8. *Beiträge zur Theorie der geschweiften Strahlenbüschel und ihrer Wellenflächen; von Ludwig Matthiessen.*

Die analytische Untersuchung der Bahnen von Lichtstrahlenbüscheln und ihrer Wellenflächen in nicht krystallinischen, aber doch heterogen-isotropen Medien mit einem von Schicht zu Schicht stetig variabelem Lichtbrechungsvermögen ist bei dem wissenschaftlichen Bedürfnisse einer mathematischen Verfolgung der Gesetzmässigkeit der in der Natur häufig auftretenden „krummen Lichtstrahlen“ (curved rays) für die angewandte Dioptrik von besonderer Wichtigkeit. Solche krummstrahlige Lichtbüschel treten auf bei der Refraction in planetarischen Atmosphären, oder in den Augenlinsen der Wirbeltiere und Insecten, oder auch bei den Diffusionserscheinungen in flüssigen Lösungen. Infolge dessen ist denn auch seit der Mitte des verflossenen Jahrhunderts eine grosse Zahl bahnbrechender Abhandlungen über diese Materie erschienen. Die atmosphärische Strahlenbrechung war schon von den Astronomen des Altertumes erkannt aus den Anomalien der scheinbaren Oerter der Gestirne. Eine wissenschaftliche Betrachtung dieser Vorgänge tritt erst hervor gegen Ende des XVII. Jahrhunderts, nachdem brauchbare Hypothesen über die Natur und die Bewegungsgesetze des Lichtes aufgestellt waren und die Erfindung der Differentialrechnung einen wirksamen Hebel an diese Probleme ansetzen liess. Huyghens beschreibt in seiner Schrift „Traité de la lumière“ die Krümmung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre und giebt auch eine graphische Illustration von der ungefähren Gestalt der Wellenflächen von Lichtstrahlenbüscheln, welche von einem leuchtenden Punkte sich nach allen Richtungen ausbreiten. Sein Zeitgenosse Johann I. Bernoulli war der erste, welcher die Differentialgleichung eines krummen Lichtstrahles in Medien von parallelen, ebenen Niveauflächen bei gegebener optischer

Constitution aufstellte und integrirte. Er stützt seine Betrachtungen auf das Fermat'sche Theorem vom Minimum der Zeit und führt damit die Lösung des Problems auf das der damals bereits bekannten Brachystochronen zurück. Da die Bernoulli'sche Abhandlung ziemlich selten ist, so möge hier der Inhalt derselben in Kürze mitgeteilt werden. Sie findet sich in den Act. Erudit. 1697 Lipsiae p. 206—210 unter dem Titel eines an seine Schüler gerichteten mathematischen Problems: Curvatura radii in diaphanis non uniformibus.[1]) Darin heisst es:

„Fermat hat in einem Briefe an De la Chambre (vgl. Fermatii opera math. p. 156 sqq.) constatirt, dass ein Lichtstrahl, welcher aus einem dünneren in ein dichteres Medium übergeht, so gebrochen wird, dass in Bezug auf die Zeit ein Lichtstrahl, welcher von einem leuchtenden Punkte allmählich zu einem anderen Punkte gelangt, den kürzesten Weg beschreibt und zeigt zugleich, dass die Sinus von Einfalls- und Brechungswinkel im Verhältnisse der Geschwindigkeiten stehen, womit die Medien durchlaufen werden.[2]) Wenn wir nun das gesamte Medium als heterogen annehmen, etwa in horizontale, unendlich dünne Schichten geteilt, erfüllt von einer durchsichtigen Substanz mit einer variabeln zu- oder abnehmenden optischen Dichte, so ist einleuchtend, dass der Strahl, den

1) Der vollständige Titel lautet: Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, solutioque problematis a se in Actu 1696 propositi de invenienda linea brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit et de curva synchrona seu radiorum unda construenda.

