PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLIII.

I. *Ein Verfahren zur Bestimmung der inneren
Reibung von Flüssigkeiten;
von Oskar Emil Meyer.*

Die Coulomb'sche Methode¹⁾ zur Bestimmung der inneren Reibung von Flüssigkeiten empfiehlt sich sowohl durch die Einfachheit, als auch durch die Genauigkeit der Beobachtungen. Sie leidet aber an dem Uebelstande, dass die mathematische Theorie auf grosse Schwierigkeiten stösst. Ich habe deshalb schon vor 30 Jahren die Rechnung für ein etwas abgeändertes Beobachtungsverfahren durchgeführt, bei welchem jene Schwierigkeiten vermieden werden. Dieses Verfahren entspricht der von den Herren H. v. Helmholtz und v. Piotrowski²⁾ getroffenen Einrichtung insofern, als der schwingende Apparat nicht in die Flüssigkeit eingetaucht, sondern die Flüssigkeit in einen inneren Hohlraum desselben eingegossen wird. Doch behielt ich von der ursprünglichen Einrichtung Coulomb's die Scheibenform bei. Der Apparat besteht also aus zwei kreisrunden ebenen Scheiben, welche durch einen flachen cylindrischen Rand miteinander verbunden sind; er wird mit der Flüssigkeit gefüllt und so aufgehängt, dass er, wie die Coulomb'sche Scheibe, schwingen kann.

Meine Absicht, die Methode praktisch anzuwenden, gelangte nicht zur Ausführung, und darum habe ich die Theorie

1) Coulomb, Mém. de l'Inst. nat. 3. p. 246. Jahr IX.

2) H. v. Helmholtz u. G. v. Piotrowski, Sitzungsber. d. Wien. Acad. 40. p. 607. 1860.

nicht veröffentlicht. Als aber Hr. Walter König¹⁾ verbesserte Formeln für das Coulomb'sche Verfahren aufstellte, konnte ich meine Rechnungen zum Theil verwerthen.²⁾ Ich wünschte deshalb eine weitere Prüfung durch die Beobachtung. Dieser Mühe unterzog sich Hr. Mützel, welcher eine sehr erfreuliche Uebereinstimmung seiner Beobachtungen mit meinen Formeln fand. Da er in einer gleichzeitig erscheinenden Abhandlung³⁾ seine Ergebnisse mittheilt, so will ich hier die Theorie der Methode entwickeln und die Endformeln herleiten, nach denen er die Werthe der Reibungscoëfficienten berechnet hat.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichungen, von welchen wir auszugehen haben, kann ich mich einfach auf eine frühere Abhandlung⁴⁾ beziehen, in welcher ich die Theorie der Coulomb'schen Methode zu entwickeln unternahm. Denn unsere jetzige Aufgabe verlangt, dass wir dieselben Functionen wie damals aufsuchen; der Unterschied besteht nur darin, dass die Kenntniss der Functionen für einen anderen Theil des Raumes gefordert wird, als früher. Bei Coulomb's Verfahren schwingt eine Scheibe, also ein flacher Cylinder in der Flüssigkeit, bei Mützel's Versuchen befand sich die Flüssigkeit im Inneren eines Hohlcylinders und nimmt an dessen Schwingungen um seine Axe Theil. Die zunächst gesuchte Grösse, die Winkelgeschwindigkeit der oscillirenden Flüssigkeit, wird also bei Anwendung des älteren Verfahrens für den Raum ausserhalb, bei den neueren Versuchen innerhalb des Cylinderraumes gesucht.

Diese Winkelgeschwindigkeit ψ ist mit der Zeit t veränderlich und hängt ausserdem von den Coordinaten des Ortes x und r so ab, dass sie einer partiellen Differentialgleichung genügt, welche bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von ψ nach Gl. (6) § 4 der angeführten Abhandlung:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{\partial r^2 \psi}{r \partial r} \right) \right\}$$

1) Walter König, Wied. Ann. 32. p. 193. 1887.

