Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.

VON FELIX KLEIN in GÖTTINGEN.

In der vorstehenden Abhandlung hat Herr Lie unter Anderem eine fundamentale Analogie entwickelt, welche zwischen der Geometrie des linearen Complexes und der gewöhnlichen metrischen Geometrie besteht. Diese Analogie kommt darauf zurück, dass man den linearen Complex eindeutig auf den Punktraum abbilden kann*), wobei im linearen Complex eine einzelne Linie, im Punktraume ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde auftritt. Denn die metrische Geometrie ist ja nichts anderes, als die Untersuchung der projectivischen Eigenschaften der räumlichen Gebilde unter Zugrundelegung eines ein für allemal gegebenen Kegelschnittes, des unendlich fernen imaginären Kreises. Die Geometrie des linearen Complexes ist durch die fragliche Abbildung also mit der metrischen Geometrie in Verbindung gesetzt, jedoch so, dass im linearen Complex noch eine Linie willkürlich ausgezeichnet ist. — Der hierdurch aufgedeckte Zusammenhang zwischen zwei auf den ersten Blick sehr heterogenen Gebieten der Geometrie muss nach beiden Seiten hin von grosser Fruchtbarkeit sein. Es mag hier genügen, in diesem Betracht auf den reichen Inhalt der vorstehenden Abhandlung zu verweisen, insbesondere auf die dort gegebene Beziehung zwischen dem Probleme der Haupttangenten-Curven und der Krümmungs-Curven.

Anknüpfend an diese Untersuchungen von Herrn Lie, über die ich durch wiederholte ausführliche Mittheilungen desselben unterrichtet war, fand ich, dass in ganz gleicher Weise, wie die Geometrie des linearen Complexes mit der metrischen Geometrie des gewöhnlichen Raumes zusammenhängt, *ein Zusammenhang besteht zwischen dem Gesamtinhalte der Linien-Geometrie und der metrischen Geometrie des Raumes von vier Dimensionen.***) In diesem Betracht stellte ich ins-

*) Auf diese Abbildung ist zuerst durch Herrn Nöther aufmerksam gemacht worden: Zur Theorie algebraischer Functionen, Gött. Nachrichten. 1869.

**) Unter der metrischen Geometrie eines solchen Raumes ist wiederum die Untersuchung der projectivischen Eigenschaften seiner Gebilde unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Gebildes zu verstehen, welches dem Kegelschnitte der gewöhnlichen Geometrie entspricht. Bestimmt man, wie gewöhnlich bei metrischen Untersuchungen, das Raumelement (den Punkt) durch rechtwinklige Coordinaten, hier also durch vier Coordinaten x, y, z, t , so besteht das fragliche Gebilde aus denjenigen unendlich fernen Elementen, für die $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$.

besondere ein liniengeometrisches Theorem auf*), welches dem Dupin'schen Theorem der gewöhnlichen metrischen Geometrie nachgebildet war. Hieran habe ich weitere Ueberlegungen geknüpft, die darauf abzielen: einmal den gesammten Inhalt der metrischen Geometrie auf Liniengeometrie zu übertragen; andererseits die algebraischen Methoden, deren man sich in der Liniengeometrie mit Erfolg bedient, zur Behandlung metrischer Probleme zu verwerthen. Diese Betrachtungen — die übrigens mit den von Herrn Lie vorgetragenen in engster Beziehung stehen und aus ihnen erwachsen sind — sollen im Folgenden, wenn auch nur in allgemeinen Zügen, dargelegt werden. Hoffentlich genügt die hier gegebene Auseinandersetzung, um deutlich zu zeigen: dass auf dem hier eingeschlagenen Wege eine Weiterentwicklung der beiden in Betracht kommenden Disciplinen: der *Liniengeometrie* und der *metrischen Geometrie* gegeben ist.

In der Liniengeometrie pflegt man, wie bekannt, die Gerade durch 6 homogene Coordinaten p_{ik} zu definiren, welche an eine Bedingungs- gleichung zweiten Grades:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

geknüpft sind. Betrachtet man einen Augenblick die p_{ik} als unabhängige Veränderliche, so constituiren sie eine Mannigfaltigkeit, oder, wie man häufig sagt, einen Raum von 5 Dimensionen. Derselbe soll mit R_5 bezeichnet werden (überhaupt ein Raum von n Dimensionen mit R_n). Aus diesem Raume wird die von den Geraden gebildete Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch die vorstehende quadratische Gleichung ausgeschieden, in ähnlicher Weise, wie aus der Gesamtheit der Punkte des gewöhnlichen Raumes (R_3) durch eine quadratische Gleichung eine Fläche zweiten Grades ausgeschieden wird. Man wird so dazu geführt, die *Liniengeometrie in ähnlicher Weise analytisch zu behandeln, wie die Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades*. Die hiermit angedeutete Auffassung soll in § 1. noch näher erörtert und begründet werden; sie liegt übrigens meinen sämtlichen bisherigen Arbeiten über Liniengeometrie zu Grunde.

Es mag hier gleich eine Bezeichnung eingeführt werden, die im Folgenden nöthig wird. Den Raum von n Dimensionen bezeichnen wir bereits als R_n . Ein Gebilde nun, welches aus ihm durch μ Gleichungen ausgeschieden wird, welches also noch immer eine Mannigfaltigkeit von $n - \mu$ Dimensionen vorstellt, soll als $M_{n-\mu}$ bezeichnet sein. Dabei mögen rechts oben zugesetzte Indices den Grad der μ Gleichungen angeben, durch welche die $M_{n-\mu}$ bestimmt wird. — Die Gesamtheit der geraden Linien bildet bei dieser Bezeichnung eine $M_4^{(2)}$, die im Raume R_5 gelegen ist. In ähnlicher Weise bilden die

*) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 3.

Linien eines linearen Complexes eine $M_3^{(2)}$ des R_4 , die Linien einer linearen Congruenz eine $M_2^{(2)}$ des R_3 , endlich die Linien einer Regelschaar eine $M_1^{(2)}$ des R_2 . Diese Bezeichnungsweise ist etwas abstract; sie ist aber im Folgenden nicht gut zu umgehen.

Der Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und metrischer Geometrie bei 4 Variabeln kommt nun auf eine eindeutige Abbildung der in R_5 gelegenen $M_4^{(2)}$ auf den R_4 hinaus. — Es ist bekannt, wie man eine im R_3 gelegene $M_2^{(2)}$, also etwa eine im gewöhnlichen Raume gelegene Fläche zweiten Grades, eindeutig auf den R_2 , etwa die Ebene, abbilden kann. Dies geschieht, geometrisch ausgedrückt, durch das Verfahren der stereographischen Projection. Dabei treten in der Ebene zwei Fundamentalpunkte auf, die Bilder der durch den Projectionspunkt gehenden beiden Erzeugenden. Auf der Fläche zweiten Grades findet sich ein Fundamentalpunkt, der Projectionspunkt. Nun benutzt aber die metrische Geometrie in der Ebene als Fundamentalgebilde ein Punktpaar, die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Man wird desshalb sagen können: die Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades und die metrische Geometrie in der Ebene entsprechen einander; sowie man auf der Fläche einen (willkürlichen) Punkt auszeichnet. — Bei der in Rede stehenden Abbildung einer $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n auf den R_{n-1} findet nun etwas ganz Aehnliches statt. Ein Element der $M_{n-1}^{(2)}$ (welches dem Projectionspunkte entspricht) wird ausgezeichnet. Dafür tritt im R_{n-1} ein Fundamentalgebilde auf, wie es auch die metrische Geometrie des R_{n-1} benutzt, nämlich eine $M_{n-3}^{(1,2)}$. Allgemein kann man also sagen:

Die metrische Geometrie des R_{n-1} kann als stereographische Projection der Geometrie auf einer im R_n gelegenen $M_{n-1}^{(2)}$ aufgefasst werden.)*

Mit diesem Satze, der in § 2. vollständig begründet werden soll, ist der Zusammenhang der Liniengeometrie mit der metrischen Geometrie des R_4 vollständig gegeben. Ebenso natürlich der Zusammenhang zwischen der Geometrie des linearen Complexes und der metrischen Geometrie des R_3 . Man könnte endlich in dem nämlichen Sinne die

*) Die metrische Geometrie der Ebene als stereographische Projection der Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades (insbesondere einer Kugel) anzusehen, ist ein Mittel, welches namentlich von Chasles gebraucht worden ist. Die im Texte angedeutete allgemeine Auffassung wird gelegentlich von Herrn Darboux in der Theorie der Orthogonalflächensysteme benutzt (Comptes Rendus t. LXIX. 1869, 2. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques). Wie mir Herr Darboux auf eine Anfrage meinerseits mittheilte, ist sie ein allgemeines Princip gewesen, welches ihn bei der Aufstellung seiner Theoreme über metrische Geometrie geleitet hat.

Geometrie der linearen Congruenz mit der metrischen Geometrie des R_2 , die Geometrie der Regelschaar mit der metrischen Geometrie des R_1 in Verbindung setzen. Andererseits begründet der Satz diejenige Behandlung der metrischen Geometrie des R_{n-1} , welche vorher bereits angedeutet wurde. Dieselbe soll ebenfalls in § 2. etwas weiter ausgeführt werden. Man wird bei ihr in erster Linie dazu geführt, zwischen solchen metrischen Eigenschaften des R_{n-1} zu unterscheiden, welche, auf die $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n übertragen, eine besondere Beziehung zu dem bei der Abbildung benutzten Projectionspunkte impliciren, welche nicht. Letztere ergeben, wenn $n = 5$, allgemeine liniengeometrische Sätze; erstere solche, bei denen eine willkürliche Gerade fundamental auftritt.

Um wenigstens an einem Beispiele die Fruchtbarkeit dieser Uebertragungen zu zeigen, suche ich in § 3. das liniengeometrische Analogon der *Orthogonalsysteme* der metrischen Geometrie. Es sind dies Systeme von Linien-Complexen, welche ich als *Involutionssysteme* bezeichne. Ein Involutionssystem ist ein einfach unendliches System von Complexen, welche von einem Parameter im vierten Grade abhängen, so dass durch jede Gerade des Raumes vier Complexe des Systems hindurchgehen. Diese vier Complexe — und das constituirt eben den Charakter der in Rede stehenden Systeme — liegen paarweise mit Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution.*) Die involutorische Lage zweier Complexe entspricht dabei auf Seiten der Liniengeometrie der Orthogonalität zweier Flächen in der metrischen Geometrie. — Für Involutionssysteme von Complexen gilt dann ein Theorem, welches dem Dupin'schen Theoreme der gewöhnlichen metrischen Geometrie analog ist. Dasselbe ist, wie ich in § 4. des Weiteren auseinandersetze, insofern höchst fruchtbar, als es, sowie ein Involutionssystem gegeben ist, auf einer grossen Zahl von Flächen die Haupttangenten-Curven kennen lehrt. Insbesondere ist hier eingeschlossen die Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpunkten, wie sie sich aus den Untersuchungen von Herrn Lie und mir ergeben hat.**)

*) Als *involutorische Lage* zweier Complexe mit Bezug auf eine gemeinsame Gerade bezeichne ich die folgende Beziehung. In jeder durch die Gerade hindurchgelegten Ebene befindet sich, jedem Complexe entsprechend, eine Complex-Curve, welche die gegebene Gerade berührt. Die beiden Berührungspunkte mögen als einander zugeordnet angesehen werden. Dreht sich nun die Ebene, so beschreiben die beiden Punkte collineare Punktreihen. Die Complexe heissen nun involutorisch gelegen, wenn die Beziehung der beiden Punktreihen die involutorische ist.

**) Vergl. eine gemeinsame Mittheilung in den Monatsberichten der Berliner Akademie. December 1870, sowie die in der vorstehenden Abhandlung enthaltenen bez. Auseinandersetzungen.

Ich will noch ausdrücklich auf einen Unterschied aufmerksam machen, der zwischen den hier vorgetragenen Dingen und einigen Capiteln der vorausgehenden Lie'schen Arbeit besteht und dabei zugleich auseinandersetzen, wie, anknüpfend an diesen Unterschied, Herr Lie eine neue in der metrischen Geometrie anzuwendende Transformation entwickelt hat. *) Vermöge der erwähnten Abbildung des linearen Complexes in den gewöhnlichen Punktraum setzt Herr Lie die Liniengeometrie in Verbindung mit der Geometrie, deren Element die Kugel des gewöhnlichen Raumes ist. Hier dagegen wird die Liniengeometrie auf die Punktgeometrie des Raumes von vier Dimensionen bezogen. Während die letztere Beziehung eindeutig ist, ist es die erstere nicht, jeder Linie entspricht allerdings nur eine Kugel, dagegen jeder Kugel ein Linienpaar. Da beide Abbildungen der Liniengeometrie metrisch interessante Dinge ergeben, so wird man, zur Behandlung metrischer Probleme, indem man die Betrachtung der Liniengeometrie als unwesentlich bei Seite lässt, die folgende Methode aufstellen können: Man beziehe den Punkt des Raumes von n Dimensionen auf die Kugel des Raumes von $n - 1$ Dimensionen, in der Art, dass jedem Punkte eine Kugel, jeder Kugel dagegen ein Punktepaar entspricht. Dies geschieht einfach, indem man die n Coordinaten des Punktes im R_n bez. die $n - 1$ Mittelpunktscoordinaten und den Radius einer Kugel im R_{n-1} bedeuten lässt. Dies ist die von Lie aufgestellte Methode, welche die metrische Geometrie des R_n und des R_{n-1} in Verbindung setzt. Nicht zu verwechseln mit ihr ist ein von Herrn Darboux aufgestellter Process**), der ebenfalls die metrische Geometrie des R_n mit der des R_{n-1} verknüpft. Derselbe kommt im Wesentlichen darauf zurück: die metrische Geometrie des R_n durch sphärische Abbildung auf eine Kugel des R_n und dann von dieser durch stereographische Projection auf den R_{n-1} zu übertragen.

§ 1.

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5 .

Diese Aussage findet in dem folgenden Verhalten der Linien-Coordinaten p_{ik} ihre eigentliche Begründung. Für die Coordinaten p_{ik} hat man:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Damit sich nun zwei Gerade, p und p' , schneiden, muss sein:

*) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 7.

**) Vergl. die bereits citirte Note: Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques, Comptes Rendus. LXIX. 1869.

$$\Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \cdot p'_{ik} = 0.$$

In Folge dessen kann man den folgenden Satz aufstellen, den ich bereits gelegentlich mittheilte*):

Setzt man statt der Linien-Coordinationen p_{ik} beliebige lineare Functionen derselben, die nur der einen Bedingung genügen sollen, die Mannigfaltigkeit $M_4^{(2)}$:

$$P = 0$$

in sich überzuführen, so hat man eine collineare oder eine dualistische (reciproke) Umformung des Linienraumes. Andererseits erhält man auf diesem Wege alle solchen collinearen und reciproken Umformungen.