2) Der Fermat'sche Satz lautet bekanntlich:

$$\frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \ldots = \min. t, \quad \text{oder} \quad \delta \int \frac{v_0}{v_1} d s = \delta \int n \, d s = 0.$$

Sind u_0 und u_1 die Abstände der beiden Punkte vom Incidenzpunkte, y_0, x_0 und y_1, x_1 die Coordinaten derselben bezüglich desselben Punktes, so ist y_0 und y_1 constant, alles andere variabel und weiter

$$\frac{d t}{d u_0} = 1 + n \frac{d u_1}{d u_0} = 0, \quad u_0^2 = y_0^2 + x_0^2, \quad u_0 \, d u_0 = x_0 \, d x_0 = - x_0 \, d x_1,$$

$$u_1^2 = y_1^2 + x_1^2, \quad u_1 \, d u_1 = x_1 \, d x_1,$$

folglich

$$\frac{d u_1}{d u_0} = - \frac{x_1}{u_1} : \frac{x_0}{u_0} = - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \text{und} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

wir als den Weg einer kleinen Kugel betrachten wollen, sich nicht in einer Geraden, sondern in einer krummen Linie bewegen wird (wie schon Huyghens in seinem Tractatus de lumine p. 40 angiebt) von der Gestalt, dass eine kleine Kugel durch sie herabrollend mit vermehrter oder verminderter Geschwindigkeit in der kürzesten Zeit von Punkt zu Punkt gelangt. Es steht fest, dass, weil die Sinus der Durchgangswinkel sich wie die Geschwindigkeiten der kleinen Kugel verhalten, die Curve die Eigenschaft haben müsse, dass die Sinus ihrer Neigungen gegen die Verticale sich überall wie die Geschwindigkeiten verhalten. Darnach ist klar, dass die Brachystochrona ganz dieselbe Curve ist, welche ein Lichtstrahl bildet, der durch ein Medium geht, dessen Dichtigkeiten im inversen Verhältnisse der Geschwindigkeiten stehen, welche ein schwerer Körper im verticalen Falle erreichen würde, sei es nun, dass die Zunahme der Geschwindigkeiten von der Natur des mehr oder weniger widerstehenden Mittels abhängt oder dass vom Medium abstrahirt wird, man sich also vorstelle, dass die Beschleunigung oder Verzögerung von einer anderen Ursache abhänge, jedoch nach denselben Gesetzen geschehe, wie beim freien Falle. So kann das Problem allgemein gelöst werden, welches Gesetz der Beschleunigung man auch annimmt und danach suchen wir den Weg des Lichtstrahles in einem beliebig variabeln Mittel.

Es sei FGD (Fig. 1) das Medium, in der Horizontalen FG der leuchtende Punkt A, AD die Verticale, die gegebene Geschwindigkeitscurve AHE, deren Ordinate HC der optischen Dichte umgekehrt proportional ist, oder, wie man auch sagen kann, den Geschwindigkeiten des Lichtstrahles AMB oder der Kugel in den Punkten M direct proportional. Es sei ferner

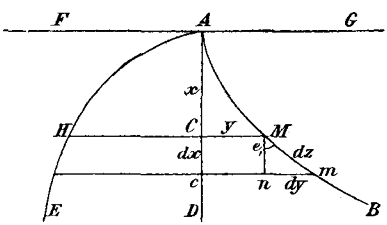

Fig. 1.

$AC = x$, $CH = t$, $CM = y$, $Cc = dx$, $nm = dy$, $Mn = dz$ und a eine willkürliche Constante. Dann ist $nMm = e_1$ der Brechungswinkel, mn proportional HC oder t, also

$$dy : t = dz : a,$$

folglich $a\,dy = t\,dz$, oder $a^2\,dy^2 = t^2\,dz^2 = t^2\,(dx^2 + dy^2)$. Daraus folgt die Differentialgleichung der Trajectorie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

und zwar sowohl im optischen als mechanischen Sinne. Nehmen wir einen speciellen Fall, der zuerst von Galilei eingeführt ist, dass die Geschwindigkeiten im quadratischen, die Fallhöhen im einfachen wachsen ($v^2 = 2\,g\,h$); dann ist die Indicialcurve AHE eine Parabel, also $t^2 = a\,x$. Setzen wir den Wert von t in die Differentialgleichung der Trajectorie ein, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

welches die Differentialgleichung der Cykloide ist."

Bernoulli fügt weiter hinzu, dass, wenn die Geschwindigkeiten im cubischen Verhältnisse, die Tiefen im einfachen wachsen, also $t^3 = a^2\,x$ sei, die Brachystochrone algebraisch, und wenn sie im einfachen Verhältnisse wachsen, also $t = x$ sei, die Brachystochrone geometrisch und zwar kreisförmig werde. Endlich bringt Bernoulli mit diesen Problemen noch das geometrische der isogonalen, speciell orthogonalen Trajectorien in Zusammenhang, womit das Problem der Wellenflächen der Lichtstrahlenbüschel bereits angedeutet wird.

