Sulle vibrazioni dei solidi elastici.

(Di GIUSEPPE LAURICELLA, a Pesaro.)

Nella mia Memoria: *Sulle equazioni del moto dei corpi elastici* (*), trattando della quistione dell'esistenza delle soluzioni eccezionali delle equazioni indefinite, dalle quali si può fare dipendere l'integrazione delle equazioni del moto dei solidi elastici, non riuscii a dimostrare in modo completo l'esistenza di una serie indefinita di queste soluzioni eccezionali nel caso in cui le corrispondenti espressioni delle tensioni si annullano alla superficie del corpo, il qual caso è appunto quello dal quale dipende effettivamente il problema del moto. Ora ho potuto osservare che modificando un po' i calcoli di tale Memoria, si può completare questa quistione (**).

(*) *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Serie II, Tom. XLV.

(**) Tale modificazione è necessario farla pure nella Memoria richiamata sopra per il caso di soluzioni eccezionali che si annullano nei punti della superficie del corpo; e per questo basterà sostituire al § 3 del Cap. I il § 4 del presente lavoro (ciò che porta a lievi modificazioni di simboli nei paragrafi seguenti) e osservare che, dipendentemente dalla natura della funzione f scelta ad arbitrio (Cap. II, § 3), può darsi che la serie delle soluzioni eccezionali, delle quali si viene a dimostrare l'esistenza sia finita. Allora per completare la quistione, ossia per provare che vi sono effettivamente infinite soluzioni eccezionali, si può fare la seguente dimostrazione, analoga ad una dimostrazione, fatta per un caso simile, che mi è stata comunicata dal Ch.^{mo} prof. VOLTERRA.

Data una funzione f qualsiasi, si ha sempre una soluzione eccezionale almeno p_1, q_1, r_1 . Le tre funzioni p_1, q_1, r_1 , sono i rispettivi residui delle funzioni u, v, w nel polo semplice k_1 . Ciò posto, si prenda una funzione f_1 tale che:

$$\int_S f_1 (p_1 + q_1 + r_1) dS = 0,$$

e si considerino le corrispondenti funzioni u', v', w' , analoghe alle u, v, w . Queste funzioni devono ammettere per lo meno un polo semplice k_2 , il quale non può coincidere

Faccio notare che tale modificazione rende assai generale il metodo da me adoperato, ed è facile comprendere come esso con la massima facilità possa estendersi, pur non facendolo io qui espressamente, al caso di soluzioni eccezionali relativi al problema delle membrane elastiche e ad altri simili della fisica-matematica (*).

In questo lavoro veramente non mi preoccupo di dimostrare senz'altro l'esistenza di infinite soluzioni eccezionali; ma, prendendo di mira l'origine della quistione stessa, dimostro anzitutto che, date tre funzioni arbitrarie dei punti del corpo elastico, esiste sempre una corrispondente serie finita od infinita di soluzioni eccezionali. Allora, prese una volta per funzioni arbitrarie le componenti degli spostamenti iniziali ed un'altra le componenti delle velocità iniziali ottengo due serie di soluzioni eccezionali e quindi due corrispondenti serie di vibrazioni elementari dei punti del corpo elastico. Quando queste serie sono finite il moto corrispondente agli spostamenti iniziali ed alle velocità iniziali è rappresentato dalla sovrapposizione delle due serie finite di vibrazioni elementari ottenute, nel caso contrario, che è poi il più generale, in cui tutti o alcune delle serie di soluzioni eccezionali sono infinite, il moto del corpo elastico sarà dato ancora dalla sovrapposizione delle due corrispondenti serie di vibrazioni elementari, tutte le volte che le serie che si vengono a

con k_1 ; perchè altrimenti i corrispondenti residui delle funzioni u' , v' , w' sarebbero:

$$p_2 = p_1 \int_S (p_1 + q_1 + r_1) dS = 0, \quad q_2 = q_1 \int_S (p_1 + q_1 + r_1) dS = 0, \\ r_2 = r_1 \int_S (p_1 + q_1 + r_1) dS = 0.$$

Dunque il polo k_2 è distinto da k_1 è così la corrispondente soluzione eccezionale p_2 , q_2 , r_2 sarà distinta dall'altra p_1 , q_1 , r_1 .

Similmente prendiamo una funzione f_2 tale che:

$$\int_S f_2 (p_1 + q_1 + r_1) dS = \int_S f_2 (p_2 + q_2 + r_2) dS = 0.$$

Troveremo tre nuove funzioni u'' , v'' , w'' che avranno un polo k_3 diverso da k_1 e da k_2 , e quindi una nuova soluzione eccezionale p_3 , q_3 , r_3 distinta dalle due precedenti.

Seguitando in questa guisa risulterà l'esistenza di infiniti poli distinti e quindi di infinite soluzioni eccezionali.

(*) Vedi la mia Memoria: *Sull'equazione delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino. Gennaio, 1896).

considerare sono da per tutto convergenti in egual grado e derivabili, e che le componenti degli spostamenti iniziali e delle velocità iniziali sono sviluppabili in serie delle corrispondenti soluzioni eccezionali.

Quanto alla dimostrazione di quest'ultima quistione, della quale io qui non mi occupo, faccio notare soltanto che la via più naturale da seguire è quella da me indicata nella quistione analoga delle vibrazioni delle piastre elastiche (*) e che i risultati preliminari ivi stabiliti si estendono al caso nostro senza difficoltà alcuna.

1. L'integrazione delle equazioni generali del moto di un corpo elastico isotropo soggetto a forze esterne indipendenti dal tempo, si può ridurre, come è noto (**), all'integrazione di equazioni della stessa specie, nelle quali le forze esterne sono nulle e ad un problema di equilibrio. Ammesso risoluto quest'ultimo problema, se chiamiamo u, v, w gli spostamenti dei punti (x, y, z) del corpo S vibrante, t il tempo, ρ la densità, L e K le note costanti di isotropia, n la direzione interna della normale nei punti della superficie σ , e se poniamo:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, & \Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \gamma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, & \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

il problema del moto dei solidi elastici si può far dipendere così dall'integrazione delle equazioni indefinite:

$$\left. \begin{aligned}-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= L \Delta^2 u + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= L \Delta^2 v + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= L \Delta^2 w + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial z},\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) *Nuovo Cimento*. Settembre, 1896.

