Aendert man durch Handhabung eines Stimmhammers den Ton des Saitenunterbrechers, so folgt die Membran diesen Aenderungen mit ihren Obertönen nach, aus denen immer einer dann besonders stark hervortritt, wenn für ihn die Saite und die Membran sich im Einklang befinden. Für einen solchen Membranton kann man dann auch durch aufgestreuten Sand die entsprechende Klangfigur erhalten.

Die Schaar der Obertöne der Membran, welche so in wechselnder Folge sich vernehmen lässt, hat grosse Aehnlichkeit mit dem Tönen einer Aeolsharfe. Insbesondere lässt sich der Versuch noch so abändern, dass man die Membran in einem ganz anderen Zimmer, vielleicht ein Stockwerk höher gelegen wie das Zimmer, in welchem der Saitenunterbrecher aufgestellt ist, aufstellt. Lässt man die Töne des letzteren sich ändern, so folgt die Membran diesen Aenderungen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Zusammenstellung schwingender Körper unter Anwendung des electricischen Stromes sich in der Telephonie verwerthen lässt, und hoffe ich, später auf diesen Gegenstand näher eingehen zu können.

VIII. *Ueber die Strömung der Luft durch Röhren von beliebiger Länge; von Paul Hoffmann.*

(Hiersu Taf. V Fig. 1—8.)

Die bisherigen Untersuchungen über die Strömung der Gase haben für zwei specielle Fälle mit der Erfahrung übereinstimmende Gesetze geliefert: das Navier'sche Gesetz¹⁾ für ganz kurze Röhren und das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz²⁾ für sehr lange Röhren. Für die dazwischenliegenden Fälle rechnete man näherungsweise nach dem einen oder anderen Gesetze, besonders hat man für kurze Röhren das Navier'sche Gesetz unter Einführung sogenannter Ausflusscoefficienten angewendet.³⁾ Das Strömungsgesetz der

1) Navier, Mém. de l'Acad. royale des sciences. 9. p. 336. 1830.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 269. 1866 u. 148. p. 6. 1873.

3) Vgl. Gehler's physik. Wörterbuch. Artikel Pneumatik.

Gase für Röhren von beliebiger Länge ist also noch als eine offene Frage zu betrachten, zu deren Lösung die vorliegende Arbeit versuchen soll, einige Beiträge zu liefern.

§ 1. Aufstellung der Formeln.

a) Erweiterung des Poiseuille-Meyer'schen Gesetzes. — Wenn das erweiterte Poiseuille'sche Gesetz für seine Gültigkeit die Anwendung langer Capillaren fordert, so geschieht dieses deshalb, um eine parallele Strömungsrichtung der einzelnen Gastheilchen voraussetzen zu können. Wir werden demnach, sobald jenes Gesetz nicht mehr anwendbar ist, einen Hauptgrund dafür darin suchen dürfen, das die Theilchen bei ihrem Gange durch die Röhre nicht mehr gerade, sondern wellenartige Linien beschreiben. Am natürlichsten wird nun die Vorstellung sein, dass diese Störungen in der Bewegung hauptsächlich durch die scharfen Ränder am Anfang und Ende der Capillare hervorgerufen werden und auch dort am stärksten sind. Guthrie's¹⁾ Untersuchungen scheinen dieser Vorstellung zu widersprechen. Guthrie zerschnitt eine Capillare, durch die er unter gewissem treibenden Drucke ein bestimmtes Volumen Luft hatte strömen lassen, in kleine Stücke und fügte diese wieder mit Kautschukschlauch aneinander. Dann stellte er denselben Strömungsversuch wie vorher an und fand dieselbe Transpirationszeit. Hiernach lag es nahe, die Störungen am Anfang und Ende der Capillare zu leugnen. Da mir die Guthrie'schen Versuche nicht ausreichend erschienen, um ein so befremdendes Resultat zu beweisen, stellte ich ähnliche Versuche an. Die Luft strömte, durch festes Kalihydrat von Wasser und Kohlensäure befreit, aus der Atmosphäre in einen leergepumpten Ballon. Die Ablesung geschah, wenn das Quecksilbermanometer am Ballon vom Barometerstande den Unterschied von:

60,47 50,69 40,93 31,10 21,15 11,01 cm
anzeigte.

1) Guthrie, Phil. Mag. 5. (5) p. 433. 1878.

Röhre I.

Länge 117,84 cm, 28 Stücke.

	Vor dem Zerschneiden		Nach dem Zerschneiden	
Barometer . .	75,26		75,48	
Thermometer .	21,8°		19,4°	
Zeit	0 ^m	0,0 ^s	0 ^m	0,0 ^s
„	1	20,0	1	28,0
„	2	48,0	3	3,0
„	4	31,0	4	53,0
„	6	43,0	7	12,5
„	10	11,0	10	47,5

Röhre II.

Länge 87,42 cm, 20 Stücke.

1)	Vor dem Zerschneiden		Nach dem Zerschneiden		2)	Vor dem Zerschneiden		Nach dem Zerschneiden	
Barometer	73,78		74,19		Barometer	73,80		74,31	
Thermometer	19,1°		18,8°		Thermometer	19,2°		18,8°	
Zeit	0 ^m	0,0 ^s	0 ^m	0,0 ^s	Zeit	0 ^m	0,0 ^s	0 ^m	0,0 ^s
„	1	9,0	1	23,75	„	1	9,5	1	23,5
„	2	24,5	2	54,0	„	2	24,5	2	53,0
„	3	51,0	4	36,0	„	3	51,5	4	35,0
„	5	42,5	6	43,0	„	5	43,0	6	42,0
„	8	36,0	9	52,0	„	8	36,5	9	51,0

Was die Wiedervereinigung der einzelnen Röhrrchen anbetrifft, so wurde über je zwei derselben ein passendes Glasrohr geschoben und eine luftdichte Verbindung mit Siegelack hergestellt. Die Röhrrchen berührten sich nicht, sondern liessen zwischen sich etwa 1 mm Zwischenraum; das übergesteckte Glasrohr wurde möglichst mit Siegelack ausgefüllt, um den Raum zwischen den beiden Röhrrchen auf ein Minimum zu reduciren, jedoch überzeugte ich mich stets sorgfältig, dass dabei nicht etwa eine Verstopfung der Röhrrchen eingetreten war. Die angeführten Resultate scheinen für unsere Vorstellung und gegen Guthrie's Behauptung zu sprechen. Guthrie's Resultat ist nicht ganz falsch, sondern nur als unvollständig zu bezeichnen; es liesse sich vielleicht dadurch erklären, was leider beides aus seiner Arbeit nicht ersichtlich ist, dass er mit nur geringem treibenden Druck gearbeitet, oder dass er die einzelnen Röhrrchen dicht aneinander geschoben hat. Hätte er das letztere gethan,

dann hätte die Luft beim Eintritt in die einzelnen Röhrchen nicht dieselbe Bedingung vorgefunden, wie am Anfange des ersten; die Berührungsstellen hätten dann nur den Werth von Sprüngen im Glase gehabt. Wenn wir so schliessen müssen, dass wir am Anfang der Röhre in der That eine stärkere Wirbelbewegung anzunehmen haben, so können wir uns jetzt auch eine Anschauung von den Vorgängen am Ende der Röhre zu machen versuchen. Zu dem Zwecke liess ich Tabaksrauch durch Röhren, natürlich nicht Capillarröhren, strömen und fand, dass zuerst eine kegelförmige Zusammenziehung des austretenden Strahles darauf eine viel stärkere kegelförmige Erweiterung eintrat, in welcher sich heftige Wirbelbewegungen geltend machten. Diese Erweiterungen und die Wirbelbewegungen rückten um so näher an die Austrittsstelle, je schneller die Strömung wurde, und es trat ein Punkt ein, wo die Zusammenziehung des Strahles ganz verschwand, dafür aber die Wirbelbewegungen dicht vor dem Ende der Röhre stattfanden. Diese Resultate sind übrigens übereinstimmend mit denjenigen, welche Sondhaus¹⁾ bei Oeffnungen in dünner Wand gefunden.

