V. *Experimentelle Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten in Röhren von sehr kleinen Durchmessern;*

von Dr. Poiseuille.

(Bericht einer aus den HH. Arago, Babinet, Piobert und Regnault gebildeten Kommission über diese Abhandlung. — *Ann. de chim. S. III T. VII p. 50.*)

Seit langer Zeit haben die Hydrauliker die Bedingungen zur Bewegung des Wassers in Röhren durch directe Versuche zu bestimmen gesucht; allein da sie dabei hauptsächlich die Anwendung auf die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen im Auge hatten, so wurden ihre Versuche mit Röhren von grossen Durchmessern angestellt. Etliche derselben haben indess auch mit Röhren von bloß einigen Millimetern Durchmessern Versuche angestellt, z. B. Dubuat ¹⁾, Gerstner ²⁾ und Girard ³⁾.

Dieser letzte Physiker hat eine große Zahl von Versuchen gemacht über den Ausfluß des Wassers und mehrerer anderen Flüssigkeiten durch kupferne und gläserne Röhren von verschiedener Länge und horizontaler Lage, unter verschiedenen Belastungen der Flüssigkeit, und er hat die Resultate seiner Versuche verglichen mit den Zahlen, die aus einer durch Rechnung erhaltenen Formel abgeleitet waren. Die Durchmesser der von ihm angewandten Röhren gingen von 1^{mm},8 bis 4^{mm},2.

Hr. Dr. Poiseuille hat seine Untersuchungen unter

1) *Principes d'hydraulique. T. II p. 1.*

2) *Gilbert's Annalen* (1800), Bd. V S. 160.

3) *Mouvement des fluides dans les tubes capillaires. Mémoires de l'Institut*, 1813, 1814. 1815 et 1816.

ter physiologischem Gesichtspunkt unternommen. Er hat experimentell zu bestimmen gesucht, welchen Gesetzen die Bewegung des destillirten Wassers in Glasröhren folgt, deren Durchmesser sich denen der Capillargefäße nähern, durch welche die Flüssigkeiten der thierischen Oeconomie fließen. Er hat mit Glasröhren von 0^{mm},65 bis 0^{mm},015 Durchmesser experimentirt, und unter weit beträchtlicheren Drucken als seine Vorgänger.

Wenn Wasser durch eine Röhre von sehr kleinem Durchmesser in Luft ausfließt, so geschieht es, selbst unter beträchtlichem Druck, nicht in einem vollen Strahl. Die Verwandtschaft der Flüssigkeit zur Substanz der Röhre macht, daß sie an dem vollen Theil des Querschnitts haftet, sich daselbst anhäuft, einen Tropfen bildet, der sich vergrößert und endlich abfällt. Daraus entspringt eine Rückwirkung, ein Druck auf die Oeffnung in entgegengesetztem Sinne des Ausflusses, welcher somit fortwährend veränderlich ist, und nicht auf einen gleichförmigen Zustand kommt. Dieß hat Hr. Poiseuille zuvörderst durch directe Versuche erkannt, und er zeigt, daß in diesem Fall die Ausflusgeschwindigkeiten nicht gleich sind in zwei einander folgenden Versuchen, die unter anscheinend einerlei Umständen angestellt werden. Die Gleichförmigkeit stellt sich auch nicht vollständig ein, wenn man die Röhrenmündung der Wand einer Eprouvette nähert, solchergestalt, daß die ausfließende Flüssigkeit diese Wand unausgesetzt benetzen muß.

Ein Mittel, diesem Uebelstand abzuhelpen, besteht darin, das Wasser inmitten von Wasser ausfließen zu lassen, oder, anders gesagt, das Ausfließen in einem Haarröhrchen geschehen zu lassen, welches zwei Behälter verbindet, auf deren Oberfläche ungleiche Drucke ausgeübt werden ¹).