(**) Vedi ad es.: CESÀRO. *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*. Parte prima, Cap. VII, § 2.

con le condizioni al contorno σ :

$$\left. \begin{aligned} (K\theta + 2L\gamma_{11})\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma_{12}\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma_{13}\frac{\partial z}{\partial n} &= 0 \\ L\gamma_{21}\frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta + 2L\gamma_{22})\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma_{23}\frac{\partial z}{\partial n} &= 0 \\ L\gamma_{31}\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma_{32}\frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta + 2L\gamma_{33})\frac{\partial z}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Vediamo se esistono integrali delle equazioni precedenti della forma:

$$u = p(x, y, z) \cdot \varphi(t), \quad v = q(x, y, z) \cdot \varphi(t), \quad w = r(x, y, z) \cdot \varphi(t). \quad (3)$$

Per questo, posto:

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}, & \gamma'_{11} &= \frac{\partial p}{\partial x}, & \gamma'_{22} &= \frac{\partial q}{\partial y}, & \gamma'_{33} &= \frac{\partial r}{\partial z}, \\ \gamma'_{23} &= \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial y}, & \gamma'_{31} &= \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}, & \gamma'_{12} &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}, \end{aligned}$$

si dovrà avere nei punti di S :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{1}{\rho p} \left\{ L \Delta^2 p + (L + K) \frac{\partial \theta'}{\partial x} \right\} \\ -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{1}{\rho q} \left\{ L \Delta^2 q + (L + K) \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right\} \\ -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \frac{1}{\rho r} \left\{ L \Delta^2 r + (L + K) \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right\}, \end{aligned}$$

nei punti di σ :

$$\left. \begin{aligned} (K\theta' + 2L\gamma'_{11})\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{12}\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{13}\frac{\partial z}{\partial n} &= 0 \\ L\gamma'_{21}\frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{22})\frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{23}\frac{\partial z}{\partial n} &= 0 \\ L\gamma'_{31}\frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{32}\frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{33})\frac{\partial z}{\partial n} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

e se si indica con k una quantità costante, risulta per la φ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k \varphi, \quad (4)$$

per le funzioni p, q, r :

$$\left. \begin{aligned} L \Delta^2 p + (L + K) \frac{\partial \theta'}{\partial x} &= k \rho p \\ L \Delta^2 q + (L + K) \frac{\partial \theta'}{\partial y} &= k \rho q \\ L \Delta^2 r + (L + K) \frac{\partial \theta'}{\partial z} &= k \rho r, \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

con le condizioni (2') nei punti di σ .

Ora dalla (4) si ha per la forma più generale della funzione φ :

$$\varphi = \lambda \cos(t\sqrt{k}) + \mu \sin(t\sqrt{k}), \quad (5)$$

con λ e μ costanti arbitrarie; quindi (*) le funzioni (3) soddisfano alle equazioni (1), (2) tutte le volte che φ abbia la forma (5) e che le funzioni p, q, r siano integrali delle (1'), (2').

2. Vediamo ora in che modo si può determinare un sistema di integrali delle equazioni (1'), (2').

Posto:

$$\frac{L + K}{L} = A, \quad -\frac{k\rho}{L} = h, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} (K\theta' + 2L\gamma'_{11}) \frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{12} \frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{13} \frac{\partial z}{\partial n} &= X' \\ L\gamma'_{21} \frac{\partial x}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{22}) \frac{\partial y}{\partial n} + L\gamma'_{23} \frac{\partial z}{\partial n} &= Y' \\ L\gamma'_{31} \frac{\partial x}{\partial n} + L\gamma'_{32} \frac{\partial y}{\partial n} + (K\theta' + 2L\gamma'_{33}) \frac{\partial z}{\partial n} &= Z', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

le equazioni (1'), (2') divengono:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 p + A \frac{\partial \theta'}{\partial x} + h p &= 0 \\ \Delta^2 q + A \frac{\partial \theta'}{\partial y} + h q &= 0 \\ \Delta^2 r + A \frac{\partial \theta'}{\partial z} + h r &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

$$X' = Y' = Z' = 0. \quad (2'')$$

(*) CESÀRO; l. c., § 3.

Ciò posto, indichiamo con f' , f'' , f''' tre funzioni arbitrarie dei punti del corpo S sottoposte alle condizioni:

$$\begin{aligned} \int_S f' dS &= \int_S f'' dS = \int_S f''' dS = \int_S (zf' - yf'') dS = \\ &= \int_S (xf''' - zf') dS = \int_S (yf' - xf'') dS = 0, \end{aligned}$$

e consideriamo le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + f' &= 0 \\ \Delta^2 v_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + f'' &= 0 \\ \Delta^2 w_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + f''' &= 0, \\ X_0 = Y_0 = Z_0 &= 0; \\ \Delta^2 u_1 + A \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + u_0 &= 0 \\ \Delta^2 v_1 + A \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + v_0 &= 0 \\ \Delta^2 w_1 + A \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + w_0 &= 0, \\ X_1 = Y_1 = Z_1 &= 0; \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot &, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

dove:

$$\theta_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z},$$

e X_i , Y_i , Z_i sono le espressioni (7) corrispondenti alle funzioni u_i , v_i , w_i . Queste funzioni sono determinate a meno di un movimento rigido (*), e noi ci serviremo delle sei costanti arbitrarie relative a questo movimento per sod-

(*) Vedi la mia Mem.: *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*. Cap. I, § 2. (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, anno 1894.)

disfare alle condizioni:

$$\left. \begin{aligned} \int_S u_i dS &= \int_S v_i dS = \int_S w_i dS = \int_S (z v_i - y w_i) dS = \\ &= \int_S (x w_i - z u_i) dS = \int_S (y u_i - x v_i) dS = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Gli integrali di uno qualunque dei sistemi di equazioni (8) in un punto qualsiasi di S o di σ si possono esprimere mediante le formole (*):

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i - (C_2^{(i)} z - C_3^{(i)} y + K_1^{(i)}) = \int_S \sum g_1 u_{i-1} dS \\ \bar{v}_i &= v_i - (C_3^{(i)} x - C_1^{(i)} z + K_2^{(i)}) = \int_S \sum g_2 u_{i-1} dS \\ \bar{w}_i &= w_i - (C_1^{(i)} y - C_2^{(i)} x + K_3^{(i)}) = \int_S \sum g_3 u_{i-1} dS, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

dove $g_1, g'_1, g''_1; g_2, \dots, g_3, \dots$ sono funzioni della natura della funzione $\frac{1}{r}$, la cui ricerca dipende dall'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici.

3. Posto qui:

$$\gamma_{11}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \dots \quad \gamma_{23}^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y}, \dots$$

$$W_{m \cdot n} = \int_S (u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n) dS,$$

$$\begin{aligned} V_{m \cdot n} = \int_S \bigg\{ & (A-1) \vartheta_m \vartheta_n + 2 \gamma_{11}^{(m)} \gamma_{11}^{(n)} + 2 \gamma_{22}^{(m)} \gamma_{22}^{(n)} + 2 \gamma_{33}^{(m)} \gamma_{33}^{(n)} + \\ & + \gamma_{23}^{(m)} \gamma_{23}^{(n)} + \gamma_{31}^{(m)} \gamma_{31}^{(n)} + \gamma_{12}^{(m)} \gamma_{12}^{(n)} \bigg\} dS, \end{aligned}$$

si dimostra, come al § 3 (Cap. II) della cit. Mem., che le espressioni $W_{m \cdot n}$, $V_{m \cdot n}$ dipendono soltanto dalla somma degli indici e, posto:

$$W_{m \cdot n} = W_{m+n}, \quad V_{m \cdot n} = V_{m+n},$$

(*) Form. (9), Cap. I della Memoria: *Sulle equazioni del moto elastico.*

che sussiste la relazione:

$$W_{m+n} = V_{m+n+1}.$$

Da questa e dalle (10) risulta come ai §§ 4, 5 (Cap. II) della stessa Memoria:

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \dots < \frac{W_m}{W_{m-1}} < \dots,$$

$$(\bar{u}_i)^2 = (u_i - C_2^{(i)} z + C_3^{(i)} y - K_1^{(i)})^2 < R W_{2i-2}$$

$$(\bar{v}_i)^2 = (v_i - C_3^{(i)} x + C_1^{(i)} z - K_2^{(i)})^2 < R W_{2i-2}$$

$$(\bar{w}_i)^2 = (w_i - C_1^{(i)} y + C_2^{(i)} x - K_3^{(i)})^2 < R W_{2i-2}.$$