Da wegen der verwickelten Form der für das vorliegende Problem geltenden mathematischen Grundgleichungen²⁾ eine strenge Lösung derselben für den vorliegenden Fall kaum zu erwarten ist, so müssen wir uns mit den vorhandenen Wirbelbewegungen auf andere Weise abzufinden versuchen. Wir wollen die Wirbelbewegungen ganz vernachlässigen und ebenfalls wieder geradlinige Strömung annehmen, dafür aber die Störungen am Anfang und Ende der Röhre so berücksichtigen, dass wir den ersten und letzten Querschnitt der Capillare als Oeffnungen in dünner Wand ansehen. Zwischen dem ersten Ballon und dem ersten Querschnitt der Röhre,

1) Sondhaus, Pogg. Ann. 85. p. 58 ff. 1852.

2) Navier, Mém. de l'Acad. de sc. de Paris. 6. p. 389. 1823. — Poisson, Journ. de l'école polytechnique. 13. p. 139. 1831. — Stokes, Phil. Trans. Cambridge 8. p. 287. 1849. — Cauchy, Exerc. de mathém. 3. p. 183. 1828. — Barré de St. Venant, Compt. rend. 17. p. 1240. 1843. — Stefan, Wien. Ber. 46. Abth. II. p. 8. 1862.

ebenso zwischen dem letzten Querschnitt der Röhre und dem zweiten Ballon wenden wir dann das Navier'sche Gesetz¹⁾, für die Röhre selbst das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz²⁾ an. Demnach können wir schreiben:

$$(1) \quad vp = R^2 \pi \pi_1 \sqrt{C \log \text{nat} \frac{p_1}{\pi_1}},$$

$$(2) \quad vp = \frac{R^4 \pi g \varrho (\pi_1^2 - \pi_2^2)}{16 \eta l},$$

$$(3) \quad vp = R^2 \pi p_2 \sqrt{C \log \text{nat} \frac{\pi_1}{p_2}}.$$

Hierin sind:

R der Radius der Capillare,

$\pi = 3,1415 \dots$

p_1 die Höhe einer Quecksilbersäule, welche dem Druck im ersten Ballon das Gleichgewicht hält,

π_1, π_2, p_2 die entsprechenden Grössen für den ersten und letzten Querschnitt der Röhre und den zweiten Ballon,

v das Volumen, welches unter der Druckhöhe p gemessen in der Zeiteinheit durchfliesst,

g die beschleunigende Kraft der Schwere,

ϱ die Dichtigkeit des Quecksilbers,

l die Länge der Röhre,

η die Reibungsconstante der Luft,

$$C = \frac{2g \varrho 76 (1 + 0,003665 \vartheta)}{0,00129277},$$

wenn ϑ die Temperatur in Graden der hunderttheiligen Scala bedeutet.

Es sei hierbei ausserdem bemerkt, dass sämtliche Rechnungen im Centimeter-Gramm-Secunden-System durchgeführt sind.

Die obigen drei Gleichungen enthalten drei Unbekannte, und es entsteht die unangenehme Schwierigkeit, diese zu eliminiren, trotzdem zwei Gleichungen transcendent sind. Wir müssen uns wieder einer angenäherten Rechnung bedienen, die allerdings durch die physikalischen Thatsachen gerechtfertigt wird. Aus (1) schliessen wir:

1) Navier, *Mém. de l'Acad. royale des sciences*. 9. p. 330. 1830.

2) O. E. Meyer, *Pogg. Ann.* 127. p. 253. 1866.

$$\pi_1 = p_1 e^{-\frac{(vp)^2 p_1^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2 \pi_1^2}},$$

$$\pi_1 = p_1 \left[e^{-\frac{(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2}} - 2e^{-\frac{(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2}} \frac{(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2} \left(\frac{p_1 - \pi_1}{p_1} \right) + \dots \right].$$

Machen wir die Annahme, dass $(p_1 - \pi_1/p_1)^2$ schon verschwindend klein ist, dann dürfen wir die drei Gleichungen auch so schreiben:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = p_1 \left[1 - \frac{2(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2} \right] \\ \left[e^{-\frac{(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2}} - \frac{2(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_1^2} \right] \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} vp = \frac{R^4 \pi q g (\pi_1^2 - \pi_2^2)}{16 \eta l}, \\ \pi_2 = p_2 e^{\frac{(vp)^2}{R^4 \pi^2 C p_2^2}}. \end{array}$$

In π_1 und π_2 ist nun freilich noch das ebenfalls unbekannte (vp) enthalten; die Rechnung lässt sich aber doch verhältnissmässig bequem durchführen, wenn man annehmen kann, dass das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz wenigstens noch einen rohen Näherungswerth von vp liefert. Dann ist nämlich π_1 von p_1 und π_2 von p_2 sehr wenig verschieden, also der Factor von p_1 und p_2 nahezu der Einheit gleich. Für die Berechnung dieser Factoren wird es dann ausreichend sein, einen angenäherten Werth von vp , etwa wie ihn das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz liefert, einzusetzen, um mit Benutzung der so gewonnenen Grössen π_1 und π_2 aus der mittleren der angeführten Formeln einen richtigen Werth von vp zu erhalten. Sollte der so ermittelte Werth noch nicht mit jenem Näherungswerthe genügend übereinstimmen, so wird eine nochmalige Rechnung gewiss das gewünschte Resultat liefern, wenn man jetzt als Näherungswerth einen solchen benutzt, der zwischen dem ersten und dem berechneten Werthe, jedoch ziemlich nahe an diesem liegt. Durch eine grosse Zahl von Berechnungen habe ich mich überzeugt, dass eine einmalige, höchstens zweimalige Rechnung den gewünschten Erfolg hatte; auch zeigte sich dabei, dass in den meisten Fällen auch schon $(p_1 - \pi_1)/p_1$ zu vernachlässigen gewesen wäre.