Was den ersten Theil dieses Satzes betrifft, so werden offenbar durch die in Rede stehenden Transformationen alle Geraden wieder in Gerade, sich schneidende Gerade in sich schneidende Geraden übergeführt. Der Gesamtheit der zweifach unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt gehen (sich also schneiden), entsprechen wiederum zweifach unendlich viele Gerade, die sich schneiden. Dabei bleibt die doppelte Möglichkeit: dass dieselben entweder wieder durch einen Punkt gehen oder dass sie die Gesamtheit der in einer Ebene verlaufenden Geraden vorstellen.***) Im ersten Falle hat man eine räumliche Transformation vor sich, welche jede Gerade in eine Gerade, jeden Punkt in einen Punkt überführt, und das ist ersichtlich eine collineare Umformung. Im zweiten Falle dagegen hat man eine räumliche Transformation, welche jede Gerade in eine Gerade, jeden Punkt in eine Ebene überführt. Es ist also eine dualistische Umformung.

Aber auch umgekehrt wird jede collineare und jede dualistische Umformung sich in Linien-Coordinationen in der vorgenannten Weise darstellen. Denn bei einer solchen Umformung werden die Punkt-Coordinationen durch lineare Functionen der neuen Punkt- oder Ebenen-Coordinationen ersetzt. In Folge dessen treten an Stelle der früheren Linien-Coordinationen p_{ik} , die gleichmässig als zweigliedrige Determinanten aus Punkt-Coordinationen oder aus Ebenen-Coordinationen dargestellt werden können, lineare Functionen derselben. Diese linearen Functionen haben auch die Eigenschaft, die $M_4^{(2)}$

$$P = 0$$

in sich selbst überzuführen, da ja bei ihnen gerade Linien gerade

*) Diese Annalen t. IV, 2. (Geometrisches über Resolventen.)

**) In ähnlicher Weise spalten sich überhaupt die linearen Transformationen, welche eine $M_{n-1}^{(2)}$ im R_n in sich überführen, falls n eine ungerade Zahl ist, in zwei Gruppen. Vergl. die Arbeit: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“, § 16. (Diese Annalen t. IV, 4.)

Linien bleiben und sich also der durch die vorstehende Gleichung dargestellte Linienraum nicht ändert.

Hiermit ist der vorstehende Satz vollständig bewiesen. Dieser Satz giebt nun zu der folgenden Behandlung liniengeometrischer Probleme Veranlassung. Die neuere Geometrie untersucht alle räumlichen Gebilde, insonderheit also die Liniengebilde, nur insofern sie durch collineare oder dualistische Transformationen ungeändert bleiben, oder, wenn man will, sie führt alle anderen Eigenschaften auf Eigenschaften dieser Art zurück. Ganz denselben Umfang von Transformationen ziehen wir aber in Betracht, wenn wir den Linienraum als eine $M_4^{(2)}$ im R_5 betrachten und die projectivischen Eigenschaften des R_5 untersuchen, welche sich auf die $M_4^{(2)}$ beziehen. Die gesammte Liniengeometrie wird dadurch auf folgendes Problem zurückgeführt:

Man untersuche im projectivischen Sinne die im R_5 gelegene $M_4^{(2)}$. Sodann übertrage man die Resultate in die Sprache der Liniengeometrie.

Wie sich dies bei näherer Ausführung stellt, habe ich in aller Kürze in dem Aufsatz: „Die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinationen“ (diese Annalen t. II. 2.) auseinandergesetzt. Eine lineare Gleichung (oder sagen wir: die Ebene des R_5) stellt einen linearen Complex dar, der ein specieller wird, wenn die Ebene die $M_4^{(2)}$ berührt. Sind zwei Ebenen in Bezug auf die $M_4^{(2)}$ conjugirt, so heissen die Complexe in Involution. Berührt der Durchschnitt der beiden Ebenen die $M_4^{(2)}$, so berühren sich die beiden Complexe (die ihnen gemeinsame Congruenz hat dann zwei zusammenfallende Directricen).

Es soll hier nicht weiter in diese Dinge eingegangen werden; doch mag noch folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden. Liniengeometrie ist schliesslich nichts, als überhaupt projectivische Raumgeometrie. Der vorstehende Satz begründet also eine eigenthümliche Behandlung der Geometrie des R_3 , bei der die linearen und dualistischen Transformationen des R_3 durch die linearen Transformationen eines höheren Raumes ersetzt werden, welche ein in diesem Raume gelegenes Gebilde ungeändert lassen. Man kann die Frage aufstellen, ob eine analoge Behandlung bei anderen Räumen, als dem R_3 , möglich ist. Dies ist allerdings, aber nur bei besonderen Räumen, der Fall. So kann man den R_1 behandeln als Kegelschnitt im R_2 oder als Raumcurve dritter Ordnung im R_3 etc. Denn die gerade Linie R_1 lässt sich derart auf einen Kegelschnitt, bez. eine Raumcurve dritter Ordnung beziehen, dass ihren dreifach unendlich vielen linearen Transformationen die gleich zahlreichen linearen Transformationen entsprechen, welche einen Kegelschnitt in der Ebene, eine Raumcurve

der dritten Ordnung im Raume in sich überführen. Hierauf beruht das von Hesse vorgeschlagene Uebertragungsprincip (Borchardt's Journal t. 66, 1866). Hesse bespricht insbesondere die Beziehung zwischen der geraden Linie und dem Kegelschnitte der Ebene und zeigt, wie bei der Uebertragung die projectivische Geometrie der Ebene eine Geometrie der Punktpaare auf der Geraden ergibt. *)

§ 2.

Zusammenhang der metrischen Geometrie bei $(n - 1)$ Variablen und der Geometrie auf einer $M_{n-1}^{(2)}$ eines R_n .

Sei eine $M_{n-1}^{(2)}$ eines R_n gegeben. Durch passende Wahl der homogenen Veränderlichen $x_1 \dots x_{n+1}$ wird man deren Gleichung im Allgemeinen auf die Form bringen können:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1}^2.$$

Setzen wir jetzt:

$$p = x_n + i x_{n+1}$$

$$q = x_n - i x_{n+1},$$

so kommt:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + pq.$$

Von dieser Gleichungsform ausgehend, kann man die $M_{n-1}^{(2)}$ ohne Weiteres auf den R_{n-1} abbilden. Zu diesem Behufe hat man nur zu setzen, unter q einen Proportionalitätsfactor verstanden:

$$qx_1 = y_1 y_n$$

$$qx_2 = y_2 y_n$$

$$\vdots$$

$$qx_{n-1} = y_{n-1} y_n$$

$$qp = y_n y_n$$

$$-q^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2.$$

Für $n = 3$ sind dies die bekannten Formeln, welche die stereographische Projection einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene vorstellen.

