Hrn. Rathenau direct experimentell ermittelten Werthe von g benutzt. Wo directe Bestimmungen fehlten, habe ich die von Hrn. Rubens oder die von Hrn. Drude gebraucht. Die von letzterem berechneten Werthe stimmen sehr gut mit den von Hrn. Rubens angeführten überein, dagegen sind die von Hrn. Rathenau ermittelten bedeutend kleiner; der Unterschied macht jedoch so wenig im Resultate aus, dass man diese oder jene Werthe hätte anwenden können. Man braucht also keinerlei Reduction wegen der Differenzen der Wellenlängen der von mir und der von den Hrn. Rathenau, Rubens oder Drude benutzten Lichtgattungen anzubringen.

Tabelle 4.

Incidenz	Gold $\mu = 2,16$ $\lambda = 65$ Rathenau	Silber $\mu = 1,79$ $\lambda = 65$ Rathenau	Kupfer $\mu = 2,61$ roth (C) Rubens	Platin $\mu = 2,03$ $\lambda = 65$ Rathenau	Nickel $\mu = 2,06$ $\lambda = 65$ Rathenau	Eisen $\mu = 1,78$ $\lambda = 65$ Rathenau	Cobalt $\mu = 4,19$ $\lambda = 63$ Drude
				n_0			
0°	0,27	0,22	0,45	2,01	1,98	3,01	2,99
10°	0,33	0,31	—	—	—	—	—
20°	0,27	0,40	0,48	—	—	—	—
30°	0,22	0,38	0,49	1,90	2,00	3,12	3,12
40°	0,23	0,41	0,50	1,95	2,02	2,98	3,12
50°	0,26	0,38	0,51	2,04	1,96	3,13	3,24
55°	—	—	—	2,02	2,01	3,00	3,35
60°	0,24	0,35	0,46	2,06	2,06	2,99	3,15
65°	—	—	—	1,97	2,02	2,98	3,18
70°	—	—	0,48	—	—	—	—
Mittel	0,26	0,35	0,48	1,99	2,01	3,03	3,16

Man sieht, dass für jedes Metall die Werthe von n_0 , aus den verschiedenen Incidenzen berechnet, befriedigend übereinstimmen, ausser bei Silber, wo n_0 aus $i = 0^\circ$ bedeutend kleiner erscheint als aus höheren Incidenzen berechnet. Jedenfalls lassen die Abweichungen keinerlei Gesetzmässigkeit erkennen.

§ 23. In Tab. 5 sind die beobachteten und berechneten Werthe von α zusammengestellt. Die als beobachtet bezeichneten Zahlen sind die Mittel aus den einzelnen in Tab. 3 eingetragenen, und die als berechnet bezeichneten sind die mit Hülfe der Gleichungen (B), (C), (D) und (E) berechneten Werthe von α , wenn als β die Mittel aus den brechenden Winkeln der Prismen eines jeden Metalls in Tab. 3, und als n_0 die Mittel in Tab. 4 und als g die von Hrn. Rathenau und von Hrn. Rubens gefundenen Werthe zur Berechnung verwendet sind. In die letzte horizontale Zeile unter jedem Metalle sind noch die nach der Gleichung (A), also nach dem Snellius'schen Gesetz berechneten Werthe von α eingetragen.

Dass die Theorie in der That die beobachteten Erscheinungen vollständig wiedergibt, lässt Tab. 5 zweifellos erkennen. Es stimmen die mittels der Gleichung (B) (g nach Rubens oder Drude) berechneten Werthe von α fast genau mit den beobachteten überein. Liegen die von Rathenau gefundenen Werthe von g der Rechnung zu Grunde,

so ist die Uebereinstimmung nicht so gut, doch sind die Abweichungen immer unter der Grenze der Beobachtungsfehler. Dagegen weichen mit wachsendem i die nach Snellius berechneten Werthe rasch von den beobachteten ab. Es sollte nach Snellius unter Anwendung rothen Lichtes totale Reflexion für Gold bei $15^\circ 5'$, für Silber bei $20^\circ 30'$ und für Kupfer bei $28^\circ 42'$ eintreten. Die Tabelle zeigt weiter, dass auch die Gleichungen (C), (D) und (E) bis $i = 70^\circ$ innerhalb der Beobachtungsfehler als gültig betrachtet werden können.