2) O. E. Meyer, Wied. Ann. 32. p. 642. 1887.

3) Kurt Mützel, Wied. Ann. 43. p. 15. 1891. Bresl. Inaug.-Diss.

4) O. E. Meyer, Journ. f. r. u. ang. Math. 59. p. 229. 1861.

oder:
$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\}$$

lautet. Hierin sind ρ und η constante Grössen, erstere die Dichtigkeit, letztere der Reibungscoefficient der Flüssigkeit. Ueber das Coordinatensystem bemerke ich, dass r den Abstand von der Axe des Cylinders, welche zugleich die Drehungsaxe ist, bedeutet; die Coordinate x ist aber die senkrechte Entfernung von einer festen wagrechten Ebene, und zwar wähle ich dazu die durch die Mitte des cylindrischen Hohlraums gehende Ebene.

Bezeichne ich den Halbmesser des cylindrischen Hohlraums mit R , seine Höhe mit $2c$, so wird die Function ψ gesucht für das durch $-c < x < c$ und $0 < r < R$ angegebene Bereich ihrer Argumente. Um sie innerhalb dieses Bereiches zu bestimmen, dient neben der angegebenen Differentialgleichung noch die Bedingung, dass der Differentialquotient:

$$\frac{d\psi}{dr} = 0 \quad \text{für } r = 0,$$

also für Punkte der Axe verschwinde. Die Nothwendigkeit dieser Bedingung, welche auf verschiedene Weise bewiesen werden kann, lässt sich auch unmittelbar aus der allgemeinen Differentialgleichung erkennen, weil sie ohne diese Bedingung unzulässige Folgerungen für den Fall $r = 0$ liefern würde.

An den äusseren Grenzen jenes Bereiches ist anderen Bedingungsgleichungen zu genügen, durch welche die Beziehungen zwischen der Bewegung der Flüssigkeit und der des Apparates ausgedrückt werden. Nennen wir φ den Winkel, um welchen der Apparat sich zur Zeit t aus seiner Gleichgewichtsstellung heraus gedreht hat, so ist die Winkelgeschwindigkeit des Apparates durch den Differentialquotienten dieser Grösse nach der Zeit gegeben. Dieser von den Coordinaten x und r unabhängigen, nur mit der Zeit t veränderlichen Winkelgeschwindigkeit muss an allen drei Grenzflächen:

$$r = R \quad x = c \quad x = -c,$$

an welchen die Flüssigkeit den Apparat benetzt, die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die äusserste Flüssigkeitsschicht bewegt, gleich werden:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt},$$

falls wir annehmen, dass die Flüssigkeit an den festen Flächen nicht gleitet, sondern fest haftet. Diese Annahme entspricht nach den bisherigen Beobachtungen für die von Mützel benutzten Stoffe, Messing und Glas in Berührung mit wässerigen Flüssigkeiten, der Wahrheit.

Der Drehungswinkel φ des Apparats wird als Function der Zeit t durch eine Differentialgleichung bestimmt, in welche die Drehungsmomente der auf den Apparat einwirkenden Kräfte eintreten. Auch diese Gleichung kann ich meiner früheren Abhandlung entnehmen¹⁾, jedoch mit einer geringen Veränderung; sie nimmt für den jetzigen Zweck die Form an:

$$M \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\tau\varphi - 2\pi\eta \left\{ R^3 \int_{-c}^c dx \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)_{r=R} + \int_0^R dr r^3 \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_{x=c} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)_{x=-c} \right] \right\}$$

Hierin ist M das Trägheitsmoment des Apparats und τ das Torsionsmoment des Fadens oder Drahts, an welchem der Apparat aufgehängt ist; für die letztere Grösse kann, wenn der Apparat an zwei Fäden hängt, unter der Voraussetzung unendlich kleiner Schwingungen das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung gesetzt werden.

