Zur Theorie der Bahnbestimmung. Von Prof. R. Vogel.

In der Theorie der Bahnbestimmung spielt die Entwicklung der linearen heliozentrischen Koordinaten eines Himmelskörpers nach Potenzen der Zwischenzeiten bekanntlich eine wichtige Rolle. Wenn x_1 und x_2 die den Momenten t_1 und t_2 entsprechenden Koordinaten und θ die mit der Gaußschen Konstante multiplizierte Zwischenzeit $t_2 - t_1$ ist, so hat man die Reihe

$$x_2 = [1 - \frac{1}{2}\theta^2 r_1^{-3} + \frac{1}{2}\theta^3 r_1^{-4} (dr_1/dt) + \dots] x_1 + (\theta/k) [1 - \frac{1}{6}\theta^2 r_1^{-3} + \frac{1}{4}\theta^3 r_1^{-4} (dr_1/dt) + \dots] (dx_1/dt) \quad (1)$$

und gleiches für y_2 und z_2 .

Bezeichnet man der Kürze halber die Koeffizienten von x_1 und (dx_1/dt) mit α und β , so ist

$$x_2 = \alpha x_1 + \beta (dx_1/dt); \quad y_2 = \alpha y_1 + \beta (dy_1/dt) \quad (2)$$

$$z_2 = \alpha z_1 + \beta (dz_1/dt).$$

Wenn man t_1 als Anfangsmoment (Epoche) und t_2 als beliebiges Zeitmoment annimmt, dann ist θ veränderlich und die Ausdrücke (2) können (solange die Reihen α und β konvergieren) als Integrale der Bewegungsgleichungen des Himmelskörpers betrachtet werden, denn sie geben die Koordinaten x_2, y_2, z_2 für einen beliebigen Wert von θ und enthalten sechs Konstanten $x_1, y_1, z_1, (dx_1/dt), (dy_1/dt), (dz_1/dt)$, welche die Bewegung völlig bestimmen. Daraus folgt die bekannte Tatsache, daß die Bahn eines Himmelskörpers völlig bestimmt ist, wenn für einen beliebigen Punkt der Bahn die Werte der Koordinaten und ihrer ersten Derivierten (d. h. ein Punkt der Bahn und die ihm entsprechende Geschwindigkeit nach Größe und Richtung) gegeben sind.

Für den speziellen Fall einer elliptischen Bahn hat Kühnert (A. N. 2266) geschlossene Ausdrücke für α und β gegeben. Es wäre aber zweckmäßiger ganz allgemeine, für jeden Kegelschnitt gültige, Ausdrücke für dieselben zu haben. Solche Ausdrücke habe ich schon im Jahre 1891 in meiner in russischer Sprache verfaßten Schrift »Bestimmung von Bahnelementen aus drei Beobachtungen« entwickelt. Da sie aber, der Sprache wegen, bis jetzt wenig bekannt zu sein scheinen, so will ich hier diese Entwicklung, an die sich noch andere Betrachtungen anknüpfen, wiederholen.

Man beschreibe aus dem Sonnenzentrum S mit dem Radius r eine Kugelfläche, die in den Punkten P_1, P_2 und x von den Leitstrahlen r_1, r_2 und von der x -Achse durchschnitten wird.

Die Richtung der Tangente zur Bahn im Zeitmomente t_1 bilde mit der Verlängerung des Leitstrahles r_1 (von der Sonne weg) den Winkel ψ_1 . Man ziehe die Gerade SW_1 parallel zu dieser Tangente, dann liegen die Punkte P_1, P_2 und W_1 offenbar auf demselben größten Kreise und es ist $W_1 S P_1 = \psi_1$. Es sei ferner $P_1 P_2 x = \sigma$ und die Differenz der wahren Anomalien $v_2 - v_1 = P_2 S P_1 = 2f$, dann hat man aus den sphärischen Dreiecken $W_1 P_2 x$ und $P_1 P_2 x$

$$\cos(W_1 x) = \cos(P_2 x) \cos(\psi_1 - 2f) - \sin(P_2 x) \sin(\psi_1 - 2f) \cos \sigma$$

$$\cos(P_1 x) = \cos(P_2 x) \cos 2f + \sin(P_2 x) \sin 2f \cos \sigma$$

woraus nach Elimination von $\cos \sigma$ folgt

$$\sin \psi_1 \cos(P_2 x) = \cos(P_1 x) [\sin \psi_1 \cos 2f - \cos \psi_1 \sin 2f] + \cos(W_1 x) \sin 2f$$

welche Gleichung nur sagen will, daß die Punkte W_1, P_2, P_1 auf demselben größten Kreise liegen.