Wir wollen nun das Bernoulli'sche Problem dahin erweitern, dass wir den Verlauf des ganzen Complexes der Lichtstrahlen untersuchen, welche von einem leuchtenden Punkte innerhalb eines Systems concentrischer, sphärischer Niveauflächen von stetig variabeler optischer Dichtigkeit sich ausbreiten und die zu diesen Curvenschaaren zugehörigen Wellenflächen zu bestimmen suchen. Die analytischen Grundlagen zu diesen Untersuchungen sind in mehreren früheren Aufsätzen des Verfassers enthalten, von welchen einige hier unten angegeben sind.[1]) Um die Methoden der Lösung unserer Probleme zu

1) Ueber den Strahlendurchgang durch conaxial continuirlich geschichtete Cylinder etc. vgl. Exner's Rep. d. Phys. 22. p. 333. 1886. Die Phoronomie der Lichtstrahlen in anisotropen, unkrystallinischen Medien etc. l. c. 25. p. 663. 1889. Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse, IV. Folge, Berlin u. Eversbusch, Zeitschr. f. vergleich. Augenheilk. 7. p. 145. 1893.

erläutern, wählen wir als einfaches Beispiel folgende *Aufgabe: In dem Systeme concentrischer, sphärischer Flächen sei die Indicialcurve* $n = (x^2 + y^2) : a^2$. *Es sollen die Lichtstrahlen eines im Abstande R vom Centrum gelegenen leuchtenden Punktes beschrieben und zugleich mit ihren Wellenflächen (orthogonalen Trajectorien) graphisch illustrirt werden* (Fig. 2).

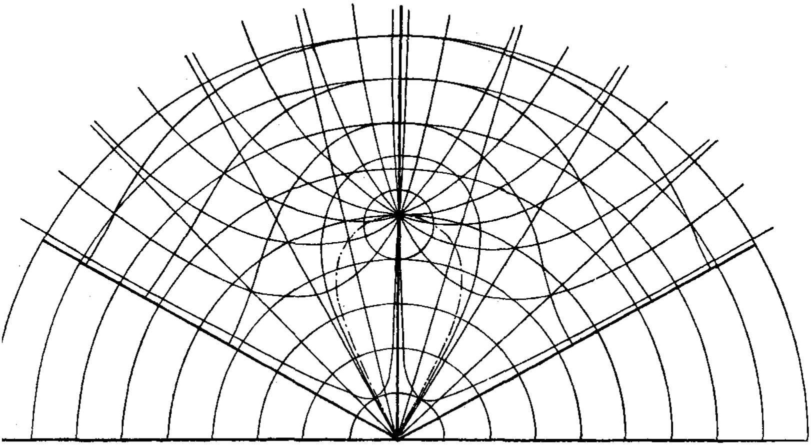

Fig. 2.

A. Bestimmung der Strahlencurve.

1. Lösung: Nach Laplace gilt für concentrische, sphärische Niveauflächen gleicher optischer Dichte die Relation:

$$n\, r \sin e_1 = N_1 R \sin \tau_0 = \text{const.} \tag{1}$$

Da $n = (x^2 + y^2) : a^2 = r^2 : a^2$, N_1 der Index der Kugelfläche vom Radius R ist, so wird $N_1 = R^2 : a^2$, $n = N_1 r^2 : R^2$, mithin

$$\frac{R N_1 \sin \tau_0}{n\, r} = \sin e_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{d r}{d \vartheta}\right)^2}},$$

oder

$$\frac{d r}{d \vartheta} = r \sqrt{\frac{r^6}{R^6 \sin \tau_0^2} - 1}, \quad 3 \vartheta = - \operatorname{arc} \sin \frac{R^3 \sin \tau_0}{r^3} + C.$$

Zur Bestimmung der Constanten ist $\vartheta = 0$ für $r = R$, also die Gleichung der Strahlcurven bei variablem τ_0:

$$r^3 \sin (\tau_0 - 3 \vartheta) = R^3 \sin \tau_0. \tag{2}$$

Dies sind hyperbelähnliche Linien, welche symmetrisch verlaufen mit zwei Aesten und Asymptoten. Ihre Scheitel sind gegen das Centrum gerichtet und entsprechen dem Minimum von r. Die Gleichung sämtlicher Scheitel des ganzen Strahlencomplexes ist:

$$r^3 = R^3 \cos 3\vartheta, \quad \text{oder} \quad (x^2 + y^2)^3 = R^3 (x^3 - 3xy^2).$$

Dies ist eine Schleife, welche einen Doppelpunkt im Centrum hat mit der Doppeltangente

$$\frac{dy}{dx} = \pm \operatorname{tg} 30^0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Wenn in (2) $R = 0$, d. h. der leuchtende Punkt im Anfangspunkt liegt, so wird $\tau_0 - 3\vartheta = 0$, d. h. die Strahlen sind sämtlich geradlinig.