Queste tre ultime formole e le (9) ci danno poi:

$$\begin{aligned} W_{2i} + \int_S (C_2^{(i)} z - C_3^{(i)} y + K_1^{(i)})^2 dS + \int_S (C_3^{(i)} x - C_1^{(i)} z + K_2^{(i)})^2 dS + \\ + \int_S (C_1^{(i)} y - C_2^{(i)} x + K_3^{(i)})^2 dS < K W_{2i-2}, \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} W_{2i} < K W_{2i-2}, \\ \int_S (C_2^{(i)} z - C_3^{(i)} y + K_1^{(i)})^2 dS < K W_{2i-2}, \\ \int_S (C_3^{(i)} x - C_1^{(i)} z + K_2^{(i)})^2 dS < K W_{2i-2}, \\ \int_S (C_1^{(i)} y - C_2^{(i)} x + K_3^{(i)})^2 dS < K W_{2i-2}, \end{aligned}$$

dove K ha il significato che gli si è dato al § 5 della cit. Memoria.

Supposta l'origine degli assi nell'interno di S , si indichi con S_1 una sfera che abbia il centro in questa origine e che sia tutta interna ad S . Si avrà:

$$\int_{S_1} x dS = \int_{S_1} y dS = \int_{S_1} z dS = \int_{S_1} z y dS = \int_{S_1} x z dS = \int_{S_1} y x dS = 0,$$

e quindi posto:

$$\int_{S_1} dS = I, \quad \int_{S_1} x^2 dS = \int_{S_1} y^2 dS = \int_{S_1} z^2 dS = H,$$

regolari in tutto S e σ (*) per $|k| < \frac{1}{c}$ e presenteranno una qualche singolarità per $|k| = \frac{1}{c}$.

4. Si ponga ora :

$$A = \int_{S'} (u^2 + v^2 + w^2) dS',$$

$$B = \int_{S'} ((A-1)\theta^2 + 2\gamma_{11}^2 + 2\gamma_{22}^2 + 2\gamma_{33}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2) dS',$$

$$C = \int_{S'} u dS', \quad C' = \int_{S'} v dS', \quad C'' = \int_{S'} w dS',$$

$$C''' = \int_{S'} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS',$$

dove u, v, w e le loro derivate prime sono funzioni regolari dei punti di un certo spazio S' , le quali soddisfano alle condizioni :

$$C = C' = C'' = C''' = 0,$$

e $\theta, \gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ sono le solite espressioni relative alle funzioni u, v, w .

Si ha ovviamente :

$$B = \int_{S'} \left\{ (A-1)\theta^2 + \gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dS';$$

e quindi avuto riguardo all'ultima delle precedenti condizioni ed al fatto che l'espressione :

$$A - 1 = \frac{L}{K}$$

(*) Nella Memoria dell'Acc. di Torino veramente non si è tenuto conto dei punti di σ ; del resto nessuna speciale osservazione è da farsi nella considerazione di questi punti. Così pure non si è avuto riguardo alle condizioni (9) a cui devono soddisfare le u_i, v_i, w_i nel caso di $X_i = Y_i = Z_i = 0$; ma la considerazione di queste condizioni, come vedremo, non muta i risultati. Analoga osservazione è da farsi relativamente ai calcoli dei §§ 1, 4 al Cap. III della stessa Memoria nel caso delle equazioni (3), (4).

varia fra 0 e ∞ (*), si potrà scrivere:

$$B > \int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dS' + \int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} dS' + \\ + \int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} dS'.$$

Ora se si indica con l' la massima dimensione dello spazio S' e si ha riguardo alle prime tre delle precedenti condizioni, risulta (**):

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dS'}{\int_{S'} u^2 dS'} > \frac{16}{9l'^2},$$

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots \dots \dots \right\} dS'}{\int_{S'} v^2 dS'} > \frac{16}{9l'^2},$$

$$\frac{\int_{S'} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots \dots \dots \right\} dS'}{\int_{S'} w^2 dS'} > \frac{16}{9l'^2};$$

per cui sarà:

$$\frac{B}{A} > \frac{16}{9l'^2}.$$

5. Si abbiano $4p$ terne di funzioni:

$$\varphi_1, \psi_1, \chi_1; \quad \varphi_2, \psi_2, \chi_2; \quad \dots \quad \varphi_{4p}, \psi_{4p}, \chi_{4p}, \quad (12)$$

dei punti del corpo elastico S della stessa natura delle precedenti funzioni u, v, w e $4p$ costanti:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4p}.$$

(*) Vedi: Mem. cit.; Cap. I, § 3.

(**) POINCARÉ. *Sur les équations de la physique mathématique*. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo; t. VIII, anno 1894. (Cfr. § III).

Vediamo se si possono determinare queste costanti in modo che, preso:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_{4p} \varphi_{4p} \\ v &= \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_{4p} \psi_{4p} \\ w &= \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \dots + \alpha_{4p} \chi_{4p} \end{aligned}$$

risulti:

$$\frac{B}{A} > \frac{16}{9 l^2},$$

essendo l la massima dimensione dei $p-1$ spazi convessi:

$$S_1, S_2, \dots, S_{p-1},$$

in cui supponiamo si possa decomporre lo spazio S .

Osserviamo anzitutto che, posto:

$$\begin{aligned} A_i &= \int_{S_i} (u^2 + v^2 + w^2) d S_i, & B_i &= \int_{S_i} \left\{ (A-1) \varphi^2 + 2 \gamma_{11}^2 + \right. \\ & & & \left. + 2 \gamma_{22}^2 + 2 \gamma_{33}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2 \right\} d S_i, \\ C_i &= \int_{S_i} u d S_i, & C'_i &= \int_{S_i} v d S_i, & C''_i &= \int_{S_i} w d S_i, \\ C'''_i &= \int_{S_i} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d S_i, \end{aligned}$$

si può determinare un sistema di valori non tutti nulli delle $4p$ costanti α in modo che siano soddisfatte le $4p-4$ equazioni:

$$C_i = 0, \quad C'_i = 0, \quad C''_i = 0, \quad C'''_i = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p-1)$$

Il risultato del paragrafo precedente ci dà allora per questi valori delle α_i :

$$\frac{B_i}{A_i} > \frac{16}{9 l^2}; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p-1)$$

sicchè si avrà:

$$\frac{B}{A} = \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_{p-1}}{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}} > \frac{16}{9 l^2}.$$

Di qui segue subito, come al § 5 (Cap. I) della cit. Mem., che, se si ha un numero comunque grande di sistemi di funzioni analoghe alle (12) ed è data una quantità positiva qualsiasi λ , si può determinare il numero

intero p in modo che sia:

$$\frac{B}{A} > \lambda. \quad (13)$$

6. Data una grandezza positiva ad arbitrio λ e determinato il corrispondente numero p , si considerino le $4p$ terne di funzioni:

$$f'_1, f''_1, f'''_1; f'_2, f''_2, f'''_2; \dots; f'_{4p}, f''_{4p}, f'''_{4p} \quad (14)$$

e si indichino con

$$u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}; u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}; \dots; u^{(4p)}, v^{(4p)}, w^{(4p)}$$

le $4p$ terne di funzioni, analoghe alle funzioni u, v, w del § 3, che si ottengono sostituendo nelle equazioni (8) alle funzioni f', f'', f''' le (14).

