FORMULA BAROMETRICA, RICAVATA DALLE OSSERVAZIONI DEL
SIG. *GIACOMO GLAISCHER* FATTE IN OTTO ASCENSIONI AERO-
STATICHE NEL 1862; PER IL CONTE PAOLO DI SAN-ROBERTO.

(*Philosophical magazine*, in Febbraio 1864).

Traduzione.

La conoscenza della legge della diminuzione della temperatura relativamente all'altezza, è della più grande importanza, conciosiachè da essa dipende la determinazione dell'altezza per mezzo del barometro, non che quella della rifrazione atmosferica. Nel presente stato della metereologia noi conosciamo solamente le cause generali che tendono a diminuire la temperatura dell'aria quando ci si allontana dalla superficie della terra, ma ignoriamo affatto il loro reciproco rapporto.

È certo però, che la temperatura media dell'aria in contatto colla superficie della terra deve essere eguale a quella della superficie medesima, e che inoltre quella del limite superiore dell'atmosfera non può sorpassare la temperatura a cui tale fluido perde tutta la sua elasticità.

La prima condizione dipende dal contatto continuo dello strato inferiore dell'atmosfera colla superficie della terra.

La seconda è condizione indispensabile dell'equilibrio della massa fluida: in effetti se l'aria degli estremi limiti dell'atmosfera fosse sempre espansibile, lo strato limite si dissiperebbe nello spazio: dopo il quale strato quello immediatamente sottoposto non essendo ulteriormente compresso, si dissiperebbe a sua volta e così successivamente svanirebbe l'intera atmosfera. È però la bassa temperatura quella che diminuendo la elasticità dell'aria ne impedisce lo allontanamento della terra.

Se la equazione generale della dilatabilità dell'aria

$$p = \frac{\rho (1 + \alpha \theta)}{\rho_0 (1 + \alpha \theta_0)} p_0$$

che collega la pressione p alla densità ρ e alla temperatura θ , ha luogo in tutta l'atmosfera, la condizione di nessuna pressione sarà data dalla temperatura:

$$\theta = - \frac{1}{\alpha} = - 416^{\circ}2, \text{ tav. 1.}$$

Questa è la temperatura che è considerata nella teoria meccanica del calorico come zero assoluto.

Fra la temperatura dell'aria, alla superficie della terra e quella al limite della atmosfera e che ne impedisce la espansione, noi conosciamo per l'osservazione che la temperatura dell'aria diminuisce con l'elevazione, eccetto alcune anomalie accidentali che si osservano negli strati inferiori, come quelli che sono i più suscettibili a essere modificati pel contatto del suolo.

La legge di questo decremento, ascendendo nella atmosfera, può presentemente venir solo determinata dalla esperienza, e meglio che in qualunque altro modo coi palloni.

Le più importanti osservazioni in questo riguardo sono quelle del sig. Glaischer, che egli ha ultimamente esposte (1).

La conclusione generale di queste importanti osservazioni si è che la temperatura dell'aria non decresce uniformemente coll'allontanarsi dalla superficie della terra, ma in un rapporto che diminuisce con l'altezza.

Ora la formula analitica universalmente adoperata per calcolare le altezze con le osservazioni barometriche (formula di Laplace) suppone implicitamente il contrario cioè che la temperatura decresce in una ragione accelerata. Denotando l'assolute temperature (essendo come sopra il zero assoluto tenuto a $461,2$ F.)

(1) Rapporto di osservazioni meteorologiche e fisiche, fatte in otto ascensioni areostatiche a richiesta della commissione; per Giacomo Glaischer. F. R. S. (*from the Report of the British association, for the advancement, of science for 1862*) .

dell'estremità della colonna d'aria con t_0 — e t , e l'altezza della colonna con x , la formula del Laplace rimane fondata sull'ipotesi che:

$$x = b (t_0^2 - t^2),$$

b essendo una costante. Concordemente a questa legge l'aumento di altezza corrispondente a una diminuzione di un grado sarebbe dato da una quantità che decresce con la temperatura t , ed inoltre con l'altezza.

Considerando la incompatibilità della formula anzidetta con i fatti osservati, mi è sembrato utile ricercare la formula alla quale si perviene computando l'altezze per mezzo delle osservazioni barometriche fatte dal sig. Glaischer.

In un'altra Memoria io cercherò di investigare la formula che dai medesimi risultati si ottiene per la refrazione atmosferica.

L'abbassamento di temperatura dell'aria dalla terra alle diverse altezze trovate dal sig. Glaischer, prendendo la media delle sue altezze ascendenti è mostrato nella tavola seguente (1).