Bezeichnet W_1 nicht nur die Richtung, sondern auch die Größe der Geschwindigkeit, so ist

$$\cos(W_1 x) = (dx_1/dt) / W_1$$

und da außerdem

$$\cos(P_2 x) = x_2 / r_2 \quad \cos(P_1 x) = x_1 / r_1$$

so wird unsere Gleichung

$$(x_2 / r_2) W_1 \sin \psi_1 = (x_1 / r_1) [W_1 \sin \psi_1 \cos 2f - W_1 \cos \psi_1 \sin 2f] + \sin 2f dx_1 / dt \quad (3)$$

Es sei ds_1 ein Element der Bahnkurve, dann hat man

$$ds_1 \cos \psi_1 = dr_1 \quad ds_1 \sin \psi_1 = r_1 dv_1$$

$$\text{oder } W_1 \cos \psi_1 = dr_1 / dt \quad W_1 \sin \psi_1 = r_1 dv_1 / dt \quad (4)$$

Führt man jetzt die Bedingung ein, daß die Bewegung in einem Kegelschnitte erfolgt und die elementare Sektorenfläche der Zeit proportional ist, dann hat man

$$r_1 = p / (1 + e \cos v_1) \quad r_1^2 dv_1 = k p^{1/2} dt \quad (5)$$

Aus (4) und (5) findet man leicht

$$W_1 \sin \psi_1 = k p^{1/2} / r_1 \quad W_1 \cos \psi_1 = dr_1 / dt = k e \sin v_1 p^{-1/2}$$

und hat somit aus (3), wenn man der Kürze wegen setzt $r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) = n$

$$x_2 = (x_1 / r_1) [r_2 \cos 2f - n e \sin v_1 / p] + (dx_1 / dt) n p^{-1/2} / k \quad (6)$$

Diese Gleichung enthält die Exzentrizität und die wahre Anomalie. Um diese Größen zu beseitigen, haben wir die Gleichungen

$$r_2 = p / (1 + e \cos v_2) \quad r_1 = p / (1 + e \cos v_1)$$

aus welchen folgt

$$p / r_2 - 1 = e \cos(v_1 + 2f) = e \cos v_1 \cos 2f - e \sin v_1 \sin 2f$$

$$= (p / r_1 - 1) \cos 2f - e \sin v_1 \sin 2f$$

oder $e \sin v_1 \sin 2f = p(r_2 \cos 2f - r_1)/(r_1 r_2) + 2 \sin^2 f$
 woraus $r_2 \cos 2f - e \sin v_1 n_1/p = r_1 - 2 r_1 r_2 \sin^2 f/p$
 welcher Ausdruck in (6) eingesetzt ergibt

$$x_2 = (1 - 2 r_2 \sin^2 f p^{-1}) x_1 + (n p^{-1/2}/k) \cdot dx_1/dt. \quad (7)$$

Wenn man hier setzt

$$\alpha = (1 - 2 r_2 \sin^2 f p^{-1}) \quad \beta = n p^{-1/2}/k \quad (8)$$

so hat man

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha x_1 + \beta dx_1/dt & y_2 &= \alpha y_1 + \beta dy_1/dt \\ z_2 &= \alpha z_1 + \beta dz_1/dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Formeln (8) sind also die genauen und allgemeinen, für jeden Kegelschnitt gültigen, Ausdrücke¹⁾ für α und β . Man kann ihnen noch folgende Form geben.

Bezeichnet man das Verhältnis der Sektorenfläche zur entsprechenden Dreiecksfläche mit η , so hat man

$$k \sqrt{p} (t_2 - t_1) / [r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)] = \theta \sqrt{p}/n = \eta$$

und aus (8) folgt dann

$$\alpha = 1 - \theta^2/(2 \eta^2 r_1^2 r_2 \cos^2 f) \quad \beta = \theta/(k \eta). \quad (10)$$

Betrachten wir drei Punkte der Bahn, denen die Zeiten t, t_1, t_2 und die Koordinaten $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ entsprechen, wo $t < t_1 < t_2$, so können wir dasselbe Verfahren auch auf die Koordinaten x, y, z anwenden. Dazu braucht man nur t_2 mit t zu vertauschen und, wenn man setzt

$$n_2 = r r_1 \sin(v_1 - v) \quad \theta_2 = k(t_1 - t)$$

so findet man leicht nach (8) und (9)

$$\alpha_2 = 1 - 2 r \sin^2 f_2/p \quad \beta_2 = n_2 p^{-1/2}/k \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 dx_1/dt & y &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 dy_1/dt \\ z &= \alpha_2 z_1 + \beta_2 dz_1/dt \end{aligned} \quad (12)$$

oder nach (10)

$$\alpha_2 = 1 - \theta_2^2/(2 \eta_2^2 r_1^2 r \cos^2 f_2) \quad \beta_2 = \theta_2/(k \eta_2). \quad (13)$$

Kiew, Sternwarte, 1912 Mai.