§ 24. Eine graphische Darstellung dieser Resultate wird wesentlich dadurch erleichtert, dass man die an sämtlichen Prismen von verschiedenen brechenden Winkeln beobachteten Werthe in der Weise umrechnet, dass sie sich sämtlich auf denselben Prismenwinkel beziehen; als solchen wählen wir $25''$, weil dieser Werth die Größenordnung der untersuchten Prismenwinkel charakterisirt.

Tab. 6 enthält die für den fictiven Prismenwinkel von $25''$ berechneten Werthe sowohl für die Metalle Eisen und Cobalt nach den Beobachtungen von du Bois und Rubens, als auch diejenigen für die fünf neu untersuchten Metalle. Die Berechnung nach (B) habe ich bis $i = 90^\circ$ fortgesetzt. In die zweiten Horizontalzeilen eines jeden Tabellenabschnittes sind die wahrscheinlichen Fehler eingetragen. Zur Ermittlung dieser Fehler habe ich den einfachen Satz von Cornu¹⁾ angewandt, um zu bestimmen, ob dem Gesetz der zufälligen Zahlen Genüge geleistet wurde. Es ergab sich, dass das doppelte Quadrat des mittleren Fehlers, dividirt durch das Quadrat des Mittels aller Abweichungen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in den meisten Fällen sehr wenig von der Zahl π abweicht.

Zur graphischen Darstellung der Resultate in Tab. 6 wurden als Abscissen Strecken aufgetragen, welche den Incidenzen $10^\circ, 20^\circ \dots$ entsprechen. (Taf. II Fig. 1 u. 1a.) Dann dienen die Ablenkungen α als Ordinaten. Zeichnet man nun hiernach die theoretischen Curven, und bezeichnet man die den Beobachtungen entsprechenden Punkte durch Ellipsen, deren längere Axen proportional den wahrscheinlichen

1) Cornu, Ann. de l'Observatoire de Paris 13. 1876.

		$\lambda = 64 \cdot 10^{-6}$ cm.	
	Incidenz	0°	10°
Gold $\beta = 25,7''$ $n_0 = 0,26$	α ber. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ beobachtet} \\ B \ g = 2,91 \text{ (Rubens)} \\ B \\ C \\ D \ g = 2,16 \text{ (Rathenau)} \\ E \\ A \text{ (Snellius)} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} - 18,9'' \\ - 19,1 \\ - 19,1 \\ - 19,1 \\ - 19,1 \\ - 19,1 \\ - 19,1 \end{array}$	$\begin{array}{l} - 17,2 \\ - 19,0 \\ - 19,0 \\ - 19,0 \\ - 19,0 \\ - 19,0 \\ - 20,7 \end{array}$
Silber $\beta = 18,1''$ $n_0 = 0,35$	α ber. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ beobachtet} \\ B \ g = 3,46 \text{ (Rubens)} \\ B \\ C \\ D \ g = 1,79 \text{ (Rathenau)} \\ E \\ A \text{ (Snellius)} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} - 14,1 \\ - 11,8 \\ - 11,8 \\ - 11,8 \\ - 11,8 \\ - 11,8 \\ - 11,8 \end{array}$	$\begin{array}{l} - 12,4 \\ - 11,7 \\ - 11,8 \\ - 11,7 \\ - 11,7 \\ - 11,7 \\ - 12,5 \end{array}$
Kupfer $\beta = 33,7''$ $n_0 = 0,48$	α ber. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ beobachtet} \\ B \\ C \\ D \ g = 2,61 \text{ (Rubens)} \\ E \\ A \text{ (Snellius)} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} - 18,5 \\ - 17,5 \\ - 17,5 \\ - 17,5 \\ - 17,5 \\ - 17,5 \end{array}$	$\begin{array}{l} - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array}$
Platin $\beta = 21,9''$ $n_0 = 1,99$	α ber. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ beobachtet} \\ B \ g = 4,17 \text{ (Drude)} \\ B \\ C \\ D \ g = 2,03 \text{ (Rathenau)} \\ E \\ A \text{ (Snellius)} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} + 22,1 \\ + 21,7 \\ + 21,7 \\ + 21,7 \\ + 21,7 \\ + 21,7 \\ + 21,7 \end{array}$	$\begin{array}{l} - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array}$
Nickel $\beta = 30,1''$ $n_0 = 2,01$	α ber. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ beobachtet} \\ B \ g = 3,79 \text{ (Rubens)} \\ B \\ C \\ D \ g = 2,06 \text{ (Rathenau)} \\ E \\ A \text{ (Snellius)} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} + 29,8 \\ + 30,4 \\ + 30,4 \\ + 30,4 \\ + 30,4 \\ + 30,4 \\ + 30,4 \end{array}$	$\begin{array}{l} - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{array}$