1) Es ist dasselbe Mittel, dessen sich G. Hagen bei seinen Versuchen über die Bewegung des Wassers in zwar engen, aber nicht capillaren Röhren bediente. S. Ann. (1839) Bd. XXXXVI S. 423. P. Poggendorff's Annal. Bd. LVIII.

Wir wollen versuchen, in wenigen Worten, den von Hrn. P. angewandten Apparat und die Anstellungsweise seiner Versuche verständlich zu machen.

Ein birnförmiges Glasgefäß *M* gemeinschaftet oben mit einer kupfernen Röhre, die sich in eine Bau-
chung begiebt, aus welcher drei Arme hervorgehen.

Der erste dieser Arme ist verbunden mit einer Druckpumpe, der zweite mit einem offenen Manometer. Dieses ist, für schwache Drucke, ein *Wassermanometer*, und, für stärkere, ein *Quecksilbermanometer*. Der dritte Arm gemeinschaftet mit einem Luftbehälter von starkem Kupfer und ungefähr 60 Liter Rauminhalt. Die mittelst der Druckpumpe in diesen Behälter gepresste Luft übt in diesen Behälter gepresste Luft übt auf die Oberfläche der ausfließenden Flüssigkeit einen beinahe constanten Druck aus.

Das Haarröhrchen *ef*, durch welches das Ausfließen geschieht, liegt horizontal; es ist in Verbindung mit dem Gefäß *M*, und, demgemäß, durch Vermittlung einer gekrümmten Röhre *abcde* mit dem Behälter voll comprimierter Luft. Die letztere Röhre ist an die Seitenwand des Gefäßes *M* angeschmolzen. Diese Vorkehrung ist unumgänglich; alle in der Luft schwebenden Staubtheilchen, gegen die man sich unmöglich vollständig schützen kann, streben nämlich sich in die Spitze *N* des Gefäßes *M* zu begeben; wenn also die Röhre *abcde* bei *N* angeschmolzen wäre, würden die Staubtheilchen durch das Haarröhrchen gehen, und nothwendig eine Störung im Ausflusse herbeiführen, besonders wenn dieser durch ein sehr enges Röhrchen geschähe.

Das Gefäß *M* hat also seitlich bei *a* eine Oeffnung,

an welche eine rechtwinklich gekrümmte Röhre *ab* angelöthet ist. Diese Röhre ist ihrerseits bei *c* gelöthet an eine kleine Kugel *A*, die zwischen zwei diametral entgegengesetzten Röhren *bc* und *de* von 0,75 Millim. innerem Durchmesser befindlich ist. Die Röhre *de* ist rechtwinklich gekrümmt und endigt in einer sphäroidischen Erweiterung, angeschmolzen an das Haarröhrchen *ef*, durch welches das zu studirende Ausfließen geschieht. Die Anschmelzung ist dergestalt gemacht, daß der capillare Kanal der Röhre sich plötzlich erweitert und in die Bauchung *e* übergeht. Diese Einrichtung ist nothwendig, um die Länge des Haarröhrchens bestimmen zu können; das würde schwierig seyn, wenn die Röhre *ef*, die weit enger ist als die Röhre *de*, sich gegen den Punkt der Anschmelzung an letztere in einen Kegel verlief.

Zwei Feilstriche bei *m* und *n* auf der senkrechten Röhre *abcd* dienen als Merkzeichen. Sie sind etwa 2 Millimeter von der Kugel *A* entfernt. Der Rauminhalt der Kugel und der kleinen Stücke des senkrechten Rohrs wurden zuvor mit großer Sorgfalt bestimmt.

Ein horizontales Fernrohr, versehen mit einem Fadenkreuz, bewegt sich längs einer senkrechten Nuthe, und dient zum Visiren aus der Ferne auf die Merkzeichen *m* und *n*.

Die Röhre *ef*, so wie die Kugel *A* sind in ein Glasgefäß voll Wasser getaucht; das Niveau der Flüssigkeit steigt bis 1 Millimet. an den Strich *m*. Ein in das Wasser getauchtes Thermometer giebt dessen Temperatur, und um diese constanter zu machen, ist das Glasgefäß in einen Zuber voll Wasser von der nämlichen Temperatur gestellt.