Posto:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= u_0^{(i)} + u_1^{(i)} k + u_2^{(i)} k^2 + \dots \\ v^{(i)} &= v_0^{(i)} + v_1^{(i)} k + v_2^{(i)} k^2 + \dots \\ w^{(i)} &= w_0^{(i)} + w_1^{(i)} k + w_2^{(i)} k^2 + \dots, \\ \theta_r^{(i)} &= \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial w_r^{(i)}}{\partial z} \end{aligned}$$

ed indicati con $X_r^{(i)}, Y_r^{(i)}, Z_r^{(i)}$ le espressioni (7) relative alle funzioni $u_r^{(i)}, v_r^{(i)}, w_r^{(i)}$, sarà:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u_r^{(i)} + A \frac{\partial \theta_r^{(i)}}{\partial x} + u_{r-1}^{(i)} &= 0 \\ \Delta^2 v_r^{(i)} + A \frac{\partial \theta_r^{(i)}}{\partial y} + v_{r-1}^{(i)} &= 0 \\ \Delta^2 w_r^{(i)} + A \frac{\partial \theta_r^{(i)}}{\partial z} + w_{r-1}^{(i)} &= 0 \\ X_r^{(i)} = Y_r^{(i)} = Z_r^{(i)} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

e se si prende:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} + \dots + \alpha_{4p} u^{(4p)} = u'_0 + u'_1 k + u'_2 k^2 + \dots \\ v' &= \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_{4p} v^{(4p)} = v'_0 + v'_1 k + v'_2 k^2 + \dots \\ w' &= \alpha_1 w^{(1)} + \alpha_2 w^{(2)} + \dots + \alpha_{4p} w^{(4p)} = w'_0 + w'_1 k + w'_2 k^2 + \dots \end{aligned}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{4p}$ costanti per ora indeterminate, risulterà:

$$\left. \begin{aligned} u'_r &= \alpha_1 u_r^{(1)} + \alpha_2 u_r^{(2)} + \dots + \alpha_{4p} u_r^{(4p)} \\ v'_r &= \alpha_1 v_r^{(1)} + \alpha_2 v_r^{(2)} + \dots + \alpha_{4p} v_r^{(4p)} \\ w'_r &= \alpha_1 w_r^{(1)} + \alpha_2 w_r^{(2)} + \dots + \alpha_{4p} w_r^{(4p)} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

e dalle (15):

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 u'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial x} + u'_{r-1} &= 0 \\ \Delta^2 v'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial y} + v'_{r-1} &= 0 \\ \Delta^2 w'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial z} + w'_{r-1} &= 0 \\ X'_r = Y'_r = Z'_r &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

dove $\theta'_r, X'_r, Y'_r, Z'_r$ hanno il solito significato. Allora, posto:

$$\gamma_{11}^{(i)'} = \frac{\partial u'_i}{\partial x}, \quad \gamma_{22}^{(i)'} = \frac{\partial v'_i}{\partial y}, \quad \gamma_{33}^{(i)'} = \frac{\partial w'_i}{\partial z}, \quad \gamma_{23}^{(i)'} = \frac{\partial v'_i}{\partial z} + \frac{\partial w'_i}{\partial y}, \dots$$

$$W_{m \cdot n} = \int_S (u'_m u'_n + v'_m v'_n + w'_m w'_n) dS,$$

$$\begin{aligned} V'_{m \cdot n} = \int_S \bigg\{ (A-1) \theta'_m \theta'_n + 2 \gamma_{11}^{(m)'} \gamma_{11}^{(n)'} + 2 \gamma_{22}^{(m)'} \gamma_{22}^{(n)'} + 2 \gamma_{33}^{(m)'} \gamma_{33}^{(n)'} \\ + \gamma_{23}^{(m)'} \gamma_{23}^{(n)'} + \gamma_{31}^{(m)'} \gamma_{31}^{(n)'} + \gamma_{12}^{(m)'} \gamma_{12}^{(n)'} \bigg\} dS, \end{aligned}$$

avremo come al § 3:

$$\begin{aligned} W'_{m \cdot n} = V'_{m \cdot n+1} = W'_{m+n} = V'_{m+n+1}, \\ \frac{W'_1}{W'_0} < \frac{W'_2}{W'_1} < \dots < \frac{W'_r}{W'_{r-1}} < \dots \end{aligned}$$

7. Dai risultati del § 5 si ha intanto che si possono determinare le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ in modo che sia:

$$\frac{V'_{2r}}{W'_{2r}} = \frac{\int_S \left\{ (A-1) \theta_r'^2 + 2 (\gamma_{11}^{(r)'})^2 + 2 (\gamma_{22}^{(r)'})^2 + \dots \right\} dS}{\int_S (u_r'^2 + v_r'^2 + w_r'^2) dS} > \lambda;$$

allora si avrà:

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \frac{W'_2}{W'_1} < \dots < \frac{W'_{2r}}{W'_{2r-1}} < \frac{1}{\lambda};$$

e quindi, ripetendo i ragionamenti fatti alla fine del § 6 (Cap. I) della ci-

Applicando dunque il teorema del paragrafo precedente risulta che le funzioni u' , v' , w' , che così vengono determinate, sono regolari in tutto S e σ anche quando, essendo $|k| < \lambda$, sia $|k| > \frac{1}{c}$.

9. Si ponga:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \alpha_1 f' + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 u_1 + \dots + \alpha_{4p} u_{4p-2} \\ f^{(2)} &= \alpha_1 f'' + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \dots + \alpha_{4p} v_{4p-2} \\ f^{(3)} &= \alpha_1 f''' + \alpha_2 w_0 + \alpha_3 w_1 + \dots + \alpha_{4p} w_{4p-2} \\ \varphi' &= f^{(1)} + k u' = f^{(1)} + u'_0 k + u'_1 k^2 + u'_2 k^3 + \dots \\ \varphi'' &= f^{(2)} + k v' = f^{(2)} + v'_0 k + v'_1 k^2 + v'_2 k^3 + \dots \\ \varphi''' &= f^{(3)} + k w' = f^{(3)} + w'_0 k + w'_1 k^2 + w'_2 k^3 + \dots \end{aligned}$$

Le tre serie φ' , φ'' , φ''' convergono evidentemente come le altre u' , v' , w' ; onde si potrà scrivere:

$$\left. \begin{aligned} \int_S g_1 \varphi' dS &= \int_S g_1 f^{(1)} dS + k \int_S g_1 u'_0 dS + k^2 \int_S g_1 u'_1 dS + \dots \\ &= \bar{u}'_0 + \bar{u}'_1 k + \bar{u}'_2 k^2 + \dots \\ &= \bar{u}', \\ \int_S g_2 \varphi' dS &= \bar{v}', \\ \int_S g_3 \varphi' dS &= \bar{w}', \end{aligned} \right\} (17)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{u}'_r &= \alpha_1 \bar{u}_r + \alpha_2 \bar{u}_{r+1} + \dots + \alpha_{4p} \bar{u}_{4p+r-1} \\ \bar{v}'_r &= \alpha_1 \bar{v}_r + \alpha_2 \bar{v}_{r+1} + \dots + \alpha_{4p} \bar{v}_{4p+r-1} \\ \bar{w}'_r &= \alpha_1 \bar{w}_r + \alpha_2 \bar{w}_{r+1} + \dots + \alpha_{4p} \bar{w}_{4p+r-1}. \end{aligned}$$