Tabelle 5.

20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°
— 18,4	— 19,4	— 18,2	— 15,6	—	— 14,3	—	—
— 18,7	— 18,2	— 17,2	— 15,2	—	— 13,0	—	—
— 18,8	— 18,4	— 17,6	— 16,2	—	— 13,6	—	—
— 18,8	— 18,4	— 17,5	— 16,0	—	— 13,4	—	—
— 18,8	— 18,4	— 17,5	— 16,0	—	— 13,5	—	—
— 18,6	— 18,0	— 17,0	— 15,8	—	— 12,4	—	—
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—	—
— 10,4	— 10,1	— 8,7	— 7,7	—	— 5,5	—	—
— 11,4	— 10,8	— 9,9	— 8,3	—	— 5,5	—	—
— 11,7	— 11,4	— 10,9	— 10,8	—	— 7,4	—	—
— 11,6	— 11,2	— 10,5	— 9,3	—	— 6,7	—	—
— 11,6	— 11,2	— 10,6	— 9,4	—	— 6,9	—	—
— 11,4	— 10,8	— 9,9	— 8,3	—	— 5,4	—	—
— 16,7	Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—
— 16,5	— 15,0	— 12,4	— 7,8	—	— 4,3	—	+ 10,7
— 16,6	— 15,4	— 13,2	— 9,5	—	— 3,1	—	+ 10,7
— 16,6	— 15,4	— 13,1	— 9,3	—	— 3,0	—	+ 10,9
— 16,6	— 15,4	— 13,1	— 9,4	—	— 3,2	—	+ 10,8
— 16,5	— 15,0	— 12,6	— 8,5	—	— 1,3	—	+ 13,6
— 21,6	Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—
—	+ 25,9	+ 33,4	+ 46,5	+ 54,0	+ 66,6	+ 75,5	—
—	+ 28,1	+ 34,4	+ 44,9	+ 52,8	+ 65,8	+ 79,1	—
—	+ 27,2	+ 32,5	+ 40,2	+ 48,4	+ 60,4	+ 71,7	—
—	+ 27,2	+ 32,5	+ 42,4	+ 48,9	+ 60,9	+ 73,0	—
—	+ 27,2	+ 32,5	+ 42,4	+ 48,9	+ 60,9	+ 72,5	—
—	+ 28,3	+ 34,9	+ 45,8	+ 54,0	+ 67,4	+ 81,1	—
—	+ 26,8	+ 31,9	+ 40,6	+ 47,2	+ 56,5	+ 69,8	—
—	+ 39,3	+ 48,3	+ 60,4	+ 73,6	+ 91,3	+ 110,6	—
—	+ 39,3	+ 48,1	+ 62,5	+ 73,5	+ 88,4	+ 109,9	—
—	+ 39,3	+ 48,0	+ 62,1	+ 72,5	+ 86,3	+ 106,2	—
—	+ 39,3	+ 48,0	+ 62,2	+ 72,8	+ 87,1	+ 107,3	—
—	+ 39,3	+ 48,0	+ 62,2	+ 72,8	+ 87,1	+ 106,7	—
—	+ 39,8	+ 48,9	+ 64,1	+ 75,4	+ 91,0	+ 113,1	—
—	+ 37,6	+ 44,8	+ 56,9	+ 66,3	+ 79,2	+ 97,7	—