Zur Anstellung des Versuchs beginnt man damit, die Kugel *A* und die Röhre darüber mit destillirtem, mehrmals filtrirtem Wasser zu füllen. Zu dem Ende verbindet man das Gefäß *M* mit einer Saugpumpe, und taucht das Haarröhrchen in eine Flasche mit destillirtem Was-

ser. So wie man pumpt wird das Wasser in die Kugel A gesogen, und sobald diese bis a gefüllt ist, schraubt man M ab und bringt es in den Apparat, um den Ausfluß-Versuch anzustellen. Mittelst einer Druckpumpe hat man zuvor an dem Behälter Luft zusammengedrückt bis zu dem Druck, unter welchem man operiren will. Indem man einen Hahn öffnet, übt die Luft des Behälters einen Druck auf die Flüssigkeit aus und das Ausfließen beginnt.

Das horizontale Fernrohr wird auf den oberen Strich m gerichtet. So wie das Niveau der Flüssigkeit diesen Strich erreicht, löst man einen Secundenzähler aus und richtet das Fernrohr auf den unteren Strich n , beobachtet darauf die Temperatur des Wassers und den vom Manometer angezeigten Druck.

Wenn die Kugel A nahe daran ist leer zu werden, so begiebt sich der Beobachter an das Fernrohr, und im Moment, da die Flüssigkeit den unteren Strich erreicht, hält er den Zähler an. Er zeichnet die Zahl der verflossenen Secunden auf und mißt abermals den Druck. Dieser hat sich bisweilen während des Versuchs um eine sehr kleine Gröfse geändert; man nimmt zu der Berechnung das Mittel aus beiden Beobachtungen.

Die Haarröhrchen waren möglichst cylindrisch, gewählt aus einer großen Zahl Thermometerröhren von Krystallglas. Ihr Durchmesser wurde in der Camera clara unter dem Mikroskop, an einem zweckmäfsig zubereiteten Querschnitt der Röhre gemessen. Man maß diesen Durchmesser an vielen Punkten, und überzeugte sich so, ob der Querschnitt des Kanals kreisrund oder elliptisch sey. Man gebrauchte nur diejenigen Röhren, deren Querschnitt sehr nahe kreisrund war, und nahm das geometrische Mittel aus zwei, in rechtwinklichen Richtungen gefundenen Werthen des Durchmessers der Röhre.

Hr. Poiseuille giebt die Resultate seiner Versuche in vier Kapiteln.

Im ersten beschäftigt er sich damit, den Einfluß des Drucks auf die Menge der in gleicher Zeit durch Röhren von sehr kleinen Durchmessern geflossenen Flüssigkeit zu bestimmen. Zu dem Ende bestimmt er die Zeit, welche eine selbe Kugel, versehen mit einem selben Haarröhrchen, zu ihrer Leerung gebraucht, sobald die Flüssigkeit verschiedenen Drucken ausgesetzt ist. Die Drucke wurden mittelst eines Wassermanometers bestimmt, sobald sie kleiner waren als der von einer 150 Millimet. hohen Quecksilbersäule. Die beträchtlicheren Drucke, die bis zu einer Atmosphäre gingen, wurden mittelst eines Quecksilbermanometers gemessen. Einige Versuche wurden sogar unter noch bedeutenderen Drucken, Drucken von 8 Atmosphären, angestellt, und zwar mittelst eines Hrn. Collardeau gehörigen offenen Quecksilbermanometers (*manomètre à mercure, à air libre*).

Hiedurch hat Hr. P. gefunden, daß, bei einem selben Rohre, die Mengen des in gleichen Zeiten ausgeflossenen Wassers proportional sind den Drucken. Es handelte sich nun darum zu wissen, ob dieß Gesetz ein allgemeines sey, für enge Röhren von jedem Durchmesser und jeder Länge gelte.