2. *Lösung*: Nach Heath[1]) ist ganz allgemein für die Axenschnitte beliebiger Rotationsflächen die Differentialgleichung des Lichtstrahles:

$$(3) \qquad \frac{n}{\varrho} = \frac{\partial n}{\partial y} \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{dy}{ds},$$

also wenn man beiderseits mit ds multiplicirt:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dx - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) dy.$$

In unserem Falle ist nun:

$$\frac{dn}{n} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\frac{d^2 y}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{x^2 + y^2}.$$

Die Integration ergiebt:

$$\operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, ist der Winkel τ_0 einzuführen, welchen ein Lichtstrahl im leuchtenden Punkte mit der x-Axe bildet. Da hier $y = 0$ ist, so wird $\tau_0 = \pi + C$, also

$$\frac{dy}{\partial x} = \frac{2xy + (y^2 - x^2) \operatorname{tg} \tau_0}{y^2 - x^2 - 2xy \operatorname{tg} \tau_0}.$$

1) Heath, A treatise on geometrical optics p. 335, Cambridge 1887.

Das Integral dieser Gleichung oder die Lichtcurve in rechtwinkligen Coordinaten ist:

$$\operatorname{cotg}\tau_0\{3(x^2+y^2)y-4y^3\}+\{3(x^2+y^2)x-4x^3\}+R^3=0.$$

Für $\tau_0=\pi/2$ ist $\operatorname{cotg}\tau_0=0$, und die Gleichung der Lichtcurve

$$x(x^2-3y^2)=R^3 \quad \text{oder} \quad r^3\cos 3\vartheta=R^3.$$

Dieselbe liegt zu beiden Seiten der x-Axe symmetrisch; sämtliche Asymptotenpaare haben die Winkeldistanz 60°. Bemerkenswert ist, dass die Lichtbewegung auf diesen Kugelsector von 120° beschränkt bleibt.

3. Lösung: In manchen Fällen empfiehlt es sich, statt rechtwinkliger Coordinaten Polarcoordinaten einzuführen. Indem wir bei der symmetrischen Anordnung der Dichte einen Ebenenschnitt der Kugel betrachten können, welcher durch den leuchtenden Punkt geht, können wir die Coordinaten x, y in die neuen r, φ verwandeln auf folgende Art:

$$x=r\cos\varphi,\quad dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$dr=\cos\varphi\,dx+\sin\varphi\,dy,$$

$$y=r\sin\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$r\,d\varphi=-\sin\varphi\,dx+\cos\varphi\,dy,\quad ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2.$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi;\quad r\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\sin\varphi,\quad r\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-r;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=-\frac{1}{r},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=0;$$

ferner ist:

$$\frac{\partial n}{\partial x}=\frac{\partial n}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial n}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial n}{\partial y}=\frac{\partial n}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s},\quad \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

Setzen wir diese vier Werte in die obige Gleichung von Heath ein, so resultirt:

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{\partial n}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$+ \left(\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\right) \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

In Berücksichtigung der vorigen Gleichungen erhalten wir hieraus:

$$\frac{\partial n}{\partial y} \cdot \frac{d x}{d s} - \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{d y}{d s} = \frac{n}{\varrho} = \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \cdot \frac{d r}{d s} - r \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{d \varphi}{d s} \quad \text{(Staude).}$$

Wenn wir nun den Krümmungsradius ϱ des Lichtstrahles durch Polarcoordinaten ausdrücken, so resultirt die Differentialgleichung:

$$(4) \qquad d\varphi - \frac{d\left(\frac{d r}{r\, d\varphi}\right)}{1 + \left(\frac{d r}{r\, d\varphi}\right)^2} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial \varphi}\, d r - r \frac{\partial n}{\partial r} \cdot d\varphi\right\}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf unseren speciellen Fall an, so ist:

$$n = N_1 \frac{r^2}{R^2}, \quad \frac{\partial n}{\partial \varphi} = 0$$

und

$$\frac{-d\left(\frac{d r}{r\, d\varphi}\right)}{1 + \left(\frac{d r}{r\, d\varphi}\right)^2} = -3\, d\varphi, \quad \operatorname{arc\,ctg} \frac{d r}{r\, d\varphi} = -3\varphi + C.$$