Als Fundamentalgebilde treten bei dieser Abbildung auf:

1) Im R_{n-1} die $M_{n-3}^{(1,2)}$, welche durch die beiden Gleichungen vorgestellt wird:

*) Hiermit wieder kann man in Zusammenhang bringen, wenn man, wie die Herren Clebsch und Gordan, behufs der typischen Darstellung gerader binärer Formen gethan haben, die Punkte der Geraden durch drei homogene Coordinaten bestimmt, zwischen denen eine Bedingungsgleichung zweiten Grades Statt hat; vergl. Clebsch: Theorie der binären Formen (Leipzig 1871). Neunter Abschnitt.

$$0 = y_n,$$

$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2.$$

Jedem Elemente derselben entspricht nicht ein Element der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$, sondern eine einfach unendliche Zahl.

2) Auf der $M_{n-1}^{(2)}$ ein einzelnes Element (der Projectionspunkt):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_{n-1} = 0, \quad p = 0.$$

Ihm entspricht die lineare Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen:

$$y_n = 0.$$

Nun wurde bereits bemerkt, dass die metrische Geometrie des R_{n-1} eben eine $M_{n-3}^{(1,2)}$ als fundamentales Gebilde benutzt. Durch unsere Abbildung wird also, wie behauptet wurde, die metrische Geometrie des R_{n-1} mit der Geometrie der $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n , unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Elementes, in Beziehung gesetzt.

Die Art dieser Beziehung wird durch den folgenden Satz dargelegt, der die Beziehung als eine wesentliche kennzeichnet:

Den linearen Transformationen des R_{n-1} , welche dessen fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$ ungeändert lassen, entsprechen diejenigen linearen Transformationen des R_n , welche die gegebene M_{n-1} und den auf ihr befindlichen (willkürlich gewählten) Projectionspunkt nicht ändern.

In der That, setzen wir statt $y_1 \dots y_n$ lineare Functionen derselben, welche die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$:

$$0 = y_n$$

$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2$$

nicht ändern, so ergeben die Formeln ohne Weiteres die Richtigkeit des Satzes.

Die ersteren Transformationen sind aber diejenigen, welche man in der metrischen Geometrie des R_{n-1} betrachtet; d. h. es sind diejenigen Umformungen, welche metrische Eigenschaften des R_{n-1} nicht ändern. Beispielsweise, ist $n = 4$, so ist der R_{n-1} der gewöhnliche Punktraum. Die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$ ist der unendlich ferne imaginäre Kreis. Die linearen Transformationen des Punktraumes, welche letzteren nicht ändern, sind diejenigen, die man als Bewegungen, als Ähnlichkeitstransformationen und als Transformationen durch Spiegelung bezeichnet. Bei diesen Transformationen bleiben aber alle metrischen Beziehungen räumlicher Figuren ungeändert. — Andererseits würde man den entsprechenden Cyclus linearer Transformationen der x in Betracht zu ziehen haben, wenn man nach denjenigen Eigenschaften von Gebilden des R_n fragt, welche sich auf die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ und den auf ihr befindlichen Projectionspunkt beziehen.

Man wird jetzt die Frage aufstellen können: Welche Transformationen des R_{n-1} entsprechen denn denjenigen linearen Transformationen des R_n , welche nur die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$, nicht aber auch den Projectionspunkt selbst ungeändert lassen? Ehe wir diese Frage beantworten, wollen wir die benutzten Abbildungsformeln so umändern, dass auch formell der Zusammenhang mit der gewöhnlichen Darstellung der metrischen Geometrie des R_n (wobei rechtwinklige Coordinaten gebraucht werden) hervortritt. Es genügt, zu diesem Zwecke $y_n = 1$ zu setzen und die dann absolut bestimmten $y_1 \dots y_{n-1}$ als rechtwinklige Coordinaten des R_{n-1} aufzufassen. $y_n = 0$ ist dann der Ort der unendlich fernen Elemente des R_{n-1} (die unendlich ferne Ebene). In $y_n = 0$ befindet sich die fundamentale $M_{n-1}^{(1, 2)}$, die aus ihm durch die Gleichung:

$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2$$

ausgeschieden wird. — Es sei nun gestattet, die $M_{n-2}^{(2)}$, welche durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$(y_1 - \alpha_1)^2 + (y_2 - \alpha_2)^2 + \dots + (y_{n-1} - \alpha_{n-1})^2 = r^2$$

nach Analogie mit der gewöhnlichen Raumgeometrie als eine *Kugel* des R_{n-1} zu bezeichnen. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sind die Coordinaten ihres Mittelpunktes, r ist der Radius. Eine derartige Kugel ist das Bild eines ebenen Schnittes der im R_n gegebenen und auf den R_{n-1} projectirten $M_{n-1}^{(2)}$. Denn die Gleichung der Kugel ist die allgemeine lineare Gleichung zwischen den die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ darstellenden Abbildungsfunktionen. Unter den Kugeln finden sich insbesondere solche mit unendlich grossem Radius, d. h. Ebenen; sie sind das Bild solcher ebenen Schnitte der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$, welche durch den Projectionspunkt hindurchgehen.*)

Betrachten wir jetzt, wie sich die Abbildung der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$ ändert, wenn wir die $M_{n-1}^{(2)}$ durch lineare Transformationen des R_n in sich selbst überführen. Wir untersuchten bereits diejenigen unter diesen Transformationen, welche den Projectionspunkt nicht ändern. Ihnen entsprechen die Bewegungen und die Aehnlichkeitstransformationen des R_{n-1} . Alle anderen Transformationen setzen sich aber augenscheinlich aus Transformationen dieser besonderen Art und solchen Transformationen zusammen, welche einer Verlegung des Projectionspunktes auf der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$ entsprechen. Vertauschen wir aber den bisher benutzten Projectionspunkt:

*) Man versinnliche sich dies an der gewöhnlichen stereographischen Projection einer F_2 . Jeder ebene Schnitt bildet sich als Kreis ab; insbesondere als Gerade, wenn er den Projectionspunkt enthält.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_{n-1} = 0, \quad p = 0$$

mit einem anderen, für den wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Punkt:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_{n-1} = 0, \quad q = 0$$

nehmen wollen, so kommt dies darauf hinaus, im R_{n-1} die Grössen

mit den folgenden

$$\begin{array}{ccccccc} y_1, & y_2, & \dots & y_{n-1} \\ y_1^2, & y_2^2, & \dots & y_{n-1}^2 \end{array}$$

zu vertauschen, wo q^2 den Ausdruck bezeichnet:

$$q^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2.$$

Eine derartige Transformation soll, nach Analogie mit der entsprechenden Transformation bei zwei und drei Variabeln, eine Transformation durch *reciproke Radii vectores* heissen. Wir können jetzt den Satz aussprechen:

Der Gesamtheit der linearen Transformationen des R_n , welche die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ in sich überführen, entspricht im R_{n-1} ein Transformationscycluss, der sich aus dessen Bewegungen, den Aehnlichkeitstransformationen und den Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzt.

Hier nun knüpft diejenige Behandlung der metrischen Geometrie des R_{n-1} an, von der in der Einleitung die Rede war. Zunächst wird man den Gehalt der metrischen Geometrie in zwei Theile sondern. Man wird solche Beziehungen unterscheiden, welche, auf die $M_{n-1}^{(2)}$ übertragen, den gewählten Projectionspunkt impliciren, und solche, bei denen dieses nicht der Fall ist. Die letzteren sind, wie man jetzt sieht, alle diejenigen, welche bei Umformung durch reciproke Radien ungeändert bleiben. Zu ihrer Behandlung muss es vorthailhaft sein, den R_{n-1} auch algebraisch als eine $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n zu behandeln. Das heisst: man wird bei ihrer Behandlung das Element des R_{n-1} nicht durch $n - 1$ absolute, sondern durch $n + 1$ homogene Coordinaten bestimmen, zwischen denen eine Bedingungsgleichung zweiten Grades besteht. (Da dieselben, gleich Null gesetzt, ebene Schnitte der $M_{n-1}^{(2)}$ vorstellen, so repräsentiren sie im R_{n-1} Kugeln.)