Um den Einfluß der Länge zu ermitteln, schnitt Hr. P. folgeweise Stücke von der zur ersten Versuchsreihe angewandten Röhre ab, und machte mit der so verkürzten Röhre eine neue Reihe von Versuchen. So fand er, daß es für jede Röhre eine Längen-Gränze giebt, unterhalb welcher das Gesetz der Drucke nicht mehr gültig ist. Der Werth dieser Gränze ist verschieden nach dem Durchmesser der Röhre.

Die Resultate der Versuche des Hrn. Poiseuille stimmen vollkommen mit den nach dem obigen Gesetz berechneten Zahlen, wie man aus folgenden, seiner Abhandlung entlehnten Tafeln erschen kann.

Länge d. Röhre = 75 ^{mm} ,8.		Mittl. Durchmesser = 0 ^{mm} ,142.
Drucke; Quecksilber.	Beobacht. Zeiten.	Berechn. Zeiten.
51,068 Millm.	20085"	19835",0
97,764	10361	angenommen
147,832	6851	6851 ,9
193,632	5233	5231 ,2
387,675	2612 ,5	2612 ,8
738,715	1372 ,5	1371 ,2
774,676	1308	1307 ,6
Länge d. Röhre = 75 ^{mm} ,05		Mittl. Durchmesser = 0 ^{mm} ,113.
55,286 Millm.	21430"	21399",2
97,922	12079	12081 ,8
148,275	7981 ,5	7978 ,9
193,947	6100	angenommen
387,695	3052	3051 ,6
739,467	1600	1599 ,9
774,891	1526 ,5	1526 ,7
Länge d. Röhre = 50 ^{mm} ,225.		Mittl. Durchmesser = 0 ^{mm} ,043.
54,785 Millm.	35460"	
55,796	34798	34817",5
99,508	19517	19522 ,8
149,219	13021	13018 ,9
192,907	10071	10070 ,5
386,555	5025	5025 ,6
774,617	2506	2507 ,9
Länge d. Röhre = 2 ^{mm} ,10.		Mittl. Durchmesser = 0 ^{mm} ,029.
24,301 Millm.	5651"	5645",3
49,994	2751	angenommen
96,123	1426	1427 ,2
148,307	925	925 ,0
193,357	707	709 ,5
386,852	354	354 ,6
773,223	178	177 ,4

Länge d. Röhre = 364 Millm. Mittl. Durchmesser = 0^{mm},1316.

53,987	8590"	8598",2
210,129	2250	angenommen
419,645	1125 ,7	1126 ,6
835,565	565	565 ,8
1576,000	286	angenommen
2338,376	197 ,5	202 ,1
3095,540	154	152 ,7
3856,939	123	122 ,8
4616,534	106 ,25	102 ,4
5376,534	88 ,25	87 ,9
6136,534	77 ,50	77 ,0.

Wie schon gesagt, ist das Gesetz der Drucke nicht mehr gültig unterhalb einer gewissen Länge der Röhre, die von dem Durchmesser dieser abhängt. Eine Röhre von 0^{mm},029 Durchmesser folgte dem Gesetz, selbst als sie nur 2^{mm},10 lang war, wogegen eine Röhre von 0^{mm},65, welche bei einer Länge von 384 Millm. dem Gesetz der Drucke genügt hatte, es nicht mehr zeigte als sie auf eine Länge von 200 Millm. verkürzt worden war.

Sobald die Länge einer Röhre unterhalb jener Gränze ist, wächst die Ausflugschwindigkeit rascher als der Druck.

Im zweiten Kapitel seiner Abhandlung studirt Hr. Poiseuille den Einfluß der Länge der Röhre.