In den Fällen, in denen unsere Formel nicht mehr anwendbar ist, ist ersichtlich, dass sie einen zu hohen Werth für vp liefern wird. Der Durchgang der Luft durch den

ersten und letzten Querschnitt der Röhre wird nicht so erfolgen, wie ihn das Navier'sche Gesetz verlangt, sondern es wird eine Zusammenziehung des Strahles erfolgen. Wir könnten diese Zusammenziehung allerdings durch Einführung eines Contractionscoëfficienten berücksichtigen, es entsteht dann aber wieder die Ungewissheit, welchen Werth man ihm beilegen soll. Jedenfalls muss er grösser angenommen werden, als für eine Oeffnung in dünner Wand; nur so lässt sich die Thatsache erklären, dass durch ein kurzes Röhrchen eine grössere Menge Luft ausfliesst als durch eine Oeffnung in dünner Wand.¹⁾ Das Maximum muss man sich dadurch entstehend denken, dass bei wachsender Röhrenlänge das eine Hinderniss, die seitliche Strömung der Lufttheilchen sich vermindert, während das andere, die Reibung, wächst, aber in geringerem Maasse. Welchem Gesetze die Strömung für den Maximalausfluss gehorcht, konnte leider nicht ermittelt werden: die Joule'schen Versuche sind dazu nicht ausreichend, und die Versuche von D'Aubuisson waren mir in ausführlicher Angabe nicht zugänglich.

b) Aufstellung einer empirischen Formel. — Wollen wir aus der im Vorhergehenden aufgestellten Formel eine Formel für veränderliche Strömung ableiten, so liegt es nahe, jene nur auf unendlich kurze Zeit anzuwenden und eine Integration vorzunehmen. Man überzeugt sich jedoch bald, dass diese Integration nur mit sehr grossen Vernachlässigungen ausführbar ist und selbst dann noch zu so verwickelten Formeln führt, dass es besser ist, sich von vornherein nach einer anderen Formel für variable Strömung umzusehen. Tragen wir die Transpirationszeit für ein gewisses Volumen als Ordinate und die zugehörige Länge der Röhre als Abscisse auf, alle übrigen Verhältnisse als gleichbleibend vorausgesetzt, so erhalten wir eine Linie, welche wir etwas näher betrachten wollen. Es liefert das Poi-

1) Joule, *Memoirs of the Literary and Phil. Soc. Manchester*. 1. (3) p. 102. 1862. — D'Aubuisson, *Ann. des Mines*. (1) ? 13. p. 483. Im Auszug: *Ann. de chim. et de phys.* 32. p. 327. 1851 und Gehler's physik. Wörterb. Art. Pneumatik. p. 616—919.

seuille-Meyer'sche Gesetz in unserer Zeichnung eine durch den Anfangspunkt des Coordinatensystemes gehende gerade Linie, der sich unsere Curve asymptotisch nähern muss. Nehmen wir andererseits an, dass für die Länge, bei welcher die Ausflussmenge ihr Maximum erreicht, wieder das Navier'sche Gesetz gilt, so haben wir auch für kleine Längen einen Punkt der Curve bestimmt. Die genannten beiden Angaben sind freilich noch nicht ausreichend, die Curve festzulegen; wir müssen uns jetzt an das Experiment halten. Nehmen wir zunächst an, dass die Curve eine Hyperbel sei, welche den durch das Navier'sche Gesetz bestimmten Punkt zum Scheitelpunkt und jene gerade Linie zur Asymptote hat, so lassen sich die folgenden Beziehungen aufstellen (vgl. Fig. 1). Es sei:

$FJ = T$ die wirkliche Zeit,

$HF = P$ die nach dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetze berechnete Transpirationszeit,

$ED = N/a$ die nach Navier's Gesetz berechnete Effusionszeit,

$AF = l$ die Länge der Röhre,

$AD = l_1$ die Röhrenlänge für den Maximalausfluss,

$CD = t$,

dann ist:
$$\frac{(T-t)^2}{\left(\frac{N}{a} - t^2\right)} - \frac{(l-l_1)^2}{EK^2} = 1,$$

$$(T-t)^2 - (P-t)^2 = \left(\frac{N}{a} - t\right)^2,$$

$$T = t + \sqrt{(P-t)^2 + \left(\frac{N}{a} - t\right)^2}$$

$$(II_a) \quad \left\{ T = \frac{Pl_1}{l} + \sqrt{\frac{P^2(l-l_1)^2}{l^2} + \left(\frac{N}{a} - \frac{Gl_1}{l}\right)^2}, \right.$$

oder, wenn l gegen l_1 sehr gross ist:

$$(II_b) \quad T = \sqrt{P^2 + \frac{N^2}{a^2}},$$

Wir haben noch zu zeigen, wie die Grössen P , N und a sich ausdrücken. Was zunächst a anbelangt, so ist diese Grösse der Ausflusscoefficient des Navier'schen Gesetzes,

für den wir die Zahl Eins angenommen haben, den wir zur Sicherheit aber doch noch einführen wollen. Lassen wir die Luft aus der Atmosphäre in einen leergepumpten Ballon strömen, so ist p_1 constant, p_2 variabel und¹⁾:

$$P = \frac{8\eta l W_2}{p_1 \pi R^4 g \varrho} \cdot 2,3026 \log \left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{p_1 - P_2}{p_1 + P_2} \right).$$

Hierin ist W_2 das Volumen des Ballons, P der Werth von p_2 zu Anfang des Versuches, 2,3026 der reciproke Werth des Modulus des decadischen Logarithmensystemes, die übrigen Grössen sind schon erwähnt.²⁾ Das Navier'sche Gesetz für constante Strömung gibt³⁾:

$$vp = \frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1 + p_2}},$$

wenn man die Holtzmann'sche Annahme⁴⁾ über den Druck in der Effusionsöffnung einführt. Ist v_2 das in der Zeit t durchfliessende Volumen, gemessen unter dem Druck im Ballon, so ist:

$$v_2 p_2 = t \frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1 + p_2}},$$

$$p_2 dv_2 = \frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1 + p_2}} dt.$$

Nun besteht aber nach dem Mariotte'schen Gesetz die Gleichung:

$$(W_2 + dv_2) p_2 = W_2 (p_2 + dp_2), \quad p_2 dv_2 = W_2 dp_2,$$

also ist:

$$W_2 dp_2 = \frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1 + p_2}} dt,$$

$$\frac{W_2 dp_2}{\frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1 + p_2}}} = dt.$$

Durch Integration folgt:

$$t = \frac{4 W_2}{R^2 \pi \sqrt{C} \cdot 0,43429} \left[\sqrt{\log \frac{2p_1}{p_1 + P_2}} - \sqrt{\log \frac{2p_1}{p_1 + p_2}} \right].$$

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 274. 1866.

2) Diese Abhandlung p. 474.

3) Navier, l. c. p. 4.

4) Holtzmann, Pogg. Ann. 137. p. 466. 1861; Segnitz, Pogg. Ann. 111. p. 474. 1860.

Hierin ist 0,43429 der Modulus des Briggs'schen Logarithmensystemes. Die so berechnete Transpirationszeit t bedeutet aber die obige Grösse N , sodass man setzen kann:

$$N = \frac{4W_2}{R_2\pi\sqrt{C \cdot 0,43429}} \left[\sqrt{\log \frac{2p_1}{p_1 + p_2}} - \sqrt{\log \frac{2p_2}{p_1 + p_2}} \right].$$

Durch Versuche, welche später in ihren Einzelheiten mitgetheilt werden sollen, ergab sich, dass die oben erwähnte Curve zwar angenähert, aber doch nicht genau eine Hyperbel ist, sondern eine weniger gekrümmte Verbindungslinie der beiden Grenzpunkte darstellt. Den Versuchen konnte relativ am besten genügt werden, wenn man setzte:

$$(III) \quad T = \sqrt{P^2 + \frac{N^2}{a^2 b^2}},$$

worin $b = (l + 4) / (2l + 4)$ und a aus der folgenden kleinen Tabelle zu entnehmen ist:

a	0,9338	0,9637	1,0000	1,0000	0,9585
Mittlere Druckdiff.	50,0	41,5	31,0	21,0	11,5.

Wenn es also gestattet ist, aus unseren Versuchen rückwärts auf das Gesetz für den Maximalausfluss zu schliessen, so müssen wir annehmen, dass nach diesem sich die Transpirationszeit durch die Gleichung:

$$t = \frac{N}{ab}$$

ausdrückt, worin die Grössen N , a und b die angegebenen Werthe haben.