		$\lambda = 64.10^{-6}$ cm.			
	Incidenz	0°	10°	20°	
Gold $\beta = 25''$ $n_0 = 0,26$ $g = 2,16$ (Rathenau)	α beobachtet	- 18,3''	- 16,7	- 17,8	
	Wahrscheinliche Fehler	$\pm 1,2''$	1,1	1,9	
	α berechnet	$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	- 18,5	- 18,4	- 18,2
			- 18,5	- 18,4	- 18,2
			- 18,5	- 18,4	- 18,2
			- 18,5	- 18,4	- 18,1
			- 18,5	- 20,1	Tot. Reflex.
	Silber $\beta = 25''$ $n_0 = 0,35$ $g = 1,79$ (Rathenau)	α beobachtet	- 19,5	- 17,2	- 14,3
Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,5$	1,3	1,5	
α berechnet		$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	- 16,2	- 16,2	- 16,1
			- 16,2	- 16,1	- 15,9
			- 16,2	- 16,1	- 15,9
			- 16,2	- 16,1	- 15,7
			- 16,2	- 17,3	- 23,0
Kupfer $\beta = 25''$ $n_0 = 0,48$ $g = 2,61$ (Rubens)		α beobachtet	- 13,7	—	- 12,2
	Wahrscheinliche Fehler	$\pm 1,1$	—	1,5	
	α berechnet	$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	- 13,0	—	- 12,3
			- 13,0	—	- 12,3
			- 13,0	—	- 12,3
			- 13,0	—	- 12,3
			- 13,0	—	- 16,0
	Platin $\beta = 25''$ $n_0 = 1,99$ $g = 2,03$ (Rathenau)	α beobachtet	+ 25,2	—	—
Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,1$	—	—	
α berechnet		$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	+ 24,8	—	—
			+ 24,8	—	—
			+ 24,8	—	—
			+ 24,8	—	—
			+ 24,8	—	—
Nickel $\beta = 25''$ $n_0 = 2,01$ $g = 2,06$ (Rathenau)		α beobachtet	+ 24,7	—	—
	Wahrscheinliche Fehler	$\pm 1,2$	—	—	
	α berechnet	$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	+ 25,2	—	—
			+ 25,2	—	—
			+ 25,2	—	—
			+ 25,2	—	—
			+ 25,2	—	—
	Eisen $\beta = 25''$ $n_0 = 3,02$ $g = 1,78$ (Rathenau)	α beobachtet	+ 50,2	—	—
α berechnet		$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	+ 50,7	—	—
			+ 50,7	—	—
			+ 50,7	—	—
			+ 50,7	—	—
			+ 50,7	—	—
Cobalt $\beta = 25''$ $n_0 = 3,16$ $g = 4,19$ (Drude)		α beobachtet	+ 49,9	—	—
		α berechnet	$\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right.$	+ 54,0	—
			+ 54,0	—	—
			+ 54,0	—	—
			+ 54,0	—	—
			+ 54,0	—	—

Tabelle 6.