Diese Bestimmung bietet eine besondere Schwierigkeit dar, davon herrührend, dafs, weil die Röhren niemals vollkommen cylindrisch sind, man bei Verkürzung derselben nicht blofs die Länge ändert, sondern auch in merklicher Weise den Durchmesser ihrer Ausflugsöffnung. Hr. P. bestimmte in der mit dem Amici'schen Mikroskop verbundenen Camera clara die Durchmesser der Röhren an jedem neuen Querschnitt, und somit konnte er die kleine Berichtigung wegen der Veränderung des Durchmessers anbringen, unter Annahme des Gesetzes,

nach welchem der Ausfluß der Flüssigkeit sich mit dem Durchmesser verändert, eines Gesetzes, welches wir so gleich angeben werden.

Die Versuche zeigen, daß *die Zeiten zum Ausfluß einer gleichen Menge Flüssigkeit bei gleicher Temperatur, unter gleichem Druck und durch Röhren von gleichem Durchmesser proportional sind den Längen dieser Röhren.*

Dieses Gesetz beginnt, wie das Gesetz der Drucke, erst von einer gewissen Länge an, welche für beide Gesetze gleich zu seyn scheint.

Das Kapitel III handelt vom Einfluß des Durchmessers auf die durch sehr enge Röhren fließende Menge Flüssigkeit.

So selten man vollkommen cylindrische Röhren antrifft, eben so selten findet man welche mit vollkommen kreisrunden Querschnitt; insgemein ist dieser oval. Man wählte solche Röhren, deren Querschnitte sich den kreisrunden möglichst näherten, und man bestimmte in der Camera clara die größten und kleinsten Durchmesser. Das geometrische Mittel dieser beiden Bestimmungen wurde als Durchmesser des als kreisrund vorausgesetzten Querschnitts genommen.

Alle Versuche wurden mit Röhren von so großer Länge angestellt, daß den beiden ersten Gesetzen genügt war; deshalb wurden sie mit Röhren von sehr verschiedener Länge ausgeführt. Allein ausgehend von dem durch die Versuche des zweiten Kapitels festgestellten Gesetz der Längen berechnete man die Producte des Ausflusses, um eine gleiche Länge der Röhren zu haben, auf die von 25 Millimeter.

Der constante Druck wurde zu 775 Millm. Quecksilber und die Temperatur zu 10° C. angenommen.

Aus seinen Versuchen leitet Hr. P. das folgende Gesetz ab: *Bei Gleichheit aller übrigen Umstände verhalten sich die Producte des Ausflusses wie die vierten Potenzen der Durchmesser.*

Aus folgender, der Abhandlung des Hrn. P. entlehnten Tafel kann man ersehen, in wie weit die Resultate der Versuche diesem Gesetze genügen :

Namen der Röhren	Mitl. Durchmesser.	Ausflussmengen in 500".
<i>M</i>	0,013949 Millm.	1,4648 Kub. Millm.
<i>E</i>	0,029380	28,8260
<i>D</i>	0,043738	141,5002
<i>C</i>	0,085492	2067,3912
<i>B</i>	0,113400	6398,2933
<i>A</i>	0,141600	15532,8451
<i>F</i>	0,652170	6995870,2463.

Vergleicht man diese Producte paarweise, so sieht man, daß sie dem aufgestellten Gesetze sehr genau folgen. Vergleicht man nämlich das Product der Röhre *M* mit dem Product der Röhre *E*, so findet man :

$$(0,02938)^4 : (0,013949)^4 :: 28,826 : x = 1,4650 \text{ statt } 1,4648.$$

Eben so giebt der Vergleich des Products

von <i>E</i> mit dem von <i>D</i>	28,808	statt	28,826
- <i>D</i> - - - <i>C</i>	141,63	-	141,500
- <i>C</i> - - - <i>B</i>	2066,93	-	2067,391
- <i>B</i> - - - <i>A</i>	6389,24	-	6398,293
- <i>A</i> - - - <i>F</i>	15547,10	-	15532,865.

Eben so genügende Resultate erhält man, wenn man die Producte in einer anderen Ordnung vergleicht.