Man kann jetzt versuchen, die gewonnene Formel auch auf constante Strömung zu übertragen. Sie nimmt dann die Form an:

$$(IV) \quad \frac{1}{(vp)} = \sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{(N_1 ab)^2}},$$

$$(vp) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{(N_1 ab)^2}}},$$

worin vp , a und b die schon erwähnten Bedeutungen haben, und

$$P_1 = \frac{R^4 \pi g \varrho (p_1^2 - p_2^2)}{16 \eta l},$$

$$N_1 = \frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{\frac{C}{0,43429} \log \frac{2p_1}{p_1 + p_2}} \text{ ist.}$$

Was die Versuche selbst anbetrifft, so wendete ich drei verschiedene Beobachtungsmethoden an.

§ 2. Beobachtungsmethoden.

1. Beobachtungsmethode, Messung der überströmenden Luft durch Flüssigkeit. — Am einen Ende der Capillare stand die Luft unter dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, während am anderen Ende eine Wasserluftpumpe wirkte. Der benutzte Apparat soll durch Fig. 2 veranschaulicht werden. Den dort gegebenen Anmerkungen mögen nur noch wenige Worte zur Erklärung hinzugefügt werden. Der Druckregulator¹⁾ am Ballon II wirkt in der bekannten Weise, dass bei zu heftiger Wirkung der Wasserluftpumpe aus der Atmosphäre durch das für jeden Druck einstellbare Rohr *H* und durch das Quecksilber Luft in den Ballon eintritt. Zwischen dem Ballon I und dem *T*-Rohr *L* befindet sich ein Gummischlauch *FG*, an welchem bei *K* eine leicht und schnell wirkende Klemme sitzt. Alles Uebrige dürfte aus der Figur ersichtlich sein. Der Versuch selbst wurde so angestellt: Zunächst wurden die Hähne *A*, *C*, *D* geschlossen, *B* und die Klemme *K* geöffnet, die Wasserluftpumpe wurde in Thätigkeit gesetzt, der Druckregulator, ebenso *L* durch Heben und Senken eingestellt, bis die gewünschten Drucke erreicht waren. Dann wurde der Hahn *B* geschlossen, dafür aber *D* etwas geöffnet, damit für Ballon II keine Aenderung eintrat. Die Klemme *K* wurde geschlossen, die Hähne *A* und *C* geöffnet und durch *A* ein Strom getrockneter und kohlenstofffreier Luft gepresst. Die Folge davon war, dass alle Flüssigkeit durch *C* austrat, welche sich über dem Ende des Rohres genau bis zu diesem heran befand. Wenn dieses erreicht war, wurde *C* geschlossen und durch *A* im Ballon ein Druck erzeugt, der höher war als der gewünschte; dann wurde auch *A* geschlossen. Jetzt wurde gleichzeitig *D* geschlossen und *B* geöffnet. Manometer I fiel natürlich, und sobald der gewünschte und vorher eingestellte Druck erreicht war, wurde die Klemme *K* geöffnet und die Zeit abgelesen. Zum Schlusse des Versuches wurde die Klemme geschlossen und wieder

1) Loth. Meyer, Wied. Ann. 7. p. 506. 1879.

die Zeit abgelesen. Die eingeströmte Flüssigkeit, die ja zugleich das Volumen der ausgeströmten Luft, gemessen unter dem Drucke im Ballon I angab, wurde in der beschriebenen Weise durch *C* in ein Maassgefäß gebracht. — Was die angewendete Flüssigkeit anbetrifft, so musste eine solche gewählt werden, welche weder Wasser anzog, noch abgab, welche überhaupt keinen Dampfdruck duldete. Dieses leistet eine Mischung von Schwefelsäure mit Wasser, nach Fr. Rüdorff vom specifischen Gewichte 1,300.¹⁾

In den nachfolgenden Versuchen bedeutet von den neu eingeführten Grössen ϑ_1 und ϑ_2 die Temperatur im ersten und zweiten Ballon, *A* die Ausflussmenge der Luft, gemessen unter dem Druck im Ballon 1 und bezogen auf eine Zeitsecunde.

1.				2.			
<i>A</i> = 2,735 ccm.				<i>A</i> = 2,739 ccm.			
<i>R</i> = 0,031 459 3 cm. <i>l</i> = 69,6808 cm.				<i>R</i> = 0,031 459 3 cm. <i>l</i> = 60,6808 cm.			
<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	ϑ_1	ϑ_2	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	ϑ_1	ϑ_2
78,96	71,61	20,0°	19,4°	78,94	71,51	20,2°	20,2°
78,97	71,60	20,0	19,4	78,95	71,54	20,3	19,8
78,90	71,59	19,9	19,8	78,95	71,55	20,3	19,7
78,91	71,58	19,9	19,7	78,94	71,52	20,3	19,8
78,90	71,58	19,9	19,7	78,94	71,53	20,3	19,7
				78,94	71,53	20,2	19,7

3.				4.			
<i>A</i> = 2,743 ccm.				<i>A</i> = 3,940 ccm.			
<i>R</i> = 0,031 459 3 cm. <i>l</i> = 69,6808 cm.				<i>R</i> = 0,031 459 3 cm. <i>l</i> = 69,6808 cm.			
<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	ϑ_1	ϑ_2	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	ϑ_1	ϑ_2
78,92	71,51	19,6°	19,2°	82,89	71,84	20,6°	20,9°
78,93	71,53	19,7	19,1	82,87	71,83	20,6	20,8
78,92	71,55	19,7	19,2	82,85	71,83	20,6	20,9
78,94	71,56	19,6	19,0	82,84	71,84	20,6	20,8
78,92	71,56	19,6	19,0	82,84	71,83	20,6	20,9
78,94	71,56	19,6	19,0				

5.			
<i>A</i> = 3,915 ccm.		<i>R</i> = 0,031 459 3 cm. <i>l</i> = 69,6808 cm.	
<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	ϑ_1	ϑ_2
82,92	71,92	20,2°	20,2°
82,87	71,93	20,2	20,3
82,86	71,91	20,3	20,4
82,86	71,91	20,3	20,5
82,86	71,93	20,3	20,5

1) Rüdorff, Berl. Ber. 13. p. 150. 1880. Vgl. Regnault, Compt. rend. 20. p. 1127. 1845.

Nach dieser Beobachtungsmethode konnten leider nur diese fünf Versuche angestellt werden. Die angewendete Schwefelsäure erwies sich doch noch als concentrirt genug, um Haut und Kleidungsstücke recht unangenehm anzugreifen. Die übrigen bekannten derartigen Stoffe theilten diese Eigenschaft der Schwefelsäure. Einige Versuche, bei denen die Schwefelsäure durch Wasser ersetzt und die Luft vor dem Eintritt in die Capillare wieder getrocknet wurde, ergaben schlecht befriedigende Resultate; auch konnte man dabei, besonders bei einigermassen schneller Strömung nicht sicher sein, dass die strömende Luft wirklich trocken war.

Ehe wir an die Berechnung der Versuche herangehen, wird es nöthig sein, über den Ursprung der benutzten constanten Zahlen zu berichten. Die nachfolgenden Bemerkungen behalten auch für die beiden anderen Beobachtungsmethoden ihre Gültigkeit.