Man bestimme also z. B. den Punkt des gewöhnlichen Raumes nicht durch drei absolute Coordinaten, sondern durch fünf homogene:

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \quad s_5,$$

die, gleich Null gesetzt, Kugeln vorstellen. Geometrisch kommt dies darauf hinaus, den Punkt durch die relativen Werthe der mit gewissen Constanten multiplicirten Potenzen desselben in Bezug auf fünf ge-

gebene Kugeln festzulegen. Zwischen den fünf s besteht eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$\Omega = 0.$$

In der Discussion dieser Gleichung ist in demselben Sinne der gesammte Theil der metrischen Raumgeometrie vorhanden, der durch reciproke Radien ungeändert bleibt, wie sich die gesammte Liniengeometrie an die Discussion der entsprechenden Gleichung $P = 0$ anknüpft. Dass diese Behandlung metrischer Probleme von grossem Vortheile sein kann, mag hier nur an einem Beispiele erörtert werden. Auf dieses Beispiel ist Herr Lie bei dem Studium seiner Abbildung des linearen Complexes geführt worden, indem er liniengeometrische Betrachtungen, die ich in einer früheren Abhandlung*) gegeben hatte, auf die entsprechenden metrischen Dinge übertrug. Andererseits ist dieses Beispiel eben für mich Veranlassung gewesen, die allgemeineren hier vorgetragenen Ueberlegungen anzustellen. Man bestimme nämlich den Punkt des Raumes durch fünf Coordinaten $s_1 \dots s_5$, welche, gleich Null gesetzt, Kugeln vorstellen, die sich orthogonal schneiden. Dann hat Ω die Gestalt:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 = 0.$$

Schreibt man nun die Gleichung:

$$\frac{s_1^2}{k_1 + \lambda} + \frac{s_2^2}{k_2 + \lambda} + \dots + \frac{s_5^2}{k_5 + \lambda} = 0,$$

wo λ ein Parameter, so hat man ohne Weiteres das Orthogonalflächensystem vor sich, welches von den Herren Darboux und Moutard gefunden wurde, und das aus Flächen vierter Ordnung gebildet ist, die den imaginären Kreis doppelt enthalten.***) — Diese Form entspricht, bis auf die Zahl der Variablen, genau der Gestalt, die ich l. c. der Gleichung der Complexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche gegeben habe; es findet also auch dieselbe Art der Discussion auf sie Anwendung, wie dies Herr Lie in der vorstehenden Abhandlung ausführt.

Aber auch für die Geometrie der $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n ist die Verbindung, in welche sie hier mit der metrischen Geometrie gebracht wird, nicht ohne Wichtigkeit. Ich will hier unter vielen ähnlichen Betrachtungen nur eine hervorheben, die im Folgenden für Liniengeometrie

*) Math. Annalen t. 2. Zur Theorie der Complexe ersten und zweiten Grades.

**) cf. Lie. Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 7., oder die vorstehende Abhandlung. — Auf dieselbe Gleichungsform war Herr Darboux bereits früher geführt worden. Er hat dieselbe in einer Abhandlung entwickelt, welche er 1868 der Akademie zu Paris eingereicht hat, die aber noch nicht veröffentlicht ist. Vergl. eine neuere Note in den Comptes Rendus. Sept. 1871., wo Herr Darboux einige in seiner gen. Abhandlung enthaltene Resultate auführt.

verwandt werden soll. Die ∞^{n-2} verschiedenen Fortschreitungsrichtungen, welche von einem Elemente des metrischen Raumes R_{n-1} zu benachbarten Elementen führen, bilden mit einander *Winkel*, z. B. können zwei solche Fortschreitungsrichtungen auf einander senkrecht stehen. Diese Winkel bleiben, wie bekannt, bei Umformungen durch reciproke Radian un geändert. Man wird daher, wenn im R_n eine $M_{n-1}^{(2)}$ gegeben ist, auch von Winkeln reden können, welche die Fortschreitungsrichtungen von einem Elemente der $M_{n-1}^{(2)}$ zu benachbarten Elementen der $M_{n-1}^{(2)}$ bilden. Bei der Bestimmung dieser Winkel kommen nur die projectivischen Eigenschaften der $M_{n-1}^{(2)}$ selbst, nicht etwa ausserhalb im R_n gelegene fundamentale Gebilde in Betracht. Man übersieht dies deutlich, wenn man $n = 3$ nimmt, die $M_{n-1}^{(2)}$ also eine Fläche zweiten Grades bedeuten lässt. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Erzeugende hindurch; auf sie beziehen sich, als fundamentales Geradenpaar*), die zwischen den Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Punkten bestehenden Winkel. Insbesondere wird man zwei Fortschreitungsrichtungen zu einander senkrecht nennen, wenn sie harmonisch zu den beiden Erzeugenden liegen. Der analytische Ausdruck hierfür ist offenbar dieser. Sei $\Omega = 0$ die Fläche zweiten Grades. So bilden wir den Ausdruck:

$$2 \Omega_{xy} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \cdot y_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \cdot y_2 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \cdot y_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_4} \cdot y_4.$$

Setzen wir in ihn für x_1, x_2, x_3, x_4 bez. dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 , für y_1, y_2, y_3, y_4 bez. $d'x_1, d'x_2, d'x_3, d'x_4$, so bedeutet das Verschwinden des Ausdrucks, dass die beiden Fortschreitungsrichtungen in dem genannten Sinne auf einander senkrecht stehen.***) Die entsprechende Formel wird auch bei n Dimensionen gültig bleiben und soll im folgenden Paragraphen für Liniengeometrie verwandt werden.

*) Vergl. „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“. Diese Annalen. t. IV, 4. § 2. 3.

**) Allgemein wird der fragliche Winkel durch den folgenden Ausdruck gegeben sein. Sei Ω_{xy} der im Texte aufgestellte Ausdruck; Ω_{xx} und Ω_{yy} bedeute die Gleichung Ω bez. mit den x oder den y geschrieben. So ist der gesuchte Winkel

$$= \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{yy}}},$$

wo statt x und y bez. dx und $d'x$ einzutragen ist.

Hier ist ersichtlich, wie diese Winkelbestimmung mit der allgemeinen von Cayley aufgestellten projectivischen Massbestimmung zusammenhängt, die eine F_2 als fundamentales Gebilde benutzt. (Phil. Transactions. t. 149. A sixth Memoir upon Quantities. Vergl. auch des Verf.: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“ l. c.) Indess soll dieser Zusammenhang, der auch bei beliebig vielen Dimensionen gilt, hier nicht weiter verfolgt werden.

§ 3.

Uebertragung der Lehre von den Krümmungs-Curven und den
Orthogonalsystemen auf Liniengeometrie.

Die Lehre von den Krümmungs-Curven und den Orthogonalsystemen constituirt einen Theil der metrischen Geometrie, welcher durch reciproke Radien ungeändert bleibt. Es soll jetzt — als ein Beispiel für solche Uebertragungen — das Entsprechende bei der Liniengeometrie aufgesucht werden. Zu diesem Zwecke mag die gewöhnliche Theorie zunächst so formulirt werden, dass ihre Unabhängigkeit von der Transformation durch reciproke Radien in Evidenz tritt.