Die letzten Glieder der Differentialgleichung enthalten die Summe der Drehungsmomente, welche auf die drei inneren Flächen des Apparats durch die Reibung der angrenzenden Flüssigkeitsschichten ausgeübt werden; und zwar bezieht sich das erste Integral auf die cylindrische Randfläche, das zweite auf den Deckel und das dritte auf den Boden des schwingenden Gefässes. Alle drei Glieder unterscheiden sich von den entsprechenden in der früheren Formel durch ihr Vorzeichen, weil jetzt die Reibung an den inneren, wie früher an den äusseren Flächen des cylindrischen

1) O. E. Meyer, Journ. f. Math. 59. p. 244. Gl. (7). § 4. 1861. Wied. Ann. 32. p. 646. 1887.

Apparats, zu berechnen ist; die Normale jeder der Flächen liegt also entgegengesetzt gerichtet, und deshalb ist das Vorzeichen des Differentialquotienten der Winkelgeschwindigkeit ψ nach der senkrecht zur Fläche gerichteten Coordinate jetzt gegen früher geändert.

Durch diese Formeln sind die gesuchten Grössen ψ und φ völlig bestimmt, wenn die zur Zeit $t=0$ gültigen Werthe:

$$\psi = \Psi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Psi_1, \quad \varphi = \Phi$$

gegeben sind. Ψ ist eine Function von x und r , die beiden anderen Grössen Ψ_1 und Φ sind constant.

Der partiellen Differentialgleichung genügt die particulare Lösung¹⁾:

$$\psi = (A \cos px + B \sin px) P(r) e^{-m^2 t},$$

in welcher die Function $P(r)$ die Differentialgleichung:

$$0 = \frac{dP(r)}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dP(r)}{dr} + q^2 P(r)$$

erfüllt, während A und B constante Grössen bedeuten; die Parameter m, p, q sind durch die Gleichung:

$$m^2 p = (p^2 + q^2) \eta$$

miteinander verbunden. Durch Integration ergibt sich:

$$P(r) = S(qr) + D Q(qr),$$

worin D eine constante Grösse ist; dagegen sind S und Q die Functionen:

$$S(qr) = \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1-z^2} e^{i q r z},$$

$$Q(qr) = S(qr) \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3 (S(qr))^2};$$

der letzteren kann auch die Form:

$$Q(qr) = \int_1^{\infty} dz \sqrt{z^2-1} e^{i q r z}$$

gegeben werden, wenn das Vorzeichen der Grösse:

$$iq = q \sqrt{-1} = \sqrt{p^2 - \frac{q}{\eta} m^2}$$

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. 32. p. 647. 1887.

so gewählt werden kann, dass ihr reeller Theil negativ ausfällt.

Für unsere jetzige Aufgabe, die Bewegung der Flüssigkeit im Inneren des Cylinders zu berechnen, fällt die Function Q , welche bei einer früheren Untersuchung¹⁾ über die Bewegung der ausserhalb befindlichen Flüssigkeit allein zu verwenden war, ganz fort. Denn sie genügt nicht der Bedingung, dass sie für $r = 0$ verschwinden soll. Diese Eigenschaft besitzt aber die Function S . Demnach ist $D=0$ und:

$$P(r) = S(qr) = \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1-z^2} e^{iqrz} = \int_{-1}^{+1} dz \sqrt{1-z^2} \cos qrz.$$

Die Bestimmung der übrigen Constanten gestaltet sich verschieden, je nachdem die particulare Lösung eine Bewegung darstellt, welche der Apparat und die Flüssigkeit gemeinsam ausführen, oder aber eine solche Bewegung, dass allein die Flüssigkeit an ihr theilhaft ist, ohne dass der Apparat mitbewegt wird.

Untersuchen wir zunächst ein particulares Integral der ersteren Art, so muss der entsprechende Winkel φ durch eine Formel von der Gestalt:

$$\varphi = -\frac{C}{m^2} e^{-m^2 t}$$

und die Winkelgeschwindigkeit des Apparates durch:

$$\frac{d\varphi}{dt} = C e^{-m^2 t}$$

dargestellt werden können, wo C constant ist und m den früheren Werth hat. Es ist aber sofort klar, dass wir der Forderung, es solle sowohl für $r = R$ als auch für $x = \pm c$:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt}$$

gemacht werden, nicht durch die angenommenen Werthe der beiden Functionen ψ und φ genügen können; wenigstens ist es unmöglich, so lange wir uns auf eine einzige particulare Lösung beschränken.