Das specifische Gewicht des Quecksilbers wurde aus den Angaben Regnault's entnommen¹⁾, als beschleunigende Kraft der Schwere wurde für den Beobachtungsort Breslau die Zahl 981,2 angenommen.²⁾ Das specifische Gewicht³⁾ der Luft bei 0° und 760 mm Barometerstand, bezogen auf Wasser bei 4° C. wurde zu 0,001 292 77, der Ausdehnungscoëfficient der Luft nach Regnault und Magnus zu 0,003 665 angesetzt.⁴⁾ Als Reibungsconstante der Luft bei 0° wurde der Mittelwerth⁵⁾ 0,000 175 verwendet. Um diese Constante für eine andere Temperatur umzurechnen, wurde die Formel von Puluj⁶⁾ benutzt:

$$\eta = \eta_0 (1 + 0,003\,665\,9) ^{0,72196}.$$

Der Radius der Capillaren wurde in der bekannten Weise mittelst Quecksilber gemessen und, da ein Fehler im

1) Regnault, Mém. de l'Acad. de Paris. 21. p. 162 u. 328. 1847.

2) Beling, Zur Theorie der Bifilaraufhängung (Inaug.-Diss.) Bresl. 1881. p. 51. u. 53.

3) Regnault, Mém. de l'Acad. de Paris. 21. p. 158. 1847.

4) Regnault, Mém. de l'Inst. 21. p. 3. 1847 und Magnus Pogg. Ann. 55. p. 1, 57, 177. 1842.

5) O. E. Meyer, Kinet. Theorie d. Gase. p. 140.

6) Puluj, Carl's Repert. 13. p. 293—330. 1877.

Radius einen erheblichen Einfluss auf das Resultat hat, auf diese Messung sehr grosse Sorgfalt verwendet.

Selbstverständlich ist es, dass sämtliche benutzte Instrumente mit Normalinstrumenten verglichen wurden.

In den angeführten Tabellen ist unter *Pois.* die Poiseuille-Meyer'sche Formel, unter den übrigen Zeichen die betreffende Formel der vorliegenden Abhandlung zu verstehen. Berechnet wurde nach diesen Formeln jedesmal die Grösse (νp).

	Pois.	Formel I	Formel IV	Beobachtet
1.	219,64	216,75	214,82	215,88
2.	221,94	219,57	217,01	216,18
3.	221,47	219,13	216,56	216,50
4.	339,02	330,21	327,63	326,44
5.	337,38	331,98	326,06	324,42

2. Beobachtungsmethode, Messung der überströmenden Luft durch eine lange Capillare. — Das Princip dieser Methode bestand darin, dass dieselbe Masse Luft zuerst durch eine lange Capillare gepresst wurde und dann durch die zu prüfende Capillare. Von der langen Capillare hatte ich mich vorher überzeugt, dass sie dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetze genügte. Um nicht genöthigt zu sein, (vgl. Fig. 3) im Ballon II und III denselben Druck zu haben, wurde zwischen beiden ein Druckregulator eingeschaltet, der sich durch Zugiessen und Ablassen des Quecksilbers einstellen liess. Die getrocknete und kohlenstofffreie Luft trat bei *A* in den Apparat und verfolgte den durch Pfeile bezeichneten Weg.

Um der gehörigen Einstellung der vier Manometer sicher zu sein, wurde vom Beginn des Versuches bis zur ersten verwendeten Ablesung mindestens 45 bis 60 Minuten gewartet und zwischen je zwei Ablesungen ebenfalls ein grösserer Zeitraum gelassen. Die Dimensionen der verwendeten Capillaren waren:

Maasscapillare $R = 0,026\ 657$ cm. $l = 154,0938$ cm.

Capillare $R = 0,026\ 343$ cm. l variabel.

Es bedeutet ϑ_1 und ϑ_2 die Temperatur im Ballon I und II, ϑ_3 die Temperatur der äusseren Luft.

Maasscapillare				1.	Capillare			
p_1	p_2	ϑ_1	ϑ_2		l	p_3	p_4	ϑ_3
72,23	28,09	18,2	18,1		5,943	27,33	23,09	18,1
				2.				
73,78	47,27	21,6	21,3		5,943	46,81	45,20	21,6
				3.				
72,78	60,75	22,7	22,4		5,943	60,44	59,86	22,6
				4.				
71,70	30,48	23,7	23,3		11,42	29,80	23,30	23,7
				5.				
72,51	43,59	24,0	23,6		11,42	43,06	39,79	23,8
				6.				
73,39	61,03	23,1	22,7		11,42	60,69	59,57	22,9
				7.				
72,53	36,84	32,3	22,7		22,95	36,26	26,42	22,9
				8.				
72,51	59,92	23,3	22,8		22,95	59,60	57,39	23,0
				9.				
72,30	66,32	22,8	22,1		22,95	66,07	65,06	22,3
				10.				
72,12	88,10	22,8	22,5		35,92	37,53	22,05	22,5
				11.				
72,04	48,74	23,1	22,9		35,92	48,33	40,56	22,9
				12.				
73,42	69,09	22,8	22,8		35,92	68,85	67,74	22,8
				13.				
72,72	46,66	22,3	22,1		51,23	46,22	32,38	22,1
				14.				
72,73	58,32	21,4	21,4		51,23	57,99	52,00	21,3
				15.				
72,77	67,44	21,2	21,0		51,23	67,18	65,21	21,0
				16.				
73,46	49,86	21,9	21,8		65,12	49,44	33,72	22,0
				17.				
73,53	68,15	20,9	20,6		65,12	67,88	65,34	20,9
				18.				
72,98	52,22	20,4	20,3		65,12	51,84	39,06	20,5
				19.				
71,82	58,61	20,1	20,0		80,04	58,31	49,67	20,0

Es bleibt noch zu zeigen, dass die als Maasscapillare benutzte Röhre wirklich dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetze genüge. Zu diesem Zwecke wurden zwei Versuche

mit constantem p_1 und variablem p_2 angestellt; setzen wir für den Augenblick:

$$\frac{\log \left(\frac{p_1 + p_2 \frac{p_1 - P_2}{P_1}}{p_1 \frac{p_1 - p_2 \frac{p_1 - P_2}{P_1} + P_2}{P_1}} \right)}{p_1 t} = \frac{1}{C} \quad 1),$$

so ergeben sich die Versuche, wenn man immer p_1/C aus je zwei benachbarten Versuchen berechnet, folgendermassen.

Temperatur 18,6°					Temperatur 18,3°				
		Zeit		$10^6 \frac{p_1}{C}$			Zeit		$10^6 \frac{p_1}{C}$
p_1	p_2	Min.	Sec.		p_1	p_2	Min.	Sec.	
75,36	14,93	0	0,0	—	75,37	14,93	0	0,0	—
6	24,69	2	0,0	1009	7	24,70	2	0,5	1006
6	34,45	4	12,0	10	7	34,46	4	12,5	10
5	44,27	6	47,0	9	8	44,30	6	47,5	11
5	54,21	10	7,5	8	8	54,24	10	8,0	8
5	64,35	15	24,0	00	8	64,38	15	25,5	997

Ausser den angeführten Versuchen wurde nach der zweiten Beobachtungsmethode noch eine andere Reihe von Versuchen angestellt. Bei denselben war nämlich die Maass-capillare durch eine kurze Capillare ersetzt worden, welche dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz nicht mehr genügt. Da auf diese Weise keine absolute Messung, sondern nur eine Vergleichung des Volumens der durchgeströmten Luft möglich war, so sollen diese Versuche²⁾ als weniger wichtig hier nicht mitgeteilt werden.

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der Versuchsreihe der zweiten Beobachtungsmethode, also der Versuche 1 bis 19 auf p. 484.