¹⁾ Aus der Theorie der elliptischen Bewegung hat man

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin g = \sqrt{a} \sqrt{p} \sin g$$

wo g die halbe Differenz der exzentrischen Anomalien ist. Daraus findet man leicht: $2 r_2 \sin^2 f/p = 2 a \sin^2 g/r_1$, es ist also für die Ellipse auch: $\alpha = 1 - 2 a \sin^2 g/r_1$.

Über die Verbesserung von parabelnahen Bahnen. Von S. Kasakow.

Bei der Verbesserung einer parabelnahen Hyperbel oder einer Ellipse von sehr großer Umlaufszeit sind die Größen T, q, e , als die Elemente zu betrachten, die die Bewegung des Himmelskörpers in der Bahn bestimmen; wir bezeichnen mit r und v den Radiusvektor und die wahre Anomalie und setzen $\xi = r \cos v, \eta = r \sin v$.

Die Differentiation von ξ, η nach den Elementen ergibt mit den üblichen Bezeichnungen (vergl. *J. Bauschinger*, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Nr. 146):

$$\begin{aligned} d\xi &= +dT \cdot k p^{-1/2} \sin v \\ &+ (dq/q) (r \cos v + 3/2 k p^{-1/2} (t - T) \sin v) \\ &+ [de/(1 - e)] (r \cos v + 3/2 k p^{-1/2} (t - T) \sin v \\ &\quad - [r/(1 + e)] \sin^2 v - q) \\ d\eta &= -dT \cdot k p^{-1/2} (\cos v + e) \\ &+ (dq/q) (r \sin v - 3/2 k p^{-1/2} (t - T) (\cos v + e)) \\ &+ [de/(1 - e)] (r \sin v - 3/2 k p^{-1/2} (t - T) (\cos v + e) \\ &\quad + [r/(1 + e)] \sin v \cos v). \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir uns den Gleichungen (9) und (12) zu. Eliminiert man aus ihnen die Derivierten $dx_1/dt, dy_1/dt, dz_1/dt$ und setzt

$$(\alpha \beta_2 + \alpha_2 \beta)/\beta = C$$

so bekommt man

$$\begin{aligned} x - C x_1 + (\beta_2/\beta) x_2 &= 0 \\ y - C y_1 + (\beta_2/\beta) y_2 &= 0 \\ z - C z_1 + (\beta_2/\beta) z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Um die geometrische Bedeutung von C zu finden, eliminieren wir aus zweien dieser Gleichungen (z. B. aus der zweiten und dritten) das Verhältnis β_2/β . Dann bekommen wir

$$C = (y z_2 - y_2 z)/(y_1 z_2 - y_2 z_1) = n_1/n$$

wo n_1 dem ersten und dritten Punkte entspricht. Aus (8) und (11) folgt aber auch

$$\beta_2/\beta = n_2/n$$

wir haben daher aus (14) die bekannten *Gaußschen* Gleichungen

$$\begin{aligned} n x - n_1 x_1 + n_2 x_2 &= 0 \\ n y - n_1 y_1 + n_2 y_2 &= 0 \\ n z - n_1 z_1 + n_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Elimination der Verhältnisse n/n_1 und n_2/n_1 aus diesen Gleichungen ergibt

$$x(y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_1(y z_2 - y_2 z) + x_2(y z_1 - y_1 z) = 0 \quad (16)$$

und das ist die Bedingung, daß die drei Punkte der Bahn in einer durch das Sonnenzentrum gehenden Ebene liegen.

Da die *Gaußsche* Methode zur Bestimmung einer Bahn alle drei Gleichungen (15) benutzt, so befriedigt sie also auch die Bedingung (16). Die *Oberssche* Methode befriedigt dagegen diese Bedingung nicht, denn sie benutzt nur die zweite und dritte Gleichung (15) und läßt die erste Gleichung (15) ganz außer acht.

Robert Vogel.