Wohl aber gelingt der Versuch, durch eine unendliche Reihe von particularen Integralen den nothwendigen Bedin-

1) O. E. Meyer, l. c. p. 648.

gungen Rechnung zu tragen. Wir setzen also, um zunächst den Bedingungen für $x = \pm c$ zu genügen, ein Glied an, in welchem $q = 0$ angenommen wird, und setzen darauf für den Parameter p der Reihe nach die Werthe:

$$p = \frac{\pi}{2c}, \quad \frac{3\pi}{2c}, \quad \frac{5\pi}{2c}, \dots, \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c}, \dots,$$

so erhalten wir die Reihe:

$$\psi = \left\{ C \frac{\cos px}{\cos pc} + \sum B_n \sin \left(\frac{2n-1}{2} \frac{c-x}{c} \pi \right) S(qr) \right\} e^{-m^2 t},$$

in welcher das Summenzeichen sich auf alle positiven ganzzahligen Werthe von n bezieht; die Bezeichnung ist so gewählt, dass die Bedeutung von p und q fortan durch die Formeln:

$$p^2 = \frac{q}{\eta} m^2, \quad q^2 = \frac{q}{\eta} m^2 - \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \right)^2$$

bestimmt sein soll. Durch die Summe dieser Reihe, welche der Bedingung, für $x = \pm c$ von r unabhängig zu werden, bereits genügt, können wir auch erreichen, dass sie für $r = R$ von x unabhängig werde, sobald wir die Constanten B_n aus folgender, nach trigonometrischen Functionen fortschreitenden Reihenentwicklung:

$$C \left(1 - \frac{\cos px}{\cos pc} \right) = \sum B_n \sin \left(\frac{2n-1}{2} \frac{c-x}{c} \pi \right) S(qR)$$

bestimmen. So erhält man die Formel:

$$\psi = CF(m, x, r) e^{-m^2 t},$$

in welcher:

$$F(m, x, r) = \frac{\cos px}{\cos pc} + \sum b \sin \left(\frac{2n-1}{2} \frac{c-x}{c} \pi \right) \frac{S(qr)}{S(qR)}$$

$$\text{und} \quad b = \frac{1}{(2n-1)\pi} \cdot \frac{16p^2 c^2}{4p^2 c^2 - (2n-1)^2 \pi^2} = \frac{4}{2n-1} \frac{p^2}{\pi q^2}$$

gesetzt ist, als Ausdruck der gesuchten Function, welche den Bedingungen, sowohl für $x = \pm c$, als auch für $r = R$ den Werth:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt} = C e^{-m^2 t}$$

anzunehmen, Genüge leistet.

Der in dieser particularen Lösung enthaltene Parameter m und die von ihm abhängigen Grössen p und q werden bestimmt durch Einsetzen von φ und ψ in die Dif-

ferentialgleichung, welche sich auf die Bewegung des Apparates bezieht. So erhält man die Gleichung:

$$0 = M m^2 + \frac{r}{m^2} + \pi \eta R^4 p \operatorname{tg} p c - 2 \pi \eta \sum b O(R),$$

in welcher:

$$\Theta(r) = \frac{1}{S(qr)} \left\{ \frac{4cr^3}{(2n-1)\pi} \cdot \frac{dS(qr)}{dr} - \frac{2n-1}{c} \pi \int_0^r dr r^3 S(qr) \right\}$$

gesetzt ist. Dieser Ausdruck lässt sich wesentlich vereinfachen durch Benutzung der Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2 S(qr)}{dr^2} + \frac{8}{r} \frac{dS(qr)}{dr} + q^2 S(qr).$$

aus welcher durch Integration die Beziehung:

$$0 = r^3 \frac{dS(qr)}{dr} + q^2 \int_0^r S(qr) r^3 dr$$

folgt. So ergibt sich:

$$\Theta(r) = b c R^3 S'(qr),$$

wenn:

$$S'(qr) = \frac{1}{S(qr)} \frac{dS(qr)}{dr}$$

gesetzt wird. Wir haben also schliesslich zur Bestimmung von m die Gleichung:

$$0 = M m^2 + \frac{r}{m^2} + \pi \eta R^4 p \operatorname{tg} p c - 2 \pi \eta c R^3 \sum b^3 S'(qR),$$

in welcher, wie schon oben, gesetzt ist:

$$b = \frac{4}{2n-1} \frac{p^2}{\pi q^2}; \quad q^2 = p^2 - \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \right)^2; \quad p^2 = \frac{g}{\eta} m^2.$$

Ehe wir die Werthe von m aufsuchen, welche dieser Gleichung genügen, betrachten wir, um die Theorie nicht unvollständig zu lassen, die Bewegungen, welche die Flüssigkeit unabhängig von dem Apparate ausführen kann. Diese Bewegungen werden durch particulare Auflösungen von der Form:

$$\psi = A \sin \left(\nu \frac{x}{c} \pi \right) S(xr) e^{-\mu^2 t}$$

dargestellt, wenn ν eine ganze Zahl und x ein Parameter ist, welcher durch die Gleichung:

$$0 = S(xR)$$

bestimmt wird, während beide Grössen mit μ durch die Formel:

$$u^2 = \frac{\eta}{\varrho} \left(x^2 + \left(\nu \frac{\pi}{c} \right)^2 \right)$$

verbunden sind. A ist eine Constante, welche vorläufig unbestimmt bleibt. Dass Bewegungen, welche die Flüssigkeit in der durch diese Formeln angedeuteten Weise ausführt, keinen Einfluss auf den Apparat ausüben können, ist leicht ohne Rechnung einzusehen; denn an den Wandungen des hohlen Cylinders ist überall $\psi = 0$, und die auf die obere Hälfte des Apparates wirkende Reibung hält der auf die untere ausgeübten das Gleichgewicht.

Vereinigen wir alle particularen Lösungen, so erhalten wir als vollständigen Werth der Winkelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens die doppelten Summen:

$$\psi = \sum C F(m, x, r) e^{-m^2 t} + \sum \sum A \sin \left(\nu \frac{x}{c} \pi \right) S(xr) e^{-\mu^2 t};$$

hierin ist:

$$F(m, x, r) = \frac{\cos p x}{\cos p c} + \sum (-1)^{n+1} b \cos \left(\frac{2n-1}{2} \frac{x}{c} \pi \right) \frac{S(qr)}{S(qR)},$$

und es sind die Summen über alle positiven ganzen Zahlen n und ν , sowie über alle Wurzeln m und x der angegebenen transcendenten Gleichungen auszudehnen. Für die Winkelgeschwindigkeit des Apparates und den Werth des Drehungswinkels φ erhalten wir die einfacheren Formeln:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum C e^{-m^2 t}, \quad \varphi = - \sum \frac{C}{m^2} e^{-m^2 t}.$$

Die bis jetzt als willkürlich angesehenen constanten Factoren C und A , welche für jedes einzelne Glied einen von den übrigen verschiedenen Werth annehmen können, müssen aus den für $t = 0$ geltenden Bedingungen des Anfangszustandes bestimmt werden. Das kann für die Constanten A sehr leicht nach bekannten Methoden geschehen, sodass wir erhalten:

$$Ac \int_0^R dr r^3 (S(xr))^2 = \int_{-c}^c dx \sin \left(\nu \frac{x}{c} \pi \right) \int_0^R dr r^3 \Psi S(xr).$$