	Poiseuille	Formel I	Formel IV	Beobachtet
1.	246,74	218,63	207,35	206,67
2.	169,45	155,45	150,29	148,44
3.	79,60	76,31	75,09	74,14
4.	204,31	193,28	185,77	198,75
5.	159,32	153,33	149,54	154,36
6.	79,88	78,03	76,98	76,57
7.	181,97	177,38	172,94	179,85
8.	76,28	74,42	74,72	76,65
9.	39,14	38,90	38,72	38,26

1) Vgl. O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 274. 1866.

2) Siehe P. Hoffmann, Inaug.-Diss., Beitr. zu dem Thema: Ueber d. Ström. d. Luft durch Capill. von belieb. Länge. Bresl. 1883. p. 20.

	Poiseuille	Formel I	Formel IV	Beobachtet
10.	174,04	171,27	168,54	172,95
11.	130,17	128,60	127,03	129,66
12.	28,60	28,52	28,45	28,45
13.	144,08	142,74	141,16	143,64
14.	87,45	86,97	86,41	87,33
15.	34,65	34,55	34,28	34,61
16.	136,32	135,36	134,37	134,77
17.	35,39	35,33	35,25	35,26
18.	121,62	120,86	120,10	120,26
19.	81,24	80,83	80,64	80,02

3. Beobachtungsmethode, variable Strömung. — Die Luft strömte, von Wasser und Kohlensäure befreit, durch die Capillare in einen luftleer gepumpten Ballon. Der Inhalt des Ballons betrug nach mehrfacher Messung $W_2 = 10950$ ccm. Der zum Ballon führende Hahn hatte eine Bohrung von 1,3 cm Länge und 0,15 cm Radius. Durch den Hahn allein füllte sich der Ballon, vorher luftleer wie bei den Versuchen, in acht Secunden. Bei der für diese Versuche benutzten Capillare wurde der mittlere Radius für jede Länge besonders bestimmt.

Bei jedem Versuch ist die Reibungsconstante der Luft berechnet, wie sie sich aus dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz¹⁾ ergibt:

$$\eta = \frac{p_1 \pi g \varrho R^4}{8 W_2 l} \frac{0,43429 t}{\log \left(\frac{p_1 + P_2}{p_1 - P_2} \frac{p_1 - P_2}{p_1 + P_2} \right)},$$

und zwar nach der Formel von Puluj²⁾ auf 0° reducirt. Der Werth von η_0 ist immer aus zwei benachbarten Beobachtungen hergeleitet. ϑ_1 bedeutet die Temperatur der Luft in der Atmosphäre, ϑ_2 die der Luft im Ballon. Für jede Länge der Röhre sind drei Versuche angestellt worden, die jedoch eine so gute Uebereinstimmung zeigten, dass die Mittheilung je eines derselben genügend erschien.

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 274. 1866.

2) Puluj, l. c. vgl. diese Abhdl. p. 482.

1.

$$l = 1,3283. \quad R = 0,023 \ 813.$$

p_1	p_2	h	m	$sec.$	ϑ_1	ϑ_2	η
75,13	20,28	2	15	16,25	15,7°	15,2°	
3	29,84	—	16	15,00	7	8	0,001 706
3	39,46	—	17	15,25	7	16,0	1 538
3	49,08	—	18	19,50	7	3	1 356
3	58,66	—	19	31,75	7	3	1 130
3	68,32	—	21	10,00	7	4	0 859

2.

$$l = 1,8442. \quad R = 0,023 \ 813.$$

74,92	20,07	2	18	48,00	16,0°	15,6°	
2	29,63	—	19	50,50	0	16,0	0,001 301
2	39,25	—	20	54,50	0	3	1 171
2	48,87	—	22	53,25	1	5	1 040
2	58,45	—	23	21,00	1	6	0 872
2	68,11	—	25	26,00	1	6	0 659

3.

$$l = 3,3425. \quad R = 0,023 \ 813.$$

74,88	20,03	12	40	49,75	15,6°	15,5°	
8	29,59	—	41	59,75	6	8	0,000 804
8	39,21	—	43	11,75	6	16,1	727
8	48,84	—	44	29,25	7	2	647
8	58,42	—	45	57,00	7	4	544
8	68,08	—	47	57,50	7	3	417

4.

$$l = 5,738. \quad R = 0,023 \ 813.$$

74,36	19,50	12	52	24,25	15,0°	14,6°	
6	29,02	—	53	46,25	14,9	15,0	0,000 546
6	38,66	—	55	11,75	9	4	499
6	48,28	—	56	43,50	9	5	444
7	57,88	—	58	28,00	9	6	374
7	67,55	1	0	54,50	8	5	294

5.

$$l = 10,341. \quad R = 0,023 \ 813.$$

73,80	18,94	2	7	16,25	14,9°	14,9°	
0	28,46	—	8	53,50	9	15,0	0,000 355
0	38,10	—	10	35,50	9	6	327
0	47,72	—	12	26,00	9	6	294
0	57,31	—	14	37,00	9	6	258
0	66,98	—	17	57,00	15,0	6	221

6.

$$l = 15,795. \quad R = 0,023 \ 813.$$

73,38	18,51	2	29	36,25	14,1°	13,4°	
9	28,04	—	31	31,00	1	8	0,000 273
9	37,68	—	33	31,50	0	9	251
9	47,31	—	35	46,00	0	14,0	233
9	56,90	—	38	32,50	0	1	214
40	66,58	—	43	5,50	0	13,9	197

7.

 $l = 21,061. \quad R = 0,023 \ 820.$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
73,39	18,52	11	47	4,0	14,2°	13,4°	
9	28,04	—	49	16,0	2	8	0,000 236
9	37,68	—	51	38,0	1	9	223
9	47,31	—	54	19,0	2	14,1	209
9	56,90	—	57	48,0	0	1	197
9	66,57	12	3	25,0	0	0	185

8.

 $l = 26,820. \quad R = 0,023 \ 818.$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
73,79	18,90	12	56	19,5	13,3°	12,9°	
9	28,43	—	58	58,0	4	13,5	0,000 217
8	38,05	1	1	39,5	5	6	207
7	47,65	—	4	52,0	5	8	199
6	57,25	—	8	58,0	6	9	188
5	66,92	—	16	0,0	7	8	181

9.

 $l = 32,676. \quad R = 0,023 \ 808.$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
74,72	19,86	1	22	16,5	15,1°	14,3°	
2	29,38	—	25	9,0	2	6	0,000 203
1	39,01	—	28	17,5	2	9	194
1	48,63	—	31	58,5	0	15,2	189
1	58,22	—	36	47,0	0	1	182
69	67,87	—	45	9,5	0	0	178

10.

 $l = 37,905. \quad R = 0,023 \ 795.$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
75,11	20,25	2	7	49,5	15,4°	14,9°	
2	29,78	—	11	2,0	4	15,4	0,000 196
2	39,42	—	14	34,0	4	6	189
2	49,04	—	18	44,5	4	8	185
2	58,63	—	24	13,0	4	7	180
3	68,31	—	33	50,0	4	5	176

11.

 $l = 42,981. \quad R = 0,023 \ 788.$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
74,90	20,05	1	50	3,0	15,7°	15,3°	
0	29,61	—	53	36,0	8	9	0,000 189
0	39,23	—	57	33,0	8	16,1	185
0	48,85	2	2	13,0	8	2	181
0	58,43	—	8	22,0	8	1	177
0	68,09	—	19	15,0	8	0	175

12.