30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	80°	90°
- 18,8	- 17,6	- 15,2	—	- 13,9	—	—	—	—
1,2	1,6	1,4	—	0,8	—	—	—	—
- 17,8	- 17,2	- 18,8	—	- 13,2	—	- 7,9	+ 7,5	+ 1546,0
- 17,8	- 17,1	- 15,6	—	- 12,9	—	- 7,4	+ 8,8	∞
- 17,8	- 17,1	- 15,6	—	- 13,0	—	- 7,8	+ 8,6	∞
- 17,6	- 16,5	- 14,9	—	- 12,0	—	- 6,0	+ 12,4	∞
—	—	—	—	—	—	—	—	—
- 13,9	- 11,6	- 10,5	—	- 7,6	—	—	—	—
1,9	1,2	1,2	—	1,5	—	—	—	—
- 15,6	- 14,7	- 13,0	—	- 9,3	—	- 3,0	+ 17,8	+ 1867,0
- 15,4	- 14,4	- 12,5	—	- 8,8	—	- 2,4	+ 18,1	∞
- 15,4	- 14,5	- 12,7	—	- 9,1	—	- 2,8	+ 18,1	∞
- 15,1	- 13,6	- 11,5	—	- 7,6	—	+ 0,6	+ 24,4	∞
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—	—	—
- 11,1	- 9,2	- 5,8	—	- 3,2	—	+ 7,9	—	—
1,2	1,2	1,2	—	1,2	—	2,7	—	—
- 11,4	- 9,9	- 7,3	—	- 2,5	—	+ 7,5	+ 38,3	+ 2118,0
- 11,4	- 9,8	- 7,1	—	- 2,2	—	+ 7,9	+ 39,4	∞
- 11,4	- 9,8	- 7,2	—	- 2,4	—	+ 7,7	+ 38,9	∞
- 11,1	- 9,3	- 6,3	—	- 1,0	—	+ 10,1	+ 44,1	∞
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 29,6	+ 38,1	+ 53,1	+ 61,8	+ 76,1	+ 88,6	—	—	—
2,3	2,4	1,6	1,6	1,5	4,2	—	—	—
+ 31,2	+ 37,4	+ 48,2	+ 56,0	+ 69,5	+ 82,3	+ 107,4	+ 237,0	+ 4227,0
+ 31,2	+ 37,4	+ 48,4	+ 56,5	+ 70,0	+ 83,9	+ 109,7	+ 244,8	∞
+ 31,2	+ 37,4	+ 48,4	+ 56,5	+ 70,0	+ 83,9	+ 109,7	+ 244,3	∞
+ 32,4	+ 39,9	+ 52,4	+ 61,7	+ 77,0	+ 92,7	+ 120,4	+ 261,5	∞
+ 30,6	+ 36,5	+ 46,4	+ 54,0	+ 64,6	+ 79,8	+ 103,1	+ 223,0	+ 4187,0
+ 32,6	+ 40,2	+ 50,1	+ 61,1	+ 75,8	+ 91,8	—	—	—
1,2	1,5	1,9	2,2	2,6	3,6	—	—	—
+ 32,6	+ 39,8	+ 51,5	+ 60,1	+ 71,4	+ 87,6	+ 112,6	+ 246,7	+ 4474,0
+ 32,6	+ 39,8	+ 51,6	+ 60,4	+ 72,2	+ 88,7	+ 114,6	+ 251,8	∞
+ 32,6	+ 39,8	+ 51,6	+ 60,4	+ 72,2	+ 88,7	+ 114,6	+ 248,4	∞
+ 33,0	+ 40,6	+ 53,2	+ 62,6	+ 75,5	+ 93,9	+ 121,9	+ 264,4	∞
+ 31,2	+ 37,2	+ 47,2	+ 55,0	+ 65,7	+ 81,1	+ 104,7	+ 227,0	+ 4220,0
+ 64,9	+ 71,3	+ 95,8	+ 104,4	+ 122,3	+ 149,7	—	—	—
+ 62,1	+ 72,7	+ 90,6	+ 103,4	+ 121,3	+ 146,3	+ 184,6	+ 391,0	+ 5526,0
+ 62,1	+ 72,7	+ 90,8	+ 103,7	+ 121,9	+ 147,3	+ 186,2	+ 394,9	∞
+ 62,1	+ 72,7	+ 90,8	+ 103,7	+ 121,9	+ 147,3	+ 186,2	+ 394,0	∞
+ 62,5	+ 73,9	+ 92,8	+ 107,0	+ 126,5	+ 154,2	+ 196,5	+ 411,0	∞
+ 61,2	+ 71,6	+ 88,9	+ 101,7	+ 119,5	+ 145,0	+ 184,0	+ 385,0	+ 5406,0
+ 64,8	+ 76,5	+ 100,1	+ 119,7	+ 131,3	+ 161,4	—	—	—
+ 65,9	+ 77,6	+ 97,0	+ 111,6	+ 131,3	+ 159,3	+ 202,1	+ 422,0	+ 5655,0
+ 65,9	+ 77,6	+ 97,1	+ 111,7	+ 131,7	+ 160,2	+ 203,7	+ 425,7	∞
+ 65,9	+ 77,6	+ 97,1	+ 111,7	+ 131,7	+ 160,2	+ 203,7	+ 425,1	∞
+ 66,2	+ 78,1	+ 97,9	+ 112,7	+ 133,0	+ 161,9	+ 205,9	+ 429,9	∞
+ 65,1	+ 75,9	+ 94,8	+ 108,0	+ 126,5	+ 152,7	+ 193,5	+ 404,0	+ 5533,0