Dass dieses Verfahren hier zulässig ist, erkennen wir zunächst aus der Bemerkung, dass das Integral:

$$\int_{-c}^c dx F(m, x, r) \sin \left(\nu \frac{x}{c} \pi \right) = 0$$

ist, weil $F(m, x, r)$ eine gerade Function von x ist; ferner ist, wenn κ_1 und κ_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung:

$$S(\kappa R) = 0$$

sind, auch das Integral:

$$\int_0^R dr r^3 S(\kappa_1 r) S(\kappa_2 r) = 0.$$

wie leicht aus der Differentialgleichung bewiesen werden kann; und endlich ist bekanntlich:

$$\int_{-c}^c dx \sin\left(\nu \frac{x}{c} \pi\right) \sin\left(\nu' \frac{x}{c} \pi\right) = 0,$$

wenn ν und ν' voneinander verschiedene ganze Zahlen sind.

Zur Bestimmung der Constanten C dient ausser diesen noch folgende Formel:

$$(p_1^2 - p_2^2) \int_{-c}^c dx \int_0^R dr r^3 F(m_1, x, r) F(m_2, x, r) \\ = \frac{1}{2} R^4 (p_1 \operatorname{tg} p_1 c - p_2 \operatorname{tg} p_2 c) - R^3 c \sum (b_1^2 S'(q_1 R) - b_2^2 S'(q_2 R)),$$

in welcher:

$$b_1 = \frac{4}{2n-1} \frac{p_1^2}{\pi q_1^2}, \quad b_2 = \frac{4}{2n-1} \frac{p_2^2}{\pi q_2^2}$$

gesetzt ist. Wenn nun m_1 und m_2 beide der zur Bestimmung von m aufgestellten Gleichung genügen, so ist:

$$\int_{-c}^c dx \int_0^R dr r^3 F(m_1, x, r) F(m_2, x, r) = \frac{1}{2\pi\varphi} \left\{ \frac{\tau}{m_1^2 m_2^2} - M \right\},$$

falls m_1 und m_2 voneinander verschieden sind. Somit ist durch die Formel:

$$C \left\{ 2\pi\varphi \int_{-c}^c dx \int_0^R dr r^3 (F(m, x, r))^2 + M - \frac{\tau}{m^2} \right\} \\ = 2\pi\varphi \int_{-c}^c dx \int_0^R dr r^3 \Psi F(m, x, r) + M \Psi_1 + \frac{\tau}{m^2} \Psi$$

auch C , die letzte der Constanten bestimmt; und damit sind die gesuchten Functionen, die Winkelgeschwindigkeit ψ der Flüssigkeit und der Ablenkungswinkel φ des Apparates, vollständig gefunden.

Um die Natur dieser Functionen übersehen zu können, haben wir die Wurzeln m der Gleichung:

$$0 = M m^2 + \frac{\tau}{m^2} + \pi \eta R^4 p \operatorname{tg} p c - 2 \pi \eta c R^3 \sum b^2 S'(q R)$$

zu untersuchen. Die hier vorkommende Function $S(qr)$ nähert sich mit wachsendem Werthe ihres Arguments, wie die Differentialgleichung für $r = \infty$ erkennen lässt, der Proportionalität mit $\cos qr$; es ist also für grosse Werthe von R annäherungsweise:

$$S'(qr) = -q \operatorname{tg} q R.$$

Hieraus erkennen wir, dass die beiden letzten Glieder obiger Gleichung einander sehr ähnlich gebildet sind, und dürfen schliessen, dass beide die Eigenschaft besitzen, für gewisse Werthe ihrer Argumente ∞ zu werden und bei weiterem Wachsen des Arguments unmittelbar darauf den Werth $-\infty$ anzunehmen. Diese Werthe sind für die Function $p \operatorname{tg} p c$ durch:

$$p = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \quad \text{oder} \quad q = 0$$

gegeben; für die andere Function sind es die Werthe, für welche $S(qr)$ verschwindet; auch diese Werthe sind sämmtlich reell. Lassen wir also in der Function, welche die rechte Seite unserer Gleichung bildet, m und die von ihm abhängenden Grössen:

$$p^2 = \frac{q}{\eta} m^2, \quad q^2 = p^2 - \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \right)^2$$

von 0 bis ∞ auf reellem Wege stetig wachsen, so treffen wir in regelmässiger Wiederkehr Stellen, an denen die Function ∞ und gleich darauf $-\infty$ wird. Zwischen je zwei solchen Stellen muss ein Punkt liegen, an welchem die betrachtete Function durch 0 geht. So finden wir unendlich viele reelle positive Wurzeln m , neben welchen die ihrem absoluten Werthe nach gleichen negativen unberücksichtigt bleiben dürfen.