10. Le (8)', (10) ci danno:

$$\bar{u}'_{n+1} = \int_S g_1 u'_n dS, \quad \bar{v}'_{n+1} = \int_S g_2 u'_n dS, \quad \bar{w}'_{n+1} = \int_S g_3 u'_n dS;$$

e derivando si ha :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}'_{n+1}}{\partial x} &= \int_S \Sigma \frac{\partial g_1}{\partial x} u'_n dS, & \frac{\partial \bar{v}'_{n+1}}{\partial x} &= \int_S \Sigma \frac{\partial g_2}{\partial x} u'_n dS, \\ \frac{\partial \bar{w}'_{n+1}}{\partial x} &= \int_S \Sigma \frac{\partial g_3}{\partial x} u'_n dS;\end{aligned}$$

donde :

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \bar{u}'_{n+1}}{\partial x} \right| &\leq \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| \cdot |u'_n| dS, & \left| \frac{\partial \bar{v}'_{n+1}}{\partial x} \right| &\leq \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \cdot |u'_n| dS, \\ \left| \frac{\partial \bar{w}'_{n+1}}{\partial x} \right| &\leq \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| \cdot |u'_n| dS.\end{aligned}$$

Ora dalle formole :

$$\begin{aligned}(\bar{u}'_n)^2 &= (u'_n - C_2^{(n)'} z + C_3^{(n)'} y - K_1^{(n)'})^2 < R' W'_{2n-2}, \\ (\bar{v}'_n)^2 &= (v'_n - C_3^{(n)'} x + C_1^{(n)'} z - K_2^{(n)'})^2 < R' W'_{2n-2}, \\ (\bar{w}'_n)^2 &= (w'_n - C_1^{(n)'} y + C_2^{(n)'} x - K_3^{(n)'})^2 < R' W'_{2n-2}, \\ (K_1^{(n)'})^2 &< \frac{K'}{I} W'_{2n-2}, & (K_2^{(n)'})^2 &< \frac{K'}{I} W'_{2n-2}, & (K_3^{(n)'})^2 &< \frac{K'}{I} W'_{2n-2}, \\ (C_1^{(n)'})^2 &< \frac{K'}{H} W'_{2n-2}, & (C_2^{(n)'})^2 &< \frac{K'}{H} W'_{2n-2}, & (C_3^{(n)'})^2 &< \frac{K'}{H} W'_{2n-2},\end{aligned}$$

analoghe a quelle stabilite al § 3, risulta facilmente :

$$|u'_n| < \sqrt{R'' W'_{2n-2}}, \quad |v'_n| < \sqrt{R'' W'_{2n-2}}, \quad |w'_n| < \sqrt{R'' W'_{2n-2}};$$

per cui sarà :

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \bar{u}'_{n+1}}{\partial x} \right| &\leq \sqrt{R' W'_{2n-2}} \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| dS, & \left| \frac{\partial \bar{v}'_{n+1}}{\partial x} \right| &\leq \sqrt{R' W'_{2n-2}} \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| dS, \\ \left| \frac{\partial \bar{w}'_{n+1}}{\partial x} \right| &\leq \sqrt{R' W'_{2n-2}} \int_S \Sigma \left| \frac{\partial g_3}{\partial x} \right| dS,\end{aligned}$$

e poichè le espressioni $\left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right|, \dots$ hanno un solo polo del secondo

11. Ciò posto, è chiaro che le funzioni $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, soddisfano alle condizioni ordinariamente richieste per l'applicazione agli integrali (17) del teorema analogo a quello del Poisson (*); sicchè si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u' + A \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \varphi' &= 0 \\ \Delta^2 v' + A \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \varphi'' &= 0 \\ \Delta^2 w' + A \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \varphi''' &= 0, \\ X' = Y' = Z' &= 0,\end{aligned}$$

dove θ', X', Y', Z' sono le solite espressioni relative alle funzioni u', v', w' .

Le precedenti equazioni si possono ancora scrivere:

$$\left. \begin{aligned}\Delta^2 u' + A \frac{\partial \theta'}{\partial x} + k u' + \alpha_1 f' + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 u_1 + \dots + \alpha_{4p} u_{4p-2} &= 0 \\ \Delta^2 v' + A \frac{\partial \theta'}{\partial y} + k v' + \alpha_1 f' + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \dots + \alpha_{4p} v_{4p-2} &= 0 \\ \Delta^2 w' + A \frac{\partial \theta'}{\partial z} + k w' + \alpha_1 f'' + \alpha_2 w_0 + \alpha_3 w_1 + \dots + \alpha_{4p} w_{4p-2} &= 0 \\ X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0.\end{aligned} \right\} (19)$$

Dalle equazioni (8)' risulta poi che le tre serie:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u' + A \frac{\partial \theta'}{\partial x} &= \Delta^2 u'_0 + A \frac{\partial \theta'_0}{\partial x} + \left(\Delta^2 u'_1 + A \frac{\partial \theta'_1}{\partial x} \right) k + \dots \\ \Delta^2 v' + A \frac{\partial \theta'}{\partial y} &= \Delta^2 v'_0 + A \frac{\partial \theta'_0}{\partial y} + \left(\Delta^2 v'_1 + A \frac{\partial \theta'_1}{\partial y} \right) k + \dots \\ \Delta^2 w' + A \frac{\partial \theta'}{\partial z} &= \Delta^2 w'_0 + A \frac{\partial \theta'_0}{\partial z} + \left(\Delta^2 w'_1 + A \frac{\partial \theta'_1}{\partial z} \right) k + \dots\end{aligned}$$

(*) Vedi ad es. la mia Nota *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei; Vol. II, anno 1893, oppure: *Nuovo Cimento*; Vol. XXXIV, anno 1893). Le funzioni $g_1, g_1', g_1''; g_2, \dots; g_3, \dots$, a meno di un fattore costante, differiscono dalle funzioni $u_1, v_1, w_1; u_2, \dots; u_3, \dots$ di questa Nota per l'aggiunta delle funzioni $a_1', b_1', c_1'; a_2', \dots; a_3', \dots$ (Cfr. mia cit. Mem.; Cap. I, § 2), che sono regolari in tutto S e soddisfano alle equazioni indefinite dell'equilibrio per forze esterne nulle.

convengono in ugual grado in tutto S come le serie u', v', w' ; infatti si ha:

$$\begin{aligned} \left| \Delta^2 u'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial x} \right| &= |u'_{r-1}| \\ \left| \Delta^2 v'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial y} \right| &= |v'_{r-1}| \\ \left| \Delta^2 w'_r + A \frac{\partial \theta'_r}{\partial z} \right| &= |w'_{r-1}| \end{aligned}$$