Fehlern sind, so ergibt sich, dass die nach Gleichung (B) gezeichneten theoretischen Curven fast immer die Ellipsen schneiden, d. h. die beobachteten Werthe weichen von den mittels jener Gleichung berechneten nur innerhalb der Fehlergrenze ab.

§ 25. Der Gang der Function n' kann nun aus der Gleichung (3) oder (8) bestimmt werden. In Tab. 7 sind die Werthe von n' nach (3) eingetragen. Die nach (8), der Beer'schen vereinfachten Gleichung, berechneten unterscheiden sich von denen nach (3) in der zweiten Decimalstelle.

Aus Tab. 7 geht auch der Verlauf des Brechungsverhältnisses bei Gold, Silber und Kupfer hervor. Diese Grösse erreicht für Kupfer schon bei etwa 63° den Werth Eins und wächst bei höheren Incidenzen langsamer und langsamer, sodass die Ablenkung in der Nähe von $i = 63^\circ$ einen Wechsel des Vorzeichens erfahren muss, was, wie man aus Tab. 5 erkennt, der Wirklichkeit entspricht. Der Uebergang von Minus zu Plus bei Gold und Silber findet erst bei Incidenzen statt, welche grösser als 70° sind, bei denen Beobachtungen aus praktischen Gründen nicht mehr angestellt werden konnten.¹⁾

§ 26. Die zum Vergleiche der Beobachtungen mit der Theorie nöthigen Ausdrücke habe ich im Obigen zunächst aus der v. Helmholtz'schen Gleichung (3) abgeleitet. Dass die Ergebnisse der Lorentz'schen, Voigt'schen, Cauchy'schen Analyse sich nur insofern von jenen unterscheiden, als irgend welche unbedeutende Vernachlässigungen eingeführt sind, erkennt man aus Tab. 5; folgt doch von den Gleichungen (C—E) direct (C) aus den Lorentz'schen, (D) aus den Voigt'schen, (E) aus den Cauchy-Beer'schen Rechnungen.

Nach alledem erscheint es statthaft: Erstens auf diesem Gebiete von der Theorie zu reden, da alle Sondertheorien schliesslich dieselben Resultate ergeben müssen und thatsächlich ergeben; zweitens zu behaupten, dass die Theorie, durch die völlig befriedigende Uebereinstimmung der von mir beobachteten mit den berechneten Werthen, sich als der Wirklichkeit entsprechend herausstellt.

Noch ist zu bemerken, dass auch die speciellen Theorien

1) Vgl. die folgende Abhandlung von du Bois und Rubens p. 206.

von Lommel¹⁾, Ketteler²⁾ u. a. die als Erweiterungen der v. Helmholtz'schen zu betrachten sind, zweifellos zu denselben Resultaten führen würden.