(1) « Non è inutile forse di anticipare una obbiezione che può farsi contro la maniera secondo la quale questi risultati sono stati ottenuti. Le altezze contenute nella prima colonna della tavola, sono dedotte barometricamente con la formula del Laplace, la quale, come noi abbiamo veduto, implica una ipotesi contraria al reale abbassamento di temperatura, cosicchè esse sono erronee; ma è da considerarsi che i risultati forniti dalla detta formula comunque non perfettamente corretti, non differiscono però gran fatto dalla verità, particolarmente per moderate elevazioni come vedremo qui appresso per una correzione.

« Il metodo migliore per determinare le altezze consisterebbe a prendere come punto di partenza la relazione tra la temperatura e l'pressione barometrica, data direttamente dall'osservazione in tutta la ascensione del pallone; come è stato pienamente dimostrato nella meteorologia del sig. Giovanni Herschel (art. 27 e seg.). Non ostante del metodo, la tavola fu calcolata sufficientemente corretta, per accertarsi se la ragione del decremento di temperatura è accelerata o ritardata; e la generale conclusione che può detrarsi si è che l'abbassamento di temperatura è più lento quanto noi più ascendiamo ».

TAVOLA 1.^a

ALTEZZA sopra il livello del mare		CIELO parzialmente chiaro		CIELO ben nuvoloso	
da	a	Abbassamento di temperatura	Media altezza per l'abbas- samento di un grado.	Diminuzione di temperatura	Media altezza per l'abbas- samento di un grado.
piedi 0	p. 1000	7° 2	139	4° 5	p. 222
	2000	12. 5	160	8. 7	230
	3000	17. 1	176	12. 8	234
	4000	20. 5	195	16. 5	242
	5000	23. 2	211	19. 6	255
	6000	26. 0	230		
	7000	28. 8	243		
	8000	31. 5	254		
	9000	34. 1	263		
	10000	36. 7	272		
	11000	39. 3	279		
	12000	41. 9	286		
	13000	44. 4	293		
	14000	46. 6	300		
	15000	48. 7	308		
	16000	50. 8	314		
	17000	52. 7	322		
	18000	54. 5	330		
	19000	56. 3	337		
	20000	57. 8	346		
	21000	59. 1	355		
	22000	61. 4	358		
	23000	62. 4	368		
	24000	63. 7	377		
	25000	64. 8	386		
	26000	65. 8	396		
	27000	66. 8	404		
	28000	67. 7	413		
	29000	68. 5	423		
	30000	70. 0	428		

Considerando più da vicino tali risultati, io trovo che essi possono venire rappresentati dall'equazione:

$$x = a (t_0 - t) - b (t_0^2 - t^2),$$

t e t_0 indicando le temperature assolute delle due estremità dell'altezza x , a e b due costanti. Infatti l'aumento di elevazione per ogni grado di abbassamento di temperatura che risulta da essa formula è dato da:

$$\frac{x}{t_0 - t} = a - b (t_0 + t)$$

ovvero :

$$\frac{x}{t_0 - t} = a - 2b t_0 + b (t_0 - t),$$

concordemente a questa espressione, la curva avente per ascissa la diminuzione di temperatura $t_0 - t$ e per ordinata la elevazione corrispondente all'abbassamento di un grado, deve essere una linea retta. Ora io trovo che coi risultati delle due ultime colonne la curva risultante è approssimativamente una linea retta, la quale per un cielo parzialmente chiaro, taglia gli assi delle ordinate ad una distanza di circa 110 piedi dall'origine, e fa coll'asse dell'ascisse un angolo la cui tangente è circa 4,2. In un cielo poi nuvoloso la linea retta taglia l'asse ad una distanza di circa 214 piedi e fa un angolo la cui tangente è circa 1,8. Noi abbiamo inoltre per un cielo parzialmente chiaro

$$a - 2b t_0 = 110, \quad b = 4.2.$$

e fra un cielo nuvoloso

$$a - 2b t_0 = 214, \quad b = 1.8.$$

Se con questi valori dei parametri noi calcoliamo le altezze corrispondenti all'abbassamento di 1° noi otterremo la seguente tabella mostrante la differenza tra i risultati osservati e quelli calcolati.