12. Posto ora:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ 1 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix}, & P_1 &= \begin{vmatrix} u' & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ u_0 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{4p-2} & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix}, \\ P_2 &= \begin{vmatrix} v' & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ v_0 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{4p-2} & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix}, & P_3 &= \begin{vmatrix} w' & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \alpha_{4p-1} & \alpha_{4p} \\ w_0 & -k & 0 \dots 0 & 0 \\ w_1 & 1 & -k \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{4p-2} & 0 & 0 \dots 1 & -k \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^r P_1}{\partial k^r} = P_1^{(r)}, \quad \frac{\partial^r P_2}{\partial k^r} = P_2^{(r)}, \quad \frac{\partial^r P_3}{\partial k^r} = P_3^{(r)},$$

$$\theta_P^{(r)} = \frac{\partial P_1^{(r)}}{\partial x} + \frac{\partial P_2^{(r)}}{\partial y} + \frac{\partial P_3^{(r)}}{\partial z},$$

risulta come ai §§ 9, 10, 11, 12 (Cap. II) della cit. Memoria:

$$u = \frac{P_1}{D}, \quad v = \frac{P_2}{D}, \quad w = \frac{P_3}{D}, \quad (20)$$

ed inoltre che per ogni radice k dell'ordine $i+1$ dell'equazione:

$$D = 0 \quad (21)$$

si ha identicamente:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P'_1 = P'_2 = P'_3 = \dots = P_1^{(i-1)} = P_2^{(i-1)} = P_3^{(i-1)} = 0$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 P_1^{(i)} + A \frac{\partial \theta_P^{(i)}}{\partial x} + k P_1^{(i)} &= 0 \\ \Delta^2 P_2^{(i)} + A \frac{\partial \theta_P^{(i)}}{\partial y} + k P_2^{(i)} &= 0 \\ \Delta^2 P_3^{(i)} + A \frac{\partial \theta_P^{(i)}}{\partial z} + k P_3^{(i)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$X_P^{(i)} = Y_P^{(i)} = Z_P^{(i)} = 0, \quad (22)'$$

dove $X_P^{(i)}$, $Y_P^{(i)}$, $Z_P^{(i)}$ sono le espressioni (7) corrispondenti alle funzioni $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$.

Di qui segue che le funzioni u , v , w per $|k| < \lambda$ non possono avere che poli semplici soltanto corrispondenti alle radici dell'equazione (21) e che per ognuno di questi poli si ha un sistema di integrali $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$ delle equazioni (22), (22)'.

Finalmente, collegando questo risultato con quello del § 3 e ricordando che per valori negativi o complessi di k (*) non si hanno integrali regolari delle (22), (22)', risulta che le funzioni u , v , w hanno un polo semplice per $k = \frac{1}{c}$ che questo valore di k è radice dell'equazione (21) e che se questa radice è dell'ordine $i+1$ le funzioni $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, $P_3^{(i)}$ non sono identicamente nulle e soddisfano nei punti di S alle equazioni (22), nei punti di σ alle equazioni (22)'.

13. Se si pone:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= k_1, \\ D &= D_1 (k_1 - k)^{i+1} \\ P_1 &= R_1 (k_1 - k)^i + S_1 (k_1 - k)^{i+1} \\ P_2 &= R_2 (k_1 - k)^i + S_2 (k_1 - k)^{i+1} \\ P_3 &= R_3 (k_1 - k)^i + S_3 (k_1 - k)^{i+1} \end{aligned}$$

con D_1 funzione di k che non si annulla per $k = k_1$ e con R_1 , R_2 , R_3 , S_1 , S_2 , S_3 , funzioni di k e dei punti di S e di σ regolari per $|k| < \lambda$, le prime

(*) Vedi: Mem. cit.; Cap. II, §§ 1 e 2. - Si osservi che la costante di isotropia L è negativa.

tre delle quali non sono identicamente nulle per $k = k_1$, si avrà:

$$(P_1^{(i)})_{k=k_1} = \Pi(i) (R_1)_{k=k_1},$$

$$(P_2^{(i)})_{k=k_1} = \Pi(i) (R_2)_{k=k_1},$$

$$(P_3^{(i)})_{k=k_1} = \Pi(i) (R_3)_{k=k_1},$$

$$u = \frac{R_1 + (k_1 - k) S_1}{(k_1 - k) D_1},$$

$$v = \frac{R_2 + (k_1 - k) S_2}{(k_1 - k) D_1},$$

$$w = \frac{R_3 + (k_1 - k) S_3}{(k_1 - k) D_1};$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{k=k_1} (k_1 - k) u &= \left(\frac{R_1}{D_1} \right)_{k=k_1} = \frac{1}{\Pi(i)} \left(\frac{P_1^{(i)}}{D_1} \right)_{k=k_1} = p_1, \\ \lim_{k=k_1} (k_1 - k) v &= \left(\frac{R_2}{D_1} \right)_{k=k_1} = \frac{1}{\Pi(i)} \left(\frac{P_2^{(i)}}{D_1} \right)_{k=k_1} = q_1, \\ \lim_{k=k_1} (k_1 - k) w &= \left(\frac{R_3}{D_1} \right)_{k=k_1} = \frac{1}{\Pi(i)} \left(\frac{P_3^{(i)}}{D_1} \right)_{k=k_1} = r_1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Posto dunque:

$$h_1 = -\frac{k_1 L}{\rho}, \quad \theta_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial r_1}{\partial z}$$

ed indicate con X_1, Y_1, Z_1 le espressioni (7) relative alle funzioni p_1, q_1, r_1 , si ha che le funzioni p_1, q_1, r_1 , sono i residui delle funzioni u, v, w nel polo k_1 e soddisfano, come risulta delle (22), (22)' (23), nei punti di S alle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} L \Delta^2 p_1 + (L + K) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= h_1 \rho p_1, \\ L \Delta^2 q_1 + (L + K) \frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= h_1 \rho q_1, \\ L \Delta^2 r_1 + (L + K) \frac{\partial \theta_1}{\partial z} &= h_1 \rho r_1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

nei punti di σ alle altre:

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0. \quad (2)''$$

14. Gli integrali p_1, q_1, r_1 possono anche dedursi direttamente dai coefficienti delle serie (11)'. Per questo osserviamo primieramente che si può

scrivere :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{p_1}{k_1 - k} + l_0 + l_1 k + l_2 k^2 + \dots \\ v &= \frac{q_1}{k_1 - k} + m_0 + m_1 k + m_2 k^2 + \dots \\ w &= \frac{r_1}{k_1 - k} + n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

con

$$\left. \begin{aligned} l &= l_0 + l_1 k + l_2 k^2 + \dots \\ m &= m_0 + m_1 k + m_2 k^2 + \dots \\ n &= n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

serie convergenti in ugual grado in tutto S e σ per qualunque valore di k di modulo inferiore ed un certo limite $k_2 > k_1$.

Il confronto della serie (24) con la (11)' ci dà :

$$u_i = l_i + \frac{p_1}{k_1^{i+1}}, \quad v_i = m_i + \frac{q_1}{k_1^{i+1}}, \quad w_i = n_i + \frac{r_1}{k_1^{i+1}}; \quad (26)$$

e queste, osservando che si ha :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (l_i k_1^i) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (m_i k_1^i) = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (n_i k_1^i) = 0,$$

ci danno finalmente :

$$p_1 = k_1 \lim_{i \rightarrow \infty} (u_i k_1^i), \quad q_1 = k_1 \lim_{i \rightarrow \infty} (v_i k_1^i), \quad r_1 = k_1 \lim_{i \rightarrow \infty} (w_i k_1^i).$$

15. Dalle (8), (1)'', (2)'' e (26) risulta ovviamente, supposto che le espressioni $f' - p_1$, $f'' - q_1$, $f''' - r_1$ non siano indenticamente nulle da per tutto,

$$\Delta^2 l_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + f' - p_1 = 0$$

$$\Delta^2 m_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + f'' - q_1 = 0$$

$$\Delta^2 n_0 + A \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + f''' - r_1 = 0,$$

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0;$$

$$\Delta^2 l_i + A \frac{\partial \theta_i}{\partial x} + l_{i-1} = 0$$

$$\Delta^2 m_i + A \frac{\partial \theta_i}{\partial y} + m_{i-1} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\Delta^2 n_i + A \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + n_{i-1} = 0$$

$$X_i = Y_i = Z_i = 0,$$

dove i simboli θ_i , X_i , Y_i , Z_i hanno i soliti significati e corrispondono alle funzioni l_i , m_i , n_i .