Es ist nun leicht eine Formel aufzustellen, welche das Product des Ausflusses in der Zeiteinheit giebt, das Wasser dabei von gleicher Temperatur genommen, durch Haarröhrchen von verschiedenen Durchmessern und Längen, und unter verschiedenen Drucken, die Länge der Röhre indeß immer oberhalb der Gränze genommen, unterhalb welcher die obigen Gesetze nicht mehr gültig sind. Seyen *Q* das Product des Ausflusses, *H* der Druck in Millimetern, Quecksilber von 0°, *D* der Durchmes-

ser der Röhre und L die Länge derselben, so hat man nach dem Obigen offenbar:

$$Q = k \frac{H D^4}{L},$$

wo k ein constanter, von der Temperatur abhängiger Coëfficient.

Der Werth dieses Coëfficienten für die Temperatur 10° kann aus den Daten der vorstehenden Tafel bestimmt werden:

Die Formel $k = \frac{Q L}{H D^4}$ giebt dann:

für die Röhre	M	$k = 2495,5$
- - -	E	2496,0
- - -	D	2494,4
- - -	C	2496,8
- - -	B	2496,2
- - -	A	2492,7
- - -	F	2495,0
Mittel		2495,22.

So hat man für die Temperatur 10° R. und für eine Zeitsecunde:

$$Q = 2495,22 \frac{H D^4}{L}.$$

H ist hier der Druck, ausgedrückt als Quecksilbersäule; will man ihn als Wassersäule H' ausdrücken, so hat man:

$$H' = 13,577 H \text{ woraus } H = \frac{H'}{13,577}$$

$$Q = 2495,22 \frac{\frac{H'}{13,577} \cdot D^4}{L} = 183,783 \frac{H' D^4}{L}.$$

Bezeichnet V die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, so hat man:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V \text{ oder } \frac{\pi D^2}{4} \cdot V = k \frac{H D^4}{L},$$

woraus:

$$V = \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{HD^2}{L}.$$

Die Resultate der Versuche von Dubuat, Gerstner und Girard stimmen nicht mit dieser Formel; allein man muß bemerken, daß ihre Versuche mit Röhren von weit größeren Durchmessern angestellt wurden, als Hr. P. anwandte, und daß die Längen dieser Röhren offenbar unterhalb der Gränze lagen, von dem ab die von Hrn. P. beobachteten Gesetze gültig sind.

Der Werth von k ändert sich rasch mit der Temperatur. Hr. P. hat gesucht dieß durch eine empirische Formel auszudrücken, deren Coëfficienten bestimmt wurden durch eine Reihe von Versuchen, die folgwiese bei jedem 5ten Grad von 0° bis 45° C. angestellt wurden. Es genügte dazu, das Wassergefäß, in welchem das Ausfließen geschah und in welches zugleich die Kugel A getaucht war, auf verschiedene Temperaturen zu halten.

Um sich zu überzeugen, ob eine selbe Formel auf sehr verschiedene Capillarröhren passe, hat Hr. P. Versuche mit vier solchen von immer kleinerem Durchmesser angestellt, nämlich:

Röhre	A	;	C	;	D	;	E
Durchmesser	0 ^{mm} ,142	;	0 ^{mm} ,085	;	0 ^{mm} ,046	;	0 ^{mm} ,029.

Der Ausfluß geschah beständig unter dem Druck von 776 Millm. Quecksilber. Die Durchmesser der Röhren wurden wegen der Wärme-Ausdehnung berichtigt.

Hr. P. hat gefunden, daß dieselben Coëfficienten für diese vier Röhren gültig sind, und daß mithin zwischen den von ihm benutzten Durchmesser-Gränzen dieselbe Berichtigungsformel angewandt werden kann.

Girard hatte bei seinen Versuchen gefunden, daß die von der Temperatur abhängige empirische Formel mit dem Durchmesser variire; allein seine Versuche wurden, wie schon gesagt, beständig mit Röhrenlängen klei-

ner als die, auf welche die von Hrn. P. gefundenen Gesetze gültig sind, angestellt.