Sei im gewöhnlichen Raume R_3 eine Fläche gegeben. Dieselbe wird in jedem Punkte von einfach unendlich vielen Kugeln berührt. Unter denselben giebt es nun jedesmal zwei ausgezeichnete, die auch noch in einem benachbarten Punkte berühren, die sogenannten *Hauptkugeln*. An ihre Existenz knüpft sich unmittelbar die Definition der Krümmungs-Curven. Man erhält eine Krümmungs-Curve, wenn man vom gewählten Punkte zu dem benachbarten Punkte fortschreitet, in welchem eine der beiden Hauptkugeln berührt. Krümmungs-Curven sind also solche auf einer Fläche verlaufende Curven, in deren consecutiven Punkten die Fläche von derselben Kugel berührt wird.*) Durch jeden Punkt gehen zwei Krümmungs-Curven; dieselben stehen auf einander senkrecht.

Gehen wir nun zum metrischen Raume von vier oder gleich von $(n - 1)$ Dimensionen. Eine Fläche desselben, d. h. eine Mannigfaltigkeit, die durch eine Gleichung aus ihm ausgeschieden wird, wird wieder in jedem Punkte von einfach unendlich vielen Kugeln berührt (unter einer Kugel, wie oben, eine besondere $M_{n-2}^{(2)}$ verstanden). Unter denselben finden sich $(n - 2)$ stationär berührende, d. h. solche, die noch in einem benachbarten Elemente berühren. Man wird jetzt von dem beliebig gewählten Punkte zu einem der benachbarten Berührungspunkte fortschreiten können und so weiter fort. Man erhält dann, einer Krümmungs-Curve im R_3 entsprechend, eine einfach unendliche auf der Fläche gelegene Mannigfaltigkeit, welche die Eigenschaft hat, dass die gegebene Fläche in je zwei consecutiven Punkten derselben von der

*) Die gewöhnliche Definition der Krümmungs-Curven, dass sich die Flächen-Normalen in consecutiven Punkten einer Krümmungs-Curve schneiden, ist eine Folge der hier vorgetragenen. Sie geht durch Anwendung reciproker Radien in eine allgemeinere über, in welcher das (zufällig gewählte) Inversionacentrum mit auftritt; desshalb ziehen wir die Definition, wie sie im Texte gegeben ist, vor.

nämlichen Kugel berührt wird. Solcher Mannigfaltigkeiten*) gehen durch jeden Punkt der Fläche $n - 2$; ihre Fortschreitungsrichtungen stehen auf einander senkrecht.

Gehen wir jetzt zur Liniengeometrie über. Wir haben dann n gleich 5 zu setzen. An Stelle der Fläche des R_1 tritt hier der Linien-Complex. Statt von Punkten der Fläche sprechen wir von Linien des Complexes; statt von Kugeln des R_1 von linearen Complexen (den ebenen Schnitten der in R_1 gelegenen $M_4^{(2)}$, die den Linienraum vorstellt). So erhalten wir das Folgende.

Sei ein Linien-Complex gegeben. Derselbe wird in einer (beliebig gewählten) seiner Geraden von einfach unendlich vielen linearen Complexen berührt, den von Plücker sogenannten linearen Tangential-Complexen. Unter ihnen giebt es drei ausgezeichnete, welche auch noch in einer benachbarten Geraden berühren. Schreitet man von der angenommenen Geraden zu einer dieser benachbarten und von da weiter in gleichem Sinne fort, so beschreibt man eine dem Complex angehörige Linienfläche — sie soll im Folgenden eine *Hauptfläche des Complexes* heißen — welche die Eigenschaft hat, dass der Complex in je zwei consecutiven Erzeugenden derselben von dem nämlichen linearen Complex berührt wird. Durch jede Gerade des Complexes gehen drei Hauptflächen hindurch; ihre Fortschreitungsrichtungen sind, in übertragenem Sinne, zu einander senkrecht.

Wir haben jetzt noch zu erörtern, welchen metrischen Sinn dieses Senkrecht-Stehen besitzt. Da unter Zugrundelegung gewöhnlicher Linien-Coordinationen die für sie geltende Bedingungsgleichung die Form hat:

$$P = p_{12}p_{31} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

so werden nach § 2. zwei Fortschreitungsrichtungen dp und $d'p$ zu einander senkrecht genannt werden müssen, wenn:

$$0 = dp_{12}d'p_{31} + dp_{13}d'p_{42} + dp_{14}d'p_{23} \\ + d'p_{12}dp_{31} + d'p_{13}dp_{42} + d'p_{14}dp_{23}.$$

Dann aber besteht zwischen der gegebenen Geraden p und ihren beiden benachbarten, $p + dp$ und $p + d'p$, eine Beziehung, die ich als *involutorische Lage der beiden benachbarten Geraden* bezeichne**), und die folgenden geometrischen Inhalt hat.

*) Man kann sie wieder dadurch definiren, dass sich die in ihren consecutiven Punkten errichteten Flächennormalen schneiden. — Die Krümmungstheorie eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen ist in neuerer Zeit Gegenstand wiederholter Darstellungen gewesen. Man geht dabei meist von der letztgenannten Definition aus.

**) Als *Winkel* zweier benachbarter Geraden würde man bezeichnen können

$$\arccos \cdot \frac{dp_{12}d'p_{31} + dp_{13}d'p_{42} + \dots}{2\sqrt{dp_{12}dp_{31} + \dots} \cdot \sqrt{d'p_{12}d'p_{31} + \dots}}.$$

Eine benachbarte Gerade $p + dp$ ordnet jedesmal die Ebenen, welche durch p gehen, den auf p befindlichen Punkten projectivisch zu. Jede durch p gehende Ebene schneidet nämlich $p + dp$ in einem Punkte, der beim Gränzübergange auf p selbst rückt. Man übersieht dies deutlich, wenn man p und $p + dp$ als consecutive Erzeugende einer Linienfläche betrachtet. Jeder durch p hindurchgehenden Ebene entspricht dann ein auf p gelegener und durch $p + dp$ bestimmter Punkt: der Berührungspunkt mit der Fläche.

Sind nun zwei benachbarte Gerade $p + dp$, $p + d'p$ gegeben, so betrachte man jedesmal diejenigen beiden Punkte als entsprechend, die einer durch p gelegten Ebene bezüglich durch die beiden benachbarten Geraden zugeordnet werden. So erhält man auf p zwei collinear auf einander bezogene Punktreihen.

Die beiden benachbarten Geraden heissen nun involutorisch gelegen, wenn die beiden Punktreihen eine Involution bilden. [Vergl. die ganz analoge Definition von der involutorischen Lage zweier Complexe in der Einleitung.*)]

Gehen wir jetzt noch einmal zu dem metrischen Raume R_3 zurück und betrachten in demselben Orthogonalsysteme. Dies sind einfach unendlich viele Flächen, von denen durch jeden Punkt des Raumes drei hindurchgehen. Dieselben schneiden einander senkrecht. Für solche Orthogonalflächensysteme gilt der Dupin'sche Satz: *Je zwei Flächen des Systems schneiden sich nach einer gemeinsamen Krümmungs-Curve.*

Ähnliche Flächensysteme kann man im R_{n-1} betrachten; für sie gilt ein Satz, der dem Dupin'schen entspricht. Diese Flächensysteme sind wieder einfach unendlich, durch jeden Punkt des R_{n-1} gehen $n - 1$ Flächen. Dieselben schneiden sich gegenseitig senkrecht. Für diese Systeme gilt dann der Satz: *Je $n - 2$ Flächen schneiden sich nach einer gemeinsamen Krümmungs-Curve*, unter Krümmungs-Curven die eben betrachteten einfach unendlichen Mannigfaltigkeiten verstanden.