Tabelle 7.

Incidenz	0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	80°	90°
	n_0				n' (bei $\lambda = 64 \cdot 10^{-6}$ cm)							
Gold $n = 2.16$ (Rathenau)	0,26	0,34	0,43	0,56	0,69	0,80	—	0,90	—	0,97	1,01	1,03
Silber $n = 1,79$ (Rathenau)	0,35	0,39	0,48	0,60	0,72	0,83	—	0,92	—	0,99	1,03	1,05
Kupfer $n = 2,61$ (Rubens)	0,48	—	0,59	0,69	0,80	0,90	—	0,98	—	1,05	1,09	1,10
Platin $n = 2,03$ (Rathenau)	1,99	—	—	2,05	2,08	2,11	2,13	2,14	2,15	2,16	2,18	2,19
Nickel $n = 2,06$ (Rathenau)	2,01	—	—	2,06	2,09	2,12	2,14	2,15	2,16	2,18	2,19	2,20
Eisen $n = 1,78$ (Rathenau)	3,03	—	—	3,07	3,09	3,10	3,11	3,12	3,13	3,14	3,15	3,15
Cobalt $n = 4,19$ (Drude)	3,16	—	—	3,19	3,21	3,22	3,23	3,25	3,26	3,27	3,28	3,28

II. Die Dispersion.

§ 27. Hr. Kundt hat bereits die Dispersion bezüglich weissen, rothen und blauen Lichtes für die oben untersuchten Metalle angegeben; um aber die Dispersion in Bezug auf bestimmte Wellenlängen zu ermitteln, habe ich mich eines Verfahrens bedient, ähnlich demjenigen, welches die Hrn. du Bois und Rubens für Eisen, Nickel und Cobalt schon angewandt haben. Eine nähere Beschreibung kann ich daher unterlassen. Die Ergebnisse der Messungen bei normaler Incidenz für die Linien Li_a , D , F und G sind in Tab. 8 zusammengestellt.

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 339. 1878.

2) Ketteler, Wied. Ann. 7. p. 658. 1879.

Die Zahlen sind die Mittel aus den mit sämmtlichen Prismen eines jeden Metalls erhaltenen Werthen, welche mittels der Gleichung

$$n_0 = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$$

berechnet wurden.

Tabelle 8.

	Li _a	D	F	G
		n ₀		
Gold	0,29	0,66	0,82	0,98
Silber	0,25	0,27	0,20	0,27
Kupfer	0,35	0,60	1,12	1,13
Platin	2,02	1,76	1,63	1,41

Ein Vergleich dieser Resultate mit den von Hrn. Kundt gefundenen zeigt, soweit die unbestimmten Wellenlängen des von ihm benutzten Lichtes es erlauben, eine sehr gute Uebereinstimmung. Bei Silber treten sehr kleine Schwankungen im Werthe von n_0 auf, welche an die von Jamin¹⁾ erhaltenen erinnern. Es wäre sehr wünschenswerth, diese Zahlen zur weiteren Prüfung der v. Helmholtz'schen Dispersionstheorie zu benutzen. Der erheblichen Absorption wegen sind sie aber vermuthlich so fehlerhaft, dass ihre Anwendung nicht zulässig wäre. Eine solche Prüfung könnten wir mit Erfolg erst vornehmen, wenn uns die Resultate genauerer Messungen zur Verfügung ständen.

Zum Schlusse möchte ich nicht unterlassen, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Kundt, für die mir freundlichst gewährte Belehrung und Unterstützung, sowie den Hrn. Privatdocenten Dr. Rubens und Dr. du Bois für die speciell bei dieser Arbeit geleistete Hülfe und Anregung meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen.

Berlin, Physik. Institut der Univ., 25. Juli 1892.

1) Beer, Pogg. Ann. **92**. p. 417. 1854.

Shea Fig. 1-1a. H.E.J. G. du Bois u. Rubens Fig. 2. Ebert Fig. 3.