Bei dieser Beweisführung ist freilich zu beachten, dass zugleich mit $\operatorname{tg} p c$ auch der Factor des letzten Gliedes, in welchem:

$$b = \frac{4}{2n-1} \frac{p^2}{\pi q^2}$$

ist, den Werth ∞ erreicht, und zwar ist der Werth der Grösse $b^2 S'(qR)$ von derselben Ordnung (q^{-2}) des Unendlichen, wie der von $\operatorname{tg} pc$. Ein Wechsel des Vorzeichens findet hier nicht statt. Demnach gilt die soeben aufgestellte Behauptung über den Verlauf der Function nicht allgemein, aber doch unter der Bedingung, dass die Höhe $2c$ des cylindrischen Gefässes gering ist im Vergleiche zu seinem Halbmesser R . Diese Bedingung war bei Hrn. Mützel's Versuchen erfüllt.

Ausser den unendlich vielen reellen m genügen der Gleichung im allgemeinen noch vier complexe von der Form

$$m = a + bi, \quad a - bi, \quad -a + bi, \quad -a - bi,$$

wo a und b reell und positiv sind. Auch diese können unter Umständen, welche in unserem Falle nicht zutreffen, reell werden; niemals aber können mehr als vier complexe Wurzeln m auftreten. Der Beweis für diese Thatsache kann auf dieselbe Weise erbracht werden, wie ich es früher¹⁾ für ähnliche transcendente Gleichungen gethan habe.

Diesen complexen Werthen des Parameters entsprechen particulare Lösungen, welche die Functionen:

$$e^{-(a^2-b^2)t} \cos 2abt \quad \text{und} \quad e^{-(a^2-b^2)t} \sin 2abt$$

enthalten, also periodische Schwingungen darstellen, deren Schwingungsdauer T und logarithmisches Decrement λ durch die Formeln:

$$2abT = \pi, \quad (a^2 - b^2)T = \lambda$$

bestimmt sind. Die anderen particularen Lösungen beziehen sich auf die nichtperiodischen Bewegungen, welche mit wachsender Zeit rascher abnehmen und daher bald nach dem Beginne des Versuches zur Ruhe gelangen. Diese particularen Lösungen kommen daher für die Berechnung der Beobachtungen nicht in Betracht.

Um die Schwingungszeit und das Decrement für die periodischen Bewegungen zu berechnen, haben wir in unserer Gleichung z. B. $m = a + bi$, also:

$$m^2 = \frac{\lambda + \pi i}{T}, \quad p^2 = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\lambda + \pi i}{T}$$

1) O. E. Meyer, Journ. f. r. u. ang. Math. 62. p. 201. 1863.

und: $q^2 = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\lambda + \pi i}{T} - \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \right)^2 = \frac{\varrho}{\eta T} (w + vi)^2$

zu setzen, falls wir v und w durch die Formeln:

$$v^2 - w^2 = h^2 T - \lambda, \quad 2vw = \pi$$

bestimmen, wo zur Abkürzung:

$$h = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$$

geschrieben ist. Die Function:

$$\operatorname{tg} pc = \operatorname{tg} \left((a + bi) c \sqrt{\frac{\varrho}{\eta}} \right)$$

nähert sich mit wachsendem c dem Grenzwerthe i , welchen ich für sie einführen darf, wenn die Function:

$$e^{-2bc\sqrt{\varrho/\eta}}$$

gegen 1 vernachlässigt werden kann. Ebenso setze ich unter der Voraussetzung eines grossen Werthes von R :

$$S'(qr) = -q \operatorname{tg} qR = -qi = (v - wi) \sqrt{\frac{\varrho}{\eta T}}.$$