Da

$$\frac{d r}{r\, d\varphi} = \operatorname{ctg} \tau_0 \text{ ist für } \varphi = 0^0,$$

so ist

$$C = \tau_0 \quad \text{und} \quad \frac{d r}{r\, d\varphi} = \operatorname{ctg}(\tau_0 - 3\varphi),$$

folglich die Lichtlinie wie in (2):

$$r^3 \sin(\tau_0 - 3\varphi) = R^3 \sin \tau_0.$$

B. Bestimmung der Wellenfläche in der Kugel oder der Wellenlinie im Centralschnitte.

Die Wellenflächen sind Orthogonalflächen zu den Strahlenbüscheln, wenn der Brechungsindex eine Function der Entfernung eines Massenpunktes vom Coordinatenanfangspunkte ist. Die Strahlen sind dann gekrümmt, die Strahlenbüschel geschweift. Wenn dagegen der Index nur abhängig von einer Richtung in dem Medium ist und in dieser constant bleibt, wie bei den Krystallen, so sind die Strahlen geradlinig und die Wellenflächen sind nur nach gewissen Richtungen orthogonal, z. B. die Fresnel'schen Flächen. Der uns vorliegende Fall gehört der ersten Kategorie an.

1. *Die Wellenflächen in rechtwinkligen Coordinaten.* Man findet die Differentialgleichung der isogonalen Trajectorien mit dem Neigungswinkel δ aus:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy'}{dx'}}{1 + \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dy'}{dx'}},$$

wo y' und x' die Coordinaten des Lichtstrahles, y und x die der Trajectorie hedeuten. Dabei ist nach dem vorigen:

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{2xy + (y^2 - x^2)\operatorname{tg}\tau_0}{y^2 - x^2 - 2xy\operatorname{tg}\tau_0},$$

also

$$\operatorname{tg}\delta\left\{1 + \frac{2xy + (y^2 - x^2)\operatorname{tg}\tau_0}{y^2 - x^2 - 2xy\operatorname{tg}\tau_0} \times \frac{dy}{dx}\right\} + \frac{2xy + (y^2 - x^2)\operatorname{tg}\tau_0}{y^2 - x^2 - 2xy\operatorname{tg}\tau_0} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminirt man hieraus $\operatorname{tg}\tau_0$ mittels der früheren Gleichung der Lichtcurve, nämlich:

$$\operatorname{tg}\tau_0 = \frac{y(y^2 - 3x^2)}{x(3y^2 - x^2) + R^3},$$

so erhält man die Differentialgleichung der isogonalen Trajectorie, speciell, wenn man $\delta = 90^0$ setzt, die Wellenlinie. Kürzer geschieht dies bekanntlich, indem man $-(dx/dy)$ an die Stelle von dy/dx setzt. Nach Einführung des Wertes von $\operatorname{tg}\tau_0$ erhält man:

$$x(y^2 + x^2)^2 + (y^2 - x^2)R^3 + \frac{dy}{dx}\{y(y^2 + x^2)^2 + 2xyR^3\} = 0.$$

Das Integral hiervon, also die Gleichung der Wellenlinie, wird:

$$(x^2 + y^2)^3 + 6\,R^3 (x^2 + y^2)\,x - 8\,R^3 x^3 = R_0^6 - 2\,R^3 R_0^3,$$

wo R_0 ein willkürlicher Wert von x bei $y = 0$ ist. Führt man Polarcoordinaten ein, so wird

$$r^6 - 2\,R^3 r^3 \cos 3\,\vartheta = R_0^6 - 2\,R^3 R_0^3. \tag{5}$$

2. Einfacher gelangt man zu dieser Gleichung, wenn man in der Differentialgleichung den Lichtstrahl für Polarcoordinaten $-(r\,d\,\vartheta / d\,r)$ an die Stelle von $d\,r / r\,d\,\vartheta$ setzt, also:

$$\frac{r\,d\,\vartheta}{d\,r} = -\operatorname{ctg}(\tau_0 - 3\,\vartheta).$$

Man eliminire zuvor τ_0 mittels (2), woraus sich ergiebt:

$$3\,\frac{d\,r}{r} = \frac{-R^3 \sin 3\,\vartheta}{r^3 - R^3 \cos 3\,\vartheta}\,d(3\,\vartheta),$$

oder

$$3\,r^2\,d\,r - 3\,\frac{d\,r}{r}\,R^3 \cos 3\,\vartheta + R^3 \sin 3\,\vartheta\,d(3\,\vartheta)$$

und wenn man mit $2\,r^3$ multiplicirt und integrirt, die Gleichung (5).