 $l = 54,110. \quad R = 0,023 \ 785.$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
73,81	18,96	2	20	42,0	16,2°	16,2°	
1	28,52	—	25	2,0	2	5	0,000 179
0	38,13	—	29	51,5	3	8	176
0	47,75	—	35	37,5	3	8	174
0	57,33	—	43	15,0	2	6	171
79	66,98	—	56	50,0	2	4	171

13.

$l = 58,385. \quad R = 0,053\ 793.$

p_1	p_2	h	$m.$	$sec.$	ϑ_1	ϑ_2	η
74,08	19,24	1	57	3,0	15,8°	15,2°	
8	28,75	2	1	41,0	8	5	0,000 180
8	38,40	—	6	52,5	8	8	176
8	48,02	—	13	2,5	9	8	174
8	57,80	—	21	16,0	8	8	173
7	67,26	—	35	54,0	8	5	171

14.

$l = 62,184. \quad R = 0,023\ 804.$

73,75	18,91	12	28	15,0	15,8°	14,8°	
6	28,43	—	33	14,0	9	9	0,000 181
6	38,07	—	38	48,0	9	15,2	177
6	47,70	—	45	28,5	9	3	176
7	57,29	—	54	20,0	8	4	173
7	66,95	1	10	9,0	9	3	174

15.

$l = 65,320. \quad R = 0,023\ 816.$

73,45	18,59	12	33	31,0	14,7°	13,8°	
5	28,11	—	38	45,0	7	14,3	0,000 181
5	37,75	—	44	35,5	6	4	177
5	47,37	—	51	34,0	7	5	175
5	56,96	1	0	52,0	7	5	173
5	66,63	—	17	25,0	9	4	173

16.

$l = 68,339. \quad R = 0,023\ 822.$

74,21	19,34	11	56	36,0	14,3°	13,5°	
20	28,85	12	1	57,0	1	14,1	0,000 180
20	38,49	—	7	56,0	2	4	176
18	48,10	—	15	7,0	3	5	175
17	57,68	—	24	42,0	4	5	173
15	67,33	—	41	45,0	5	5	173

17.

$l = 71,245. \quad R = 0,023\ 826.$

74,02	19,17	12	10	57,0	15,3°	14,9°	
3	28,70	—	16	35,0	4	15,4	0,000 180
2	38,33	—	22	52,0	3	8	176
3	47,96	—	30	23,5	3	8	175
3	57,54	—	40	27,0	3	8	174
2	67,20	—	58	19,0	4	7	173

18.

$l = 74,639. \quad R = 0,023\ 835.$

74,63	19,74	1	13	54,5	13,1°	13,0°	—
4	29,28	—	19	36,5	12,9	3	0,000 177
3	38,90	—	26	2,0	8	5	176
2	48,50	—	33	40,0	13,0	5	173
1	58,10	—	43	59,0	1	4	173
1	67,78	2	2	13,0	2	5	171

19.

$$l = 81,823. \quad R = 0,023 \, 846.$$

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η
74,28	19,39	11	39	13,5	13,1°	12,8°	—
8	28,92	—	45	24,5	0	13,3	0,000 175
9	38,56	—	52	22,0	0	5	173
30	48,18	12	0	44,0	1	5	172
3	57,82	—	11	54,5	2	5	170
6	67,53	—	31	47,0	3	4	169

20.

$$l = 86,050. \quad R = 0,023 \, 851.$$

73,86	19,00	1	19	56,0	15,0°	14,9°	—
	28,53	—	26	29,0	14,7	15,1	0,000 174
7	38,17	—	33	55,0	9	2	173
7	47,79	—	42	47,5	9	2	172
6	57,37	—	54	40,0	7	1	170
5	67,03	2	15	47,0	7	14,9	170

In der jetzt folgenden Berechnung der soeben angeführten Versuche ist als Reibungsconstante bei 0° der Werth 0,000 168 benutzt, weil diese Zahl ungefähr als Grenzwert aus den Versuchen selbst hervorgeht. Die Tabellen enthalten die Transpirationszeiten, in Secunden angegeben, wie sie direct beobachtet wurden, und ausserdem, wie sie aus dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz aus unserer Formel (III) (p. 479) folgen.

1.			2.			3.		
Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.
5,79	60,91	58,75	8,10	64,51	62,50	14,63	72,36	70,00
6,58	61,71	60,25	9,18	65,36	64,00	16,63	73,56	72,00
7,96	64,09	64,25	11,10	67,97	68,75	20,14	77,00	77,50
10,74	72,96	72,25	14,97	77,56	77,75	27,12	88,51	87,75
19,21	100,59	98,25	26,77	107,47	105,00	48,50	124,31	120,50
4.			5.			6.		
23,99	81,23	78,00	45,97	96,30	97,25	70,72	112,27	114,75
28,82	84,02	85,50	52,47	100,73	102,00	80,58	121,11	120,50
34,74	88,64	91,75	63,21	108,79	110,50	97,09	134,74	134,50
46,92	103,87	104,50	85,20	132,09	131,00	123,28	166,31	166,50
83,70	151,70	146,50	152,13	205,13	200,00	233,30	274,54	273,00
7.			8.			9.		
94,12	131,02	132,00	118,74	150,41	153,50	142,77	169,85	172,50
107,24	141,65	142,00	135,26	164,42	166,50	163,13	188,04	188,50
129,34	160,84	161,00	162,73	195,49	192,50	196,93	219,38	221,00
174,06	205,02	204,00	220,01	245,90	246,00	265,70	287,56	288,50
310,16	343,64	342,00	392,37	420,02	422,00	473,78	496,93	502,50

10.			11.			12.		
Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.
164,92	188,97	192,50	188,89	210,64	213,00	243,55	261,47	260,00
188,51	210,56	212,00	214,80	234,59	237,00	276,73	292,90	289,50
227,55	247,36	250,50	259,75	277,51	280,00	331,87	346,44	346,00
307,23	326,40	328,50	350,33	367,45	369,00	449,49	463,41	457,50
549,73	570,06	577,00	626,39	644,48	653,00	801,31	815,95	815,00
13.			14.			15.		
259,30	276,06	278,00	277,88	293,81	299,00	292,15	307,53	314,00
296,81	312,09	311,50	317,88	332,34	334,00	333,24	347,23	350,50
357,44	371,05	370,00	382,49	395,40	400,50	401,20	413,64	418,50
480,40	493,48	493,50	514,85	527,24	531,50	540,58	552,51	558,00
860,52	874,24	878,00	918,14	931,14	949,00	964,99	977,51	993,00
16.			17.			18.		
299,95	314,66	321,00	315,23	329,38	338,00	323,99	337,74	342,00
342,87	358,25	359,00	359,26	372,09	377,00	368,80	381,24	385,50
413,11	425,01	431,00	433,83	445,26	451,50	444,85	455,92	458,00
557,27	568,68	575,00	583,73	594,67	603,50	602,07	612,71	619,00
994,87	1006,83	1023,00	1042,76	1054,24	1072,00	1075,66	1086,84	1094,00
19.			20.					
Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.			
355,96	368,65	371,00	379,94	391,93	393,00			
406,14	417,65	417,50	433,21	444,07	446,00			
489,19	499,42	502,00	518,85	528,56	532,50			
663,40	673,25	670,50	703,00	712,23	712,50			
1183,30	1193,67	1192,50	1254,30	1263,96	1267,00			

Um unsere Formel auch auf frühere Versuche anzuwenden, mögen z. B. einige nach der dritten Beobachtungsmethode angestellte Versuche¹⁾ von Graham berechnet werden. Berechnet man dieselben nach der Poiseuille-Meyer'schen Formel, so erhält man nach Hrn. Prof. O. E. Meyer²⁾ folgende Tabelle:

$$2R = 0,00539 \text{ engl. Zoll.}$$

$$l = 1 \text{ Zoll} \quad l = 2 \text{ Zoll} \quad l = 4 \text{ Zoll.}$$

Luft	$\eta = 0,000 \ 206$	$\eta = 0,000 \ 177$	$\eta = 0,000 \ 178$
Sauerstoff	$0,000 \ 216$	$0,000 \ 197$	$0,000 \ 199$

Für $l = 1$ Zoll genügt die Röhre dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz nicht mehr; unsere Formel III liefert die Zahlen:

$$0,000 \ 177, \quad 0,000 \ 197,$$

also ein hinreichend befriedigendes Resultat.