TABELLA 2.^a

ALTEZZA sopra il livello del mare		CIELO parzialmente chiaro		CIELO nuvoloso	
da	a	Altezza media calcolata per l'abbassam. ^o di un grado.	Differenza tra l'altezza os- servata e cal- colata.	Altezza media calcolata per l'abbassam. ^o di un grado.	Differenza tra l'altezza cal- colata ed os- servata.
piedi 0	p. 1000	p. 140	p. + 1	p. 222	p. 0
	2000	162	+ 2	230	0
	3000	182	+ 6	237	+ 3
	4000	196	+ 1	244	+ 2
	5000	207	— 4	249	— 6
	6000	219	— 11		
	7000	231	— 12		
	8000	242	— 12		
	9000	253	— 10		
	10000	264	— 8		
	11000	275	— 4		
	12000	286	0		
	13000	296	+ 3		
	14000	306	+ 6		
	15000	315	+ 7		
	16000	323	+ 9		
	17000	331	+ 9		
	18000	339	+ 9		
	19000	346	+ 9		
	20000	353	+ 7		
	21000	358	+ 3		
	22000	368	+ 10		
	23000	372	+ 4		
	24000	378	+ 1		
	25000	382	— 4		
	26000	386	— 10		
	27000	391	— 13		
	28000	396	— 19		
	29000	398	— 25		
	30000	404	— 24		

Ulteriori esperimenti possono essere creduti necessari per aggiungere altri termini all'equazione rappresentante la legge dell'abbassamento.

Onde dare la massima generalità a tale espressione io prenderò l'equazione

$$(1) \quad x = a (t_0 - t) - b (t_0^2 - t^2) + c (t_0^3 - t^3) + \text{ec.}$$

come rappresentante la legge dell'abbassamento di temperatura; ciò premesso noi passeremo a trovare la formula barometrica che ne deriva se p fosse la pressione dell'aria, della densità ρ , ad una altezza x ove la gravità è g . È noto che l'equazione di equilibrio di una colonna d'aria è

$$dp = - \rho g dx;$$

inoltre p è legata a ρ dalla relazione

$$p = h \rho t,$$

t essendo la temperatura assoluta dell'aria ed h una costante, quindi noi abbiamo l'equazione

$$h \frac{dp}{p} = - g \frac{dx}{t},$$

il di cui integrale sarà dato dalla relazione tra la pressione p e la temperatura t quando x è data in funzione di t .

Dall'equazione (1) noi abbiamo

$$dx = -adt + 2bt \, dt - 3ct^2 \, dt - \text{ec.},$$

ed inoltre

$$\frac{h}{g} \frac{dp}{p} = a \frac{dt}{t} - 2bt + 3ct \, dt + \text{ec.}$$

Integrando noi troveremo

$$\frac{h}{g} \log p = a \log t - 2 b t + \frac{3}{2} c t^3 + \text{ec.} + \text{constant} :$$

i logaritmi sono iperbolici.

Continuando ad indicare con p_0 e t_0 la pressione e la temperatura assoluta alla stazione inferiore, noi per determinare la costante avremo l'equazione

$$\frac{h}{g} \log p_0 = a \log t_0 - 2 b t_0 + \frac{3}{2} c t_0^3 + \text{ec.} + \text{constant} :$$

quindi

$$(2) \quad \frac{h}{g} \log \frac{p_0}{p} = a \log \frac{t_0}{t} - 2 b (t_0 - t) + \frac{3}{2} c (t_0^3 - t^3) + \text{ec.}$$

Ora come noi possiamo determinare il parametro a dalle temperature osservate t_0 e t alle stazioni inferiore e superiore, noi deduciamo dall'equazione (1) :

$$a = \frac{x}{t_0 - t} + b (t_0 + t) - c \frac{t_0^3 - t^3}{t_0 - t} \text{ ec.}$$

e sostituendo nella (2) noi ricaviamo

$$(3) \quad x = \frac{h}{g} \frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \log \frac{p_0}{p} - b \left(t_0^2 - t^2 - 2 \frac{(t_0 - t)^2}{\log \frac{t_0}{t}} \right) \\ + c \left(t_0^3 - t^3 - \frac{3}{2} \frac{(t_0 - t) (t_0^3 - t^3)}{\log \frac{t_0}{t}} \right) + \text{ec.}$$

per la formula barometrica.

Concordemente ai risultati del sig. Glaischer il valore dei

parametri C , d , debbono essere molto piccoli, laonde limitandoci ai primi due termini, noi avremo la formula

$$(4) \quad x = \frac{h}{g} \frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \log \frac{p_0}{p} - b(t_0 - t) \left(t_0 + t - 2 \frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \right)$$

per calcolare la differenza di livello x tra le due stazioni quando se ne conosce la pressione barometrica e la temperatura.