3. Auf eine andere Art lässt sich noch die Gleichung der Wellenlinie finden, wenn man ausgeht von den Relationen für die Lichtwege bei constanter Zeit. Wegen der Beziehungen $d\,s = v\,d\,t$, $n = v_0 : v$ ist:

$$v_0 \int d\,t = \int n\,d\,s. \tag{6}$$

Wir gehen wieder von der Specialität $n = N_1\,r^2 : R^2$ aus; danach ist für ein constantes t verschiedener Strahlenlängen:

$$t_1 = \frac{N_1}{v_0\,R^2} \int_0^{\vartheta} r^2 \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\right)^2}\,d\,\vartheta.$$

Führen wir das Differential der Gleichung (2) der Lichtlinie ein, so ist:

$$t_1 = \frac{N_1}{v_0\,R^2} \int_0^{\vartheta} -\tfrac{1}{3}\,R^3 \sin \tau_0\,\frac{d(\tau_0 - 3\,\vartheta)}{\sin(\tau_0 - 3\,\vartheta)^2}$$

$$= \frac{N_1}{3\,v_0\,R^2}\,R^3 \sin \tau_0 \operatorname{ctg}(\tau_0 - 3\,\vartheta),$$

oder

$$t_1 = \frac{N_1}{3\, v_0\, R^2}\, r^3 \cos(\tau_0 - 3\,\vartheta) + C.$$

Nun ist für $t_1 = 0$, $\vartheta = 0$ der Radiusvector $r = R$, also

$$t_1 = \frac{N_1}{3\, v_0\, R^2} \{r^3 \cos(\tau_0 - 3\,\vartheta) - R^3 \cos \tau_0\}.$$

Für den Axenstrahl ist:

$$t_1 = \int\limits_R^{R_0} \frac{N_1\, r^2\, d\, r}{v_0\, R^2} = \frac{N_1}{3\, v_0\, R^2} \{R_0^3 - R^3\}.$$

Mithin ist die Gleichung des Wellenzuges, welcher durch $x = R_0$ geht:

$$r^3 \cos(\tau_0 - 3\,\vartheta) - R^3 \cos \tau_0 = R_0^3 - R^3. \tag{7}$$

Hieraus ist mittels (2) der Parameter τ_0 zu eliminiren. Zu diesem Zwecke schreibe (7) in der Form:

$$r^3 \cos(\tau_0 - 3\,\vartheta) = R^3 \cos \tau_0 + (R_0^3 - R^3),$$

erhebe zum Quadrat und addire das Quadrat von (2), woraus

$$r^6 = R^6 + 2\, R^3 (R_0^3 - R^3) \cos \tau_0 + (R_0^3 - R^3)^2. \tag{8}$$

Aus (2) folgt weiter:

$$\cos \tau_0 \,.\, r^3 \sin 3\,\vartheta = \sin \tau_0 \,(r^3 \cos 3\,\vartheta - R^3)$$

und aus (7):

$$\cos \tau_0 \,(r^3 \cos 3\,\vartheta - R^3) + \sin \tau_0\, r^3 \sin 3\,\vartheta = R_0^3 - R^3.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen $\sin \tau_0$, so resultirt:

$$\cos \tau_0 \,(r^6 - 2\, r^3 R^3 \cos 3\,\vartheta + R^6) = (R_0^3 - R^3)(r^3 \cos 3\,\vartheta - R^3).$$

Setzen wir den Wert von $\cos \tau_0$ in (8) ein, so erhalten wir wieder die Gleichung (5):

$$r^6 - 2\, r^3 R^3 \cos 3\,\vartheta + R^6 = (R_0^3 - R^3)^2.$$

Es ist bekannt, dass bei allen Bestimmungen der orthogonalen Trajectorien die Elimination des Parameters τ_0 vielfach auf unüberwindliche Schwierigkeiten stösst.

Rostock, 2. April 1901.

(Eingegangen 8. April 1901.)