Partendo da queste equazioni e ragionando come precedentemente si trova facilmente il valore di k_2 e si dimostra che per questo valore di k le funzioni l , m , n hanno un polo semplice, i cui residui sono dati dalle formole:

$$p_2 = k_2 \lim_{i \rightarrow \infty} (l_i k_2^i), \quad q_2 = k_2 \lim_{i \rightarrow \infty} (m_i k_2^i), \quad r_2 = k_2 \lim_{i \rightarrow \infty} (n_i k_2^i)$$

e soddisfano nei punti di S alle equazioni:

$$\Delta^2 p_2 + A \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + k_2 p_2 = 0$$

$$\Delta^2 q_2 + A \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + k_2 q_2 = 0$$

$$\Delta^2 r_2 + A \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + k_2 r_2 = 0,$$

nei punti di σ alle altre:

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0,$$

essendo θ_2 , X_2 , Y_2 , Z_2 relative alle funzioni p_2 , q_2 , r_2 .

Seguendo nella stessa guisa risulta dunque che, corrispondentemente ad una terna di funzioni arbitrarie, esiste in generale una serie infinita di valori positivi e crescenti:

$$k_1, k_2, k_3, \dots \quad (27)$$

del parametro k ed una corrispondente serie di terne di funzioni regolari:

$$p_1, q_1, r_1; \quad p_2, q_2, r_2; \quad p_3, q_3, r_3; \dots \quad (28)$$

per le quali, posto:

$$h_i = - \frac{k_i L}{\rho},$$

ed introdotti i soliti simboli θ_i, X_i, Y_i, Z_i relativi alle funzioni p_i, q_i, r_i , si ha nei punti di S :

$$L \Delta^2 p_i + (L + K) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = h_i \rho p_i$$

$$L \Delta^2 q_i + (L + K) \frac{\partial \theta_i}{\partial y} = h_i \rho q_i$$

$$L \Delta^2 r_i + (L + K) \frac{\partial \theta_i}{\partial z} = h_i \rho r_i,$$

nei punti di σ :

$$X_i = Y_i = Z_i = 0.$$

I valori $k_1, k_2, k_3 \dots$ si dicono *valori eccezionali* del parametro k , le terne di funzioni (28) si dicono *soluzioni eccezionali* delle equazioni (1)', (2)'.

16. Il primo valore eccezionale k_1 è inferiore alla costante λ introdotta al § 8; sicchè possiamo dire che *per k variabile tra 0 e λ esiste almeno un valore eccezionale*. Ora fra 0 e λ vi potranno essere in generale più valori eccezionali, alcuni dei quali possono anche non comparire nella serie (27); però si può dimostrare che *fra 0 e λ non ci possono essere più di $4 + p - 1$ valori eccezionali*.

AmMESSO infatti che ne esistessero $4p$:

$$k'_1, k'_2, \dots k'_{4p},$$

corrispondenti alle soluzioni eccezionali:

$$p'_1, q'_1, r'_1; \quad p'_2, q'_2, r'_2; \dots \quad p'_{4p}, q'_{4p}, r'_{4p},$$

posto:

$$f'_i = p'_i, \quad f''_i = q'_i, \quad f'''_i = r'_i, \quad (i = 1, 2, \dots 4p),$$

avremo secondo i risultati del § 6:

$$u^{(i)} = \frac{p'_i}{k'_i - k}, \quad v^{(i)} = \frac{q'_i}{k'_i - k}, \quad w^{(i)} = \frac{r'_i}{k'_i - k},$$

$$u' = \sum_1^{4p} \frac{\alpha_i p'_i}{k'_i - k}, \quad v' = \sum_1^{4p} \frac{\alpha_i q'_i}{k'_i - k}, \quad w' = \sum_1^{4p} \frac{\alpha_i r'_i}{k'_i - k}.$$

Queste formole ci dicono che per qualsiasi sistema di valori non tutti nulli delle α_i le funzioni u', v', w' debbono avere per $|k| < \lambda$ un polo semplice almeno; e questo risultato è in contraddizione col teorema del § 7, secondo

il quale si dovrebbero poter determinare le α_i in modo che le funzioni u' , v' , w' risultino regolari per $|k| < \lambda$.

Di qui segue, poichè ad ogni valore comunque grande e finito di λ corrisponde un valore finito di p , che *i punti dell'asse reale e positivo di variabilità di k , i quali corrispondono a valori eccezionali, formano un gruppo di punti G di prima specie, avente per punto limite il punto all'infinito.*

17. È facile dimostrare che le soluzioni eccezionali (27) godono delle proprietà (*):

$$\int_S (p_m p_n + q_m q_n + r_m r_n) dS \begin{cases} = 0 & \text{se } m \neq n \\ \neq 0 & \text{se } m = n; \end{cases}$$

e da questa si può subito dedurre che le soluzioni eccezionali (28) sono tutte linearmente indipendenti (**).

Questo risultato accoppiato con quello del § 1, ci dice poi che corrispondentemente ad una terna di funzioni arbitrarie *esiste in generale una serie infinita di integrali regolari linearmente indipendenti delle equazioni (1), (2) della forma:*

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \left\{ \lambda_i \cos(t \sqrt{h_i}) + \mu_i \sin(t \sqrt{h_i}) \right\} p_i, \\ v_i &= \left\{ \lambda_i \cos(t \sqrt{h_i}) + \mu_i \sin(t \sqrt{h_i}) \right\} q_i, \\ w_i &= \left\{ \lambda_i \cos(t \sqrt{h_i}) + \mu_i \sin(t \sqrt{h_i}) \right\} r_i. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Aggiungiamo qui che se invece di partire dalle funzioni f' , f'' , f''' si fosse partiti da tre altre φ' , φ'' , φ''' , avremmo ottenuta un'altra serie (finita od infinita) di *valori eccezionali*:

$$k'_1, k'_2, k'_3, \dots$$

facente parte del gruppo G ed una corrispondente serie di *soluzioni eccezionali*:

$$p'_1, q'_1, r'_1; \quad p'_2, q'_2, r'_2; \quad p'_3, q'_3, r'_3; \dots;$$

e quindi un'altra serie di integrali regolari linearmente indipendenti delle

(*) Vedi ad es.: CESÀRO; l. c. § 4.