1) Graham, Phil. Trans. 1846. Tab. 14, 15, 16.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 365. 1866.

§ 3. Kurze Betrachtung der Resultate.

Besonders bei den Versuchen mit constanter Strömung¹⁾ scheint sich in unseren Zahlenreihen für mittlere Längen der Röhre ein deutliches Minimum geltend zu machen. In meiner Inauguraldissertation habe ich gezeigt, dass diese Abweichung durch Beobachtungsfehler zu erklären ist. Um den Einfluss derselben anschaulich zu machen, mag hier das folgende Beispiel dienen. Bei dem Versuche 5 auf p. 481 strömten in 1012,0 Secunden 3961,8 ccm über, woraus die Zahl 3,915 erhalten wurde; nehmen wir an, dass in 1011,0 Secunden 3977,9 ccm überströmten, so geht die bezügliche auf p. 483 verzeichnete Zahl 324,42 in 326,06 über.

So haben wir gezeigt, dass unsere Formel im allgemeinen das richtige Resultat innerhalb der Beobachtungsfehler liefert, doch soll nicht geleugnet werden, dass das erwähnte Minimum immerhin auffällig bleibt.

§ 4. Bemerkungen über die Strömung des Wassers durch Röhren und Schluss.

Unsere in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Ansichten werden noch dadurch unterstützt, dass für die Strömung des Wassers durch Röhren ähnliche Resultate gefunden sind. Beginnen wir mit Jacobson's Versuchen.²⁾ Jacobson hat nachgewiesen, „dass an der Einflussöffnung der Druck plötzlich sinkt“, und wenn auch gegen seine numerische Bestimmung des neuen Druckes einiges Bedenken möglich ist, so ist doch das nachgewiesen, was auch wir aus unseren Versuchen über Luft entgegen der Guthrie'schen Ansicht behaupten mussten.

Unsere empirische Formel für die Strömung der Luft findet sich im wesentlichen bei der Strömung des Wassers wieder. Die für diese von Hrn. Prof. O. E. Meyer hergeleitete Formel³⁾:

$$t = \alpha + \beta \lambda - \gamma \lambda^2,$$

1) vgl. P. Hoffmann l. c. p. 31.

2) Jacobson, Müller's Arch. f. Anat. u. Physiol. 1860. 1861. p. 304.

3) O. E. Müller, Pogg. Ann. Jubelband p. 1. 1874.

worin t die Transpirationszeit, λ die Röhrenlänge und α, β, γ , constante Zahlen sind, liefert bei ihrer graphischen Darstellung „schräg ansteigende, fast geradlinige Curven“. Auch unsere Formel ergibt ja solche Curven, dabei zeigt sich aber ein allerdings wegen der Kleinheit der betreffenden Glieder sehr unwesentlicher Unterschied. Es ist nämlich:

$$\frac{d^2 t}{d \lambda^2} = -2\gamma,$$

also eine negative Grösse, mithin ist jene Curve nach unten concav, während unsere Curve nach unten convex ist; denn schreiben wir unsere Formel kurz für den Augenblick:

$$t = \sqrt{m^2 + n^2 l^2},$$

so ist:

$$\frac{d^2 t}{d l^2} = \frac{n^2}{l^2} \left(1 - \frac{n^2 l^2}{t^2} \right),$$

also da $t^2 > n^2 l^2$ ist, $d^2 t / d l^2$ eine positive Grösse. — Es mag schliesslich noch für unseren Zweck eine Arbeit von Houba¹⁾ erwähnt werden. Houba ist auch der Ansicht²⁾, dass ein Hauptgewicht auf die Vorgänge am Anfang und Ende der Röhre zu legen sei; am Anfang der Röhre wendet er das Toricelli'sche Gesetz, in der Mitte das Poiseuille'sche, aber nicht unter Verwendung der ganzen Röhrenlänge an; die Vorgänge am Ende vernachlässigt er dann, führt aber im Toricelli'schen Gesetz den Ausflusscoefficienten ein. Wenn auch zugegeben werden muss, dass diese Anschauung der Wirklichkeit ziemlich nahe kommen mag, so bleibt doch noch immer die sehr grosse Schwierigkeit, die richtige Länge und den richtigen Ausflusscoefficienten zu finden. Houba führt ferner eine Formel an³⁾, welche eine Aehnlichkeit mit unserer empirischen Formel hat; schreiben wir sie mit unseren Bezeichnungen, so lautet sie:

$$t = \frac{N}{a} + \frac{P}{l} (l - l_0),$$

1) Houba, Over de strooming van vloeistoffen door buizen. Nijmegen 1883.

2) Houba, l. c. p. 95.

3) Houba, l. c. p. 98.

wenn l_0 die Wirbelstrecke am Anfang der Röhre bedeutet. Welcher Werth dem l_0 beizulegen, weiss Houbá allerdings nicht anzugeben, jedenfalls muss er l_c als abhängig von l annehmen, denn sonst kann sein Gesetz nicht für sehr kleine und sehr grosse Längen in die dann geltenden Gesetze übergehen. Ein Vergleich mit unserer Formel:

$$t = \sqrt{\left(\frac{N}{ab}\right)^2 + P^2},$$

welche die beiden Grenzfälle in sich enthält, würde ergeben:

$$l_0 = l - \frac{l}{P} \left(\sqrt{\left(\frac{N}{ab}\right)^2 + P^2} - \frac{N}{a} \right).$$

Fassen wir die gewonnenen Resultate noch einmal kurz zusammen, so können wir sie in den folgenden beiden Sätzen aussprechen.

1) Wenn für eine Röhre das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz nicht mehr gilt, so ist der Hauptgrund dafür in den Vorgängen am Ende und besonders am Anfange der Röhre zu suchen.

2) Trägt man die Transpirationszeiten für eine beliebige Luftmenge, bei beständiger oder veränderlicher Strömung, als Ordinaten, die zugehörigen Röhrenlängen als Abscissen auf, so ergeben sich schräg ansteigende, fast geradlinige Curven, die sich in der Mitte halten zwischen einer Geraden und einer Hyperbel.

Indem ich die vorliegende Arbeit einer nachsichtigen Beurtheilung empfehle, schliesse ich dieselbe mit dem Ausdruck des herzlichsten Dankes für meinen hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. O. E. Meyer, der mich jederzeit bereitwilligst mit seinem Rathe unterstützte. Ebenso ist es mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Dr. O. Schumann an dieser Stelle für seine vielfache freundliche Hülfe öffentlich bestens zu danken.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 4.

Fig. 5.