Dadurch verschwinden aus der Gleichung alle transcendenten Functionen, und sie lässt sich in folgende Form bringen:

$$0 = M \frac{\lambda + \pi i}{T} + \tau T \frac{\lambda - \pi i}{\pi^2 + \lambda^2} + \pi \sqrt{\eta \varrho} R^4 (a - b) \\ - 32 \sqrt{\frac{\eta \varrho}{T}} c R^3 \sum \frac{(\lambda + \pi i)(\lambda - \pi i - h^2 T)(v + wi)}{\pi (2n-1)^2 (v^2 + w^2)^3}.$$

Zerlegt man diese Formel in ihren reellen und in ihren imaginären Theil, so erhält man zwei Gleichungen, aus welchen a und b oder λ und T berechnet werden könnten.

Da ich aber nur das Ziel verfolge, eine Formel herzu-
leiten, welche zur Berechnung des Reibungscoefficienten η
aus den beobachteten Werthen von λ und T dienen kann,
so verzichte ich auf die Durchführung dieser Rechnung.
Für unseren Zweck ist es vorthellhaft, das Drehungsmoment
 τ aus den Formeln fortzuschaffen. Da nämlich der Apparat
mit seinem flüssigen Inhalt an zwei Fäden aufgehängt war
und unter dem Einflusse der Schwere hin und her schwang,
so hat τ bei jedem Versuche einen anderen Werth. Wir
multipliciren daher den reellen Theil der Formel mit π ,
den imaginären mit λ und addiren beide; dadurch erhalten
wir eine neue Formel, welche ich nicht vollständig angeben

will. Ich vernachlässige nämlich das Quadrat der kleinen Grösse λ , deren Werth bei Hrn. Mützel's Versuchen zwischen 0,15 und 0,20 lag, und erhalte die Formel:

$$2 M \lambda = \sqrt{\eta \rho T} \left\{ R^4 \sqrt{\frac{(\pi - \lambda)^3}{2}} + 2 c R^3 K \right\},$$

in welcher die Grösse K die Bedeutung hat, dass:

$$K = \sum \left(\frac{4}{2n-1} \right)^2 \frac{(\pi^2 - 3\lambda h^2 T) w - \pi(2\lambda + h^2 T) v}{(v^2 + w^2)^3}$$

ist. Nach dieser Formel kann zunächst $\sqrt{\eta \rho T}$ und daraus der Reibungscoefficient η berechnet werden.

Man lässt zunächst das letzte, von der Höhe $2c = \delta$ abhängige Glied fort, um einen angenähert richtigen Werth von η zu erhalten. Mit diesem berechnet man h für $n = 1, 2, 3$ u. s. w., löst dann die beiden Gleichungen auf, welche v und w bestimmen, und berechnet so viele Glieder der Reihe K , wie erforderlich scheinen, um einen hinlänglich genauen Werth von η zu erhalten. Nöthigenfalls wiederholt man diese Rechnung.

Die Uebereinstimmung dieser Formeln mit den Ergebnissen der Beobachtungen hat Hr. Mützel nachgewiesen. Aus seinen Zahlen ergibt sich gleichfalls, dass die eingeführten Vernachlässigungen zulässig waren. Annäherungsweise ist:

$$b^2 = ab = \frac{\pi}{2T}, \text{ also } 2bc \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} = c \sqrt{\frac{2\pi\rho}{\eta T}}.$$

Setzt man hierin $c = 1,23 \text{ cm}$, $\rho = 1$, $\eta = 0,010 \square \text{ cm}$, $T = 28,5 \text{ Secunden}$, so findet man den Zahlenwerth 5,78; es ist aber:

$$e^{-5,78} = 0,003$$

also wirklich, wie angenommen wurde, zu vernachlässigen.