Come il termine in parentesi è molto piccolo, così è conveniente d'introdurre lo sviluppo del logaritmo che è

$$\log \frac{t_0}{t} = \frac{2(t_0 - t)}{t_0 + t} + \frac{1}{3} \frac{2(t_0 - t)^3}{(t_0 + t)^3} + \text{ec.},$$

serie molto convergente.

La formula barometrica diverrà trascurando la seconda potenza della frazione $\frac{t_0 - t}{t_0 + t}$ come molto piccola

$$x = \frac{h}{g} \frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \log \frac{p_0}{p} - \frac{1}{3} b \frac{(t_0 - t)^3}{t_0 + t}$$

Il primo termine del valore x è dovuto all'uniforme abbassamento di temperatura con l'altezza, ed il secondo è dovuto al rapporto di diminuzione di tale abbassamento.

Dobbiamo osservare che se noi sviluppiamo il logaritmo $\frac{t_0}{t}$ nel primo termine di x noi otteniamo:

$$x = \frac{h}{g} \left(\frac{t_0 + t}{2} \right) \log \frac{p_0}{p} - \frac{h}{g} \left(\frac{t_0 + t}{2} \right) \log \frac{p_0}{p} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{t_0 - t}{t_0 + t} \right)^2 - \frac{1}{3} b \frac{(t_0 - t)^3}{t_0 + t}$$

trascurando solamente la terza potenza di $\frac{t_0 - t}{t_0 + t}$

Il primo termine è la nota formula data dal sig. Laplace. Inoltre se noi denotiamo con X l'altezza fornita dalla formula

di Laplace, la correzione da applicarsi ad essa, da prendersi concordemente alla ragione ritardata dell' abbassamento di temperatura, è espressa da

$$-\frac{1}{3} \times \left(\frac{t_0 - t}{t_0 + t} \right)^2 - \frac{1}{3} b \frac{(t_0 - t)^2}{t_0 + t}.$$

Questa correzione è molto piccola per piccole differenze di temperatura delle due stazioni (val quanto dire, per piccole differenze di livello) ma è considerevole per grandi differenze di temperature, e quindi di livello.

Per esempio se noi prendiamo

$$t_0 - t = 50^{\circ}.8 \text{ Fahr.},$$

un abbassamento di temperatura, corrispondente ad una altezza di 16,000 piedi (approssimativamente quella del monte Bianco) la correzione sarebbe 197 piedi (supponendo per chiarezza $t_0 = a \ 5.25^{\circ}$, $b = 4.2$).

Per $t_0 - t = 70^{\circ}$, corrispondente all' altezza di 30,000 piedi la correzione è di 541 piedi.

Se il valore di b nella (1) è positivo la correzione da applicarsi della formola di Laplace è negativa, e dopo l'osservazione del sig. Glaischer è impossibile il supporre le negative; inoltre tutte le altezze calcolate nelle ascensioni areostatiche debbono essere diminuite.

Non è però certo che la medesima correzione si debba fare alle altezze di montagne dedotte dalle osservazioni barometriche; conciosiachè noi dobbiamo ammettere come una regola generale che le temperature delle estremità di una colonna di aria lontana dalla superficie della terra, non debbono essere le medesime di quelle delle stazioni sui fianchi di una montagna, a cagion del diverso modo secondo il quale la superficie dell' ultima è riscaldata e quindi impartisce la sua temperatura all' aria in contatto.

Simultanee osservazioni termometriche fatte sulla cima di montagne e nell' aria alla medesima altezza per mezzo di palloni captivi potrebbero dilucidare la quistione

Per ciò che riguarda le osservazioni fin qui fatte, onde determinare l'altezza di una stazione, su di una montagna per mezzo del barometro, esse variano con l'ora del giorno.

Dal 1.^o pom. fino alle 3. nel giorno l'altezza va diminuendo; e quindi aumenta da questa ultima ora fino al momento del massimo che in generale cade un' ora dopo mezzogiorno.

Osservazioni della medesima specie sono state fatte in molti posti variando in esposizione ed in clima.

È desiderabile che l'attenzione dei viaggiatori Alpini si rivolga a questo oggetto. Molto si può aspettare dagli uniti sforzi di molti dotti che facienti parte del Club Alpino sono per ogni dove frequentando le alte regioni delle Alpi ed altri distretti montuosi; e quì si presenta una opportunità per le persone di modeste cognizioni scientifiche, quando si volessero prendere la pena di portare e di osservare accuratamente buoni istrumenti, di poter contribuire al progresso di un ramo della scienza che è ancor lungi dall'aver conseguito il suo ultimo perfezionamento.

E. VILLARI