Im Linienraume werden wir uns den Begriff der *Involutionssysteme von Complexen* zu bilden haben. Dies sind einfach unendliche Complexsysteme. Jede Gerade des Raumes gehört vierein der Complexe

*) Man sieht ohne Weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes ein: Diejenigen Geraden, welche einem Linien-Complexe in der Nähe einer seiner Geraden p angehören, liegen zu einer bestimmten p benachbarten Linie, die im Allgemeinen nicht selbst dem Complexe angehört, in Involution. Und umgekehrt gehören alle solche benachbarten Geraden dem Complexe an. — Zwei Complexe heissen nun in Bezug auf eine gemeinsame Gerade p in Involution, wenn die benachbarten Geraden $p + dp$, $p + d'p$ involutorisch liegen, die sie bez. in dem hier auseinander gesetzten Sinne der Geraden p zuordnen.

an, und zwar liegen die vier Complexe, denen eine Gerade angehört, jedesmal paarweise mit Bezug auf diese Gerade in Involution.

Für diese Complexinvolutionssysteme gilt dann wieder ein Satz, der dem Dupin'schen entspricht: *Je drei Complexe schneiden sich nach einer gemeinschaftlichen Hauptfläche.*

Es ist bekannt, wie für irreductibele Orthogonalsysteme noch andere allgemeine Sätze aufgestellt werden können. So zeigte Herr Kummer, dass die Curven eines irreductibelen Orthogonal-Curvensystems nothwendig confocal sind; Herr Darboux*) dehnte diesen Satz auf Orthogonalflächensysteme im R_3 aus und fügte weitere, erst im R_3 auftretende, Eigenschaften hinzu. Es ist ersichtlich, dass analoge Eigenschaften für die irreductibeln Orthogonalsysteme in beliebigen Räumen, wie auch im Linienraume für irreductibele Involutionssysteme existiren. Ich gehe hier auf dieselben nicht ein; ich bemerke nur, dass dem Satze von der Confocalität der orthogonalen Flächen der liniengeometrische Satz entspricht: *Complexe eines irreductibelen Involutionssystems haben eine gemeinsame Singularitätenfläche.**)*

Das einfachste Beispiel eines irreductibelen Involutionssystems geben denn auch die einfach unendlich vielen Complexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche. Man kann für dieselben, wie ich in der schon genannten Arbeit: „Zur Theorie etc.“ (diese Annalen II. 2.) gezeigt habe, die folgende algebraische Darstellung anwenden. Seien $x_1 \dots x_6$ homogene Functionen der p_{ik} , für die

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 0.$$

So sind die Complexe dargestellt durch:

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \dots + \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0,$$

wo λ einen Parameter bezeichnet. In der That kommt der Parameter λ vermöge der Relation $\Sigma x^2 = 0$ im vierten Grade vor. Jede Gerade des Raumes gehört also vier Complexen des Systems an. Je zwei Complexe $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ liegen aber auch in Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution. Die Bedingung dafür, dass zwei Complexe

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

mit Bezug auf eine gemeinsame Gerade in Involution sind, ist nämlich bei der gewählten Coordinatenbestimmung:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_a} = 0 \quad \{ \text{vermöge } \varphi = 0, \psi = 0 \}.$$

*) Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. t. II. 1861.

**) Bei Plücker ist die Singularitätenfläche nur erst für Complexe zweiten Grades defnirt. Diese Lücke ist durch Herrn Pasch in seiner Habilitationsschrift: „Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden“, Giessen 1870, ausgefüllt worden.

Dieser Ausdruck verschwindet aber immer, wenn φ , ψ zwei Complexe des hier betrachteten Systems sind. Denn derselbe wird gleich

$$4 \left(\frac{x_1^2}{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)} + \frac{x_2^2}{(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)} + \cdots \cdots \frac{x_6^2}{(k_6 - \lambda_1)(k_6 - \lambda_2)} \right)$$

und das ist durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\varphi - \psi),$$

verschwindet also mit φ und ψ .

Je drei Complexe des Systems haben als Complexe des zweiten Grades Linienflächen des sechszehnten Grades gemein; *die Hauptflächen der Complexe zweiten Grades sind also vom sechszehnten Grade.* Ich gehe nicht näher auf die Discussion dieser Flächen ein, die, wenn man die Complexe specialisirt, eine grosse Zahl besonderer Flächen unter sich begreifen.

§ 4.

Weitere Betrachtungen über die Hauptflächen der Complexe.

In diesem letzten Paragraphen mögen wir noch weitere Eigenschaften der Hauptflächen von Complexen, der Involutionssysteme u. s. w. entwickeln, und zwar an der Hand rein liniengeometrischer Betrachtungen. Dieselben übertragen sich natürlich wieder auf die metrische Geometrie des R_4 , was aber nicht weiter verfolgt werden soll.

Herr Lie hat den merkwürdigen Satz gefunden (der bei ihm in anderweitigem Zusammenhange steht), *dass man auf jeder Linienfläche, die einem linearen Complexe angehört, eine Haupttangenten-Curve kennt.* Es giebt nämlich auf jeder Erzeugenden der Linienfläche zwei Punkte, deren Tangentialebene gleichzeitig die ihnen im linearen Complexe entsprechende Ebene ist. Die Gesammtheit dieser Punkte bilden die in Rede stehende Haupttangenten-Curve.

Den Beweis kann man einfach so stellen. Alle Tangenten der Fläche in einem solchen Punkte gehören dem Complexe an. Die Punkte bilden daher eine Curve, deren Tangenten dem Complexe angehören, eine Complex-Curve. Eine Complex-Curve hat aber die Eigenschaft, in jedem ihrer Punkte die im Complexe entsprechende Ebene zur Osculationsebene zu besitzen. Andererseits ist diese Ebene jedesmal nach Voraussetzung Tangentialebene der Fläche. Die Curve ist also eine Haupttangenten-Curve.

Wenn nun eine Linienfläche als irgend einem Complexe angehörig gegeben ist, so kann man auf ihr immer in ähnlicher Weise eine Curve bestimmen; nur ist sie dann im Allgemeinen keine Haupttangenten-Curve. Man suche nämlich auf jeder Erzeugenden diejenigen beiden Punkte, in denen die Fläche vom Complexkegel berührt wird. Die Reihenfolge dieser Punktpaare constituirt die fragliche Curve.

Ist nun aber die Linienfläche insbesondere eine Hauptfläche des gegebenen Complexes, so ist die so construirte Curve eine Haupttangenten-Curve derselben.*)

Der Beweis ergibt sich vermöge des Lie'schen Satzes unmittelbar aus der Definition der Hauptfläche. Der gegebene Complex wird in je zwei consecutiven Erzeugenden von dem nämlichen linearen Complexen berührt. Der betreffende lineare Complex enthält also drei consecutive Erzeugende der Linienfläche und bestimmt auf den beiden ersten derselben die nämlichen beiden Punktpaare, wie der gegebene Complex selbst.