Die definitive Formel für den Ausfluß des Wassers in Röhren von sehr kleinen Durchmessern wird:

$$Q = 1836,724 (1 + 0,0336793 T + 0,0002209936 T^2) \frac{HD^1}{L}$$

worin T die Temperatur in Centigraden und H die Höhe in Quecksilber.

Diese Formel zeigt, daß die Ausflugs geschwindigkeit des Wassers rasch mit der Temperatur steigt; so ist sie bei 45° drittehalb Mal größer als bei 5°.

Schon Girard hatte, veranlaßt durch Hrn. Arago, gesucht, ob die Temperatur 4° C., bei welcher das Wasser das Maximum seiner Dichte erreicht, einen singulären Punkt in der Curve darböte, welche die Veränderungen der Ausflugs geschwindigkeit in Function der Temperatur darstellt; er hatte gefunden, daß dies nicht der Fall sey, daß vielmehr die Curve regelmäfsig herabsteige, ohne durch die Aenderung im Sinn des Ganges der Dichte influencirt zu werden.

Hr. P. hat dies Resultat durch neue Versuche bestätigt, so daß man es nun als eine vollkommen erwiesene Thatsache ansehen kann, daß, wenn die Dichte der Flüssigkeit einen Einfluß auf die Geschwindigkeit des Ausfließens der Flüssigkeiten durch Röhren von kleinen Durchmessern ausübt, dieser Einfluß sehr schwach ist, und daß man ihn nicht den großen Veränderungen zuschreiben kann, welche diese Dichte mit der Temperatur erleidet.

Unter demselben Gesichtspunkt hat Hr. P. interessante Versuche mit Haarröhrchen angestellt über die Geschwindigkeit des Ausfließens von Flüssigkeiten, gebildet aus der Mengung veränderlicher Verhältnisse von Alkohol und destillirtem Wasser.

Girard's Versuche, angestellt mit einer Glasröhre von 939 Millim. Länge und 1^{mm},767 Durchmesser, hatten

gezeigt, daß Alkohol ungefähr drei Mal langsamer als destillirtes Wasser ausflosse; daß Gemenge von Alkohol und Wasser in den Volumverhältnissen 1 : 2 und 1 : 3 ein rascheres Ausfließen zeigen als Alkohol, und endlich, daß die Geschwindigkeit desto größer ist, je mehr Wasser dem Alkohol hinzugesetzt wurde.

Hr. P. ist zu etwas anderen Resultaten gelangt. Allein dies erklärt sich leicht, weil er mit viel engeren Röhren arbeitete, und weil er zum Ausgangspunkt einen fast absoluten Alkohol von 0,8001 Dichte bei 10° C. nahm; während Girard's Alkohol schon wasserhaltig war, 30° am Aräometer zeigte.

In der folgenden Tafel geben wir Hrn. P's numerische Resultate:

Ausflusgeschwindigkeiten von Gemengen aus Alkohol und Wasser.

Nummer der Versuche.	Gewichtsmengen Wasser auf 73,512 Gw Alkohol.	Dichte der Gemenge bei 10° C.	Ausflußzeit für ein glei- ches Volum d. Gemenge.	Capillarität.
1	0	0,8001	682"	32,20 Millm.
2	26,487	0,8557	1158	33,60
3	36,487	0,8793	1336	34,60
4	76,487	0,9293	1731	35,45
5	86,487	0,9311	1732	36,35
6	106,487	0,9349	1726	-
7	126,487	0,9400	1723	-
8	226,487	0,9606	1444	-
9	276,487	0,9627	1326	43,35
10	359,487	0,9734	1237	-
11	676,487	0,9798	841	54,85
12	1026,487	0,9820	760	58,05
13	1276,487	0,9893	694	61,30

Die fünfte Spalte enthält die Höhe, zu welcher die Flüssigkeiten in einer Röhre von 0^{mm},36 Durchmesser durch Capillarwirkung gehoben wurden. Destillirtes Wasser stieg in derselben Röhre bis zu 80^{mm},65 Höhe.