(**) Vedi ad es.: CESÀRO; l. c. § 14.

equazioni (1), (2) della forma :

$$\left. \begin{aligned} u'_i &= \left\{ \lambda'_i \cos(t\sqrt{h'_i}) + \mu'_i \sin(t\sqrt{h'_i}) \right\} p'_i, \\ v'_i &= \left\{ \lambda'_i \cos(t\sqrt{h'_i}) + \mu'_i \sin(t\sqrt{h'_i}) \right\} q'_i, \\ w'_i &= \left\{ \lambda'_i \cos(t\sqrt{h'_i}) + \mu'_i \sin(t\sqrt{h'_i}) \right\} r'_i, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

con

$$h'_i = - \frac{k'_i L}{\rho}.$$

Se facciamo :

$$\lambda_i = 1, \quad \mu_i = 0, \quad \lambda'_i = 0, \quad \mu'_i = \frac{1}{\sqrt{h'_i}},$$

le serie di integrali (29), (30) divengono rispettivamente :

$$u_i = p_i \cos(t\sqrt{h_i}), \quad v_i = q_i \cos(t\sqrt{h_i}), \quad w_i = r_i \cos(t\sqrt{h_i}). \quad (29)'$$

$$u'_i = \frac{p'_i}{\sqrt{h'_i}} \sin(t\sqrt{h'_i}), \quad v'_i = \frac{q'_i}{\sqrt{h'_i}} \sin(t\sqrt{h'_i}), \quad w'_i = \frac{r'_i}{\sqrt{h'_i}} \sin(t\sqrt{h'_i}). \quad (30)'$$

18. Se le espressioni :

$$\left. \begin{aligned} f &= \sum_1^r p_i, & f'' &= \sum_1^r q_i, & f''' &= \sum_1^r r_i, \\ \varphi &= \sum_1^s p'_i, & \varphi'' &= \sum_1^s q'_i, & \varphi''' &= \sum_1^s r'_i, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

per particolari valori di r ed s si annullano identicamente in tutti i punti del corpo elastico, gli integrali (29)' saranno r soltanto e quelli (30)' saranno s , e le funzioni :

$$u(x, y, z, t) = \sum_1^r p_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^s \frac{p'_i}{\sqrt{h'_i}} \sin(t\sqrt{h'_i}),$$

$$v(x, y, z, t) = \sum_1^r q_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^s \frac{q'_i}{\sqrt{h'_i}} \sin(t\sqrt{h'_i}),$$

$$w(x, y, z, t) = \sum_1^r r_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^s \frac{r'_i}{\sqrt{h'_i}} \sin(t\sqrt{h'_i}),$$

rappresenteranno evidentemente il moto del corpo elastico corrispondente agli spostamenti iniziali arbitrarii

$$u(x, y, z, 0) = f', \quad v(x, y, z, 0) = f'', \quad w(x, y, z, 0) = f''',$$

e alle velocità iniziali arbitrarie

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi', \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi'', \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi'''.$$

Nel caso contrario, che è il più generale, in cui le (31) non sono mai identicamente nulle in tutto S , gli integrali (29)', (30)' saranno infiniti e le espressioni:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sum_1^\infty p_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^\infty \frac{p'_i}{\sqrt{h_i}} \sin(t\sqrt{h_i}) \\ v(x, y, z, t) &= \sum_1^\infty q_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^\infty \frac{q'_i}{\sqrt{h_i}} \sin(t\sqrt{h_i}) \\ w(x, y, z, t) &= \sum_1^\infty r_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \sum_1^\infty \frac{r'_i}{\sqrt{h_i}} \sin(t\sqrt{h_i}), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

rappresenteranno il moto del corpo elastico, corrispondente agli spostamenti iniziali arbitrari f', f'', f''' ed alle velocità iniziali arbitrarie $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, tutte le volte che le serie ai secondi membri delle (32) siano convergenti in ugual grado in tutto S e σ e derivabili da per tutto due volte rispetto a t , due volte rispetto ad x, y, z prese anche insieme, e che si abbia:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \sum_1^\infty p_i = f', & v(x, y, z, 0) &= \sum_1^\infty q_i = f'', \\ w(x, y, z, 0) &= \sum_1^\infty r_i = f'''. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty p'_i = \varphi', \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty q'_i = \varphi'', \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty r'_i = \varphi'''. \quad (34)$$

S'intende poi che, ove si sappia che soltanto le prime tre delle (31) oppure soltanto le altre tre si annullano identicamente in tutto S , le prime tre serie ai secondi membri delle (32) oppure soltanto le altre tre si ridurranno a somme e quindi le (33) oppure le (34) saranno certamente vere.

19. I precedenti ragionamenti suppongono che le due terne di funzioni:

$$f', f'', f'''; \quad \varphi', \varphi'', \varphi'''$$

soddisfino rispettivamente alle sei condizioni poste al § 2 per la prima terna. Nel caso contrario dovremo sostituire alle funzioni precedenti le altre:

$$\begin{aligned} f'_1 &= f' + C_2 z - C_3 y + K_1, & f''_1 &= f'' + C_3 x - C_1 z + K_2, \\ f'''_1 &= f''' + C_1 y - C_2 x + K_3 \\ \varphi'_1 &= \varphi' + C'_2 z - C'_3 y + K'_1, & \varphi''_1 &= \varphi'' + C'_3 x - C'_1 z + K'_2, \\ \varphi'''_1 &= \varphi''' + C'_1 y - C'_2 x + K'_3, \end{aligned}$$

dove le costanti $C_1, C_2, C_3; K_1, K_2, K_3; C_1', \dots; K_1' \dots$ saranno determinate dai due sistemi di equazioni lineari che si ottengono esprimendo che le $f_1', f_1'', f_1'''; \varphi_1', \varphi_1'', \varphi_1'''$ soddisfano alle rammentate condizioni del § 2. Allora invece delle (32) avremo le formole:

$$\left. \begin{aligned} u &= (C_3 y - C_2 z - K_1) + t(C_3' y - C_2' z - K_1') + \sum_1^{\infty} p_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \frac{p_i'}{\sqrt{h_i'}} \sin(t\sqrt{h_i'}) \\ v &= (C_1 z - C_3 x - K_2) + t(C_1' z - C_3' x - K_2') + \sum_1^{\infty} q_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \frac{q_i'}{\sqrt{h_i'}} \sin(t\sqrt{h_i'}) \\ w &= (C_2 x - C_1 y - K_3) + t(C_2' x - C_1' y - K_3') + \sum_1^{\infty} r_i \cos(t\sqrt{h_i}) + \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \frac{r_i'}{\sqrt{h_i'}} \sin(t\sqrt{h_i'}), \end{aligned} \right\} \quad (32)'$$

ed invece delle (33), (34) le altre:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= (C_3 y - C_2 z - K_1) + \sum_1^{\infty} p_i = (C_3 y - C_2 z - K_1) + f_1' = f' \\ v(x, y, z, 0) &= (C_1 z - C_3 x - K_2) + \sum_1^{\infty} q_i = (C_1 z - C_3 x - K_2) + f_1'' = f'' \\ w(x, y, z, 0) &= (C_2 x - C_1 y - K_3) + \sum_1^{\infty} r_i = (C_2 x - C_1 y - K_3) + f_1''' = f''' \end{aligned} \right\} \quad (33)'$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= (C_3' y - C_2' z - K_1') + \sum_1^{\infty} p_i' = (C_3' y - C_2' z - K_1') + \varphi_1' = \varphi' \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} &= (C_1' z - C_3' x - K_2') + \sum_1^{\infty} q_i' = (C_1' z - C_3' x - K_2') + \varphi_1'' = \varphi'' \\ \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} &= (C_2' x - C_1' y - K_3') + \sum_1^{\infty} r_i' = (C_2' x - C_1' y - K_3') + \varphi_1''' = \varphi''' \end{aligned} \right\} \quad (34)'$$

Pesaro, Maggio 1897.