Nun kann man den Lie'schen Satz auch so formuliren. Enthält ein linearer Complex drei consecutive Erzeugende einer Linienfläche, so bestimmt er auf den beiden ersten Punktpaare, die derselben Haupttangenten-Curve angehören. Hiermit ist der Beweis unseres Satzes gegeben.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung eines Involutionssystems. Eine einzelne Gerade p gehört vierein der Complexen an, die mit a, b, c, d bezeichnet sein mögen. Dieselben liegen paarweise mit einander in Involution. In Folge dessen hat man zunächst die folgenden Sätze, wegen deren Beweis ich auf die Arbeit: „Zur Theorie etc.“ (diese Annalen II, 2.) verweise.**)

1) Die Linienfläche, welche dreien der Complexen, etwa a, b, c , angehört, wird in allen Punkten von p von dem betreffenden Complexkegel d berührt.

2) Die Linie p berührt die Brennfläche der Congruenz zweier Complexen a, b in den nämlichen beiden Punkten, in denen sie die Brennfläche der Congruenz der beiden anderen Complexen c, d berührt.

3) Die drei in dieser Weise auf der Geraden entstehenden Punktpaare (ab, cd) , (ac, bd) , (ad, bc) sind zu einander harmonisch.***)

Betrachten wir jetzt eine Hauptfläche, die dreien der Complexen, etwa a, b, c , gemeinsam ist. Auf ihr kennt man, jedem der drei Complexen entsprechend, eine Haupttangenten-Curve, welche jede Erzeugende zweimal schneidet. Nun gilt aber für Haupttangenten-Curven der Linienflächen der von Herrn Paul Serret angegebene Satz: dass die Erzeugenden der Linienfläche von den Haupttangenten-Curven

*) Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

**) Dieselben sind dort nur für lineare Complexen bewiesen. Sie gelten also auch für die linearen Tangential-Complexen der hier gegebenen Complexen und hiermit für die letzteren selbst.

***) Hieran knüpft sich der weitere Satz: Legt man durch p eine Ebene, so enthält dieselbe, a, b, c, d entsprechend, je eine Complex-Curve. Die vier Berührungspunkte der vier Curven mit p bilden eine viergliedrige Punktgruppe, deren Covariante sechsten Grades durch die drei Punktpaare des Textes dargestellt wird.

projectivisch getheilt werden. Hieraus wird man einmal schliessen, dass die sechs Punkte, in denen jede Erzeugende von den drei Haupttangenten-Curven a, b, c geschnitten wird, sechs festen Elementen projectivisch sind. Dies ist, wie vorstehend [Satz 3]) angegeben, in der That der Fall. Andererseits wird man folgern, dass man auf der fraglichen Hauptfläche alle Haupttangenten-Curven durch rein algebraische Processe bestimmen kann. Denn man erhält alle Haupttangenten-Curven, wenn man sich einen Punkt auf der Fläche so bewegen lässt, dass er jedesmal auf allen Erzeugenden mit dreien der sechs Punkte a, b, c (und also mit allen) ein festes Doppelverhältniss bildet, und hierzu sind nur algebraische Operationen nothwendig.

Die beiden Punkte, in denen die Haupttangenten-Curve a eine Erzeugende, etwa p , trifft, sind, behaupte ich jetzt, die Berührungspunkte von p mit der Brennfläche der b und c gemeinsamen Congruenz. Denn in diesen Punkten berührt der Complexkegel a die Fläche, also auch, nach Satz 1), den Complexkegel d . Desshalb sind diese Punkte die Berührungspunkte von p mit der Brennfläche ad und also auch, nach Satz 2), mit der Brennfläche bc , was zu beweisen war. Man hat also den Satz:

Die Hauptfläche abc berührt die Brennfläche bc nach der Haupttangenten-Curve a , die Brennfläche ca nach der Curve b , die Brennfläche ab nach der Curve c .

Hieraus wird man weiter schliessen:

Dass man auch auf den Brennflächen der Congruenzen je zweier Complexe die Haupttangenten-Curven kennt.

Es sind dies dieselben Curven, die Haupttangenten-Curven der Hauptflächen waren. In der That erhält man in der Gesamtheit der Berührungs-Curven der Brennfläche mit den Hauptflächen auch die Gesamtheit der Haupttangenten-Curven der Brennfläche. Denn die in einem Punkte der Brennfläche ab berührende Gerade, welche a und b angehört, gehört gleichzeitig zwei weiteren Complexen c und d an. Man erhält also in den Berührungs-Curven der Brennfläche mit den Hauptflächen abc, abd die beiden durch den gewählten Punkt hindurchgehenden Haupttangenten-Curven. *)

*) Die verschiedenen hier aufgestellten Sätze hatte ich, mitsammt dem Satze des § 3.: „dass sich je drei Complexe eines Involutionssystems nach einer gemeinsamen Hauptfläche schneiden“, in der bereits citirten Note in den Gött. Nachrichten Nr. 3. (1871) in dem Satze zusammengefasst: dass die Linienfläche, welche drei Complexen eines Involutionssystems gemeinsam ist, die Brennfläche je zweier derselben nach einer Haupttangenten-Curve berührt, und in dieser Fassung analytisch erwiesen. Die heterogenen Bestandtheile, welche dieser Satz enthielt, erscheinen im Texte gesondert. Ich bin Herrn Lie dafür verpflichtet, dass er mich auf die Möglichkeit der Sonderung aufmerksam gemacht hat.

Für das Involutionsystem der Complexe zweiten Grades findet man insbesondere: die Haupttangente-Curven auf den Hauptflächen, nach denen diese die Brennflächen berühren, sind von der 32^{ten} Ordnung und Classe. Die Brennflächen selbst sind gleich den Hauptflächen von der 16^{ten} Ordnung und Classe.

Durch passende Particularisationen erhält man aus der Betrachtung dieser Brennflächen und Hauptflächen die Bestimmung der Haupttangente-Curven auf einer grossen Zahl besonderer Flächen. Hier sei nur eine solche Particularisation erwähnt. Die beiden Complexe des Systems, die mit einander die Congruenz und durch diese die Brennfläche bestimmen, mögen zusammenfallen. Dann wird die Congruenz die Congruenz der singulären Linien des betreffenden Complexes. Ihre Brennfläche zerfällt in die allen Complexen gemeinsame Singularitätenfläche, die von der vierten Ordnung und Classe ist und eine weitere Fläche von der zwölften Ordnung und Classe. Auf beiden erhält man die Haupttangente-Curven, die jetzt bezüglich von der sechszehnten Ordnung werden. Nun ist für die allgemeinen Complexe zweiten Grades die Singularitätenfläche eine Kummer'sche Fläche vierten Grades mit sechzehn Knotenpunkten. Man erhält also eine Bestimmung der Haupttangente-Curven dieser Fläche, die dahin geht: dass sie die Berührungs-Curven der Fläche mit denjenigen Linienflächen sind, welche einem beliebigen (aber fest gewählten) zugehörigen Complexe als singuläre Linien und ausserdem noch bez. einem zweiten (veränderlichen) der zugehörigen Complexe angehören. Hiermit in Uebereinstimmung findet sich eine Bestimmung der Haupttangente-Curven der Kummer'schen Fläche, wie sie in einer gemeinsamen Arbeit in den Monatsberichten der Berliner Akademie, December 1870, von Lie und mir gegeben worden ist. Der Inhalt dieser Note kann als eine nähere Ausführung einiger der hier vorgetragenen Betrachtungen angesehen werden.

Göttingen im October 1871.