Reiner Alkohol erforderte zum Ausfluß 682", destillirtes Wasser, unter gleichen Umständen, 523".

Nimmt man die im Weingeist enthaltenen Wassermengen zu Abscissen und die Ausflußzeiten zu Ordinaten, so erhält man eine Curve, welche das Gesetz der Erscheinung unmittelbar vor Augen legt.

Man sieht, daß der fast absolute Alkohol dieselbe Ausflußgeschwindigkeit hat als das Gemenge aus 1276,5 Wasser und 73,51 Alkohol. Die Curve zeigt ein Maximum, entsprechend dem Gemenge von 73,51 Alkohol und 176,49 Wasser.

Da die Dichtigkeit des Gemenges von Alkohol und Wasser mit dem Wassergehalte steigt, so sieht man sogleich, daß die Aenderung der Dichte keinen Einfluß erster Ordnung auf die Ausflußgeschwindigkeit ausübt. Man kann dasselbe von der Capillarität sagen, welche, nach den Versuchen des Hrn. P., fortwährend mit dem Wassergehalt des Gemenges zunimmt.

Das Minimum der Ausflußgeschwindigkeit fällt auf das Gemenge, bei welchem Rudberg schon das Maximum der Contraction gefunden hat ¹⁾.

Die von Hrn. P. gegebene Formel für den Ausfluß des Wassers durch Röhren von kleinem Durchmesser stützt sich auf eine Reihe directer Versuche. Der einzige Weg, den Werth derselben zu ermitteln, bestand offenbar darin, neue Versuche mit andern Röhren als die vom Verfasser angewandten zu unternehmen und die Resultate mit den aus der Formel abgeleiteten Zahlen zu vergleichen. In dieser Absicht haben die Kommisäre in Gegenwart des Hrn. P. und mittelst seines Apparats die Versuche angestellt, deren Resultate wir hier angeben wollen. Wegen des überraschenden Einklangs zwischen den beobachteten und den aus Hrn. P's. Gesetzen abgeleiteten Zahlen schienen diese Versuche einer größeren Vervielfältigung und Ausdehnung zu bedürfen.

1) Siehe Annalen, Bd. XIII S. 496.

Versuche zur Prüfung des Gesetzes der Drucke.

Es wurden drei Versuchsreihen angestellt. Zu den beiden ersten (Taf. I) bediente man sich eines Wassermanometers. In der dritten gebrauchte man zu den drei ersten Versuchen ein gewöhnliches Quecksilbermanometer, und zu den fünf übrigen ein Hrn. Collardeau gehöriges und zuvor sorgfältig geprüfetes offenes Quecksilbermanometer.

Tafel I.

Röhre γ' . Länge etwa 69 Millm.; Durchmesser 0,20 bis 0,19 (?) Millm

	Drucke; destillirtes Wasser.	Ausflußtemperatur.	Ausflußzeiten	
			beobachtet.	berechnet. für gleiche Temp. u. vom 1. Vers. aus- gegangen.
12. Sept.	1282,0	17°,6 schwach	958"	
dito	1273,65	17°,6 stark	960 45"	962",9
13. Sept.	1232,25	17°,5	997 30	995,27
dito	1758,00	17°,5	701 30	697,63

Tafel II.

Röhre γ . Länge 108^{mm},24 Durchmesser $\left\{ \begin{array}{l} D=0^{\text{mm}},277 ; D=0^{\text{mm}},272 \\ d=0,234 ; d=0,232 \end{array} \right.$
Temperatur = 14°,75

		Drucke; destillirtes Wasser.	Ausflußzeiten	
			beobachtet.	berechnet, vom 1. Versuch ausgegangen.
27. Sept.	4.	522 ^{mm} ,10	1784" 15"	1785,9
dito	3.	1040 ,80	895 0	896,2
26. Sept.	2.	1472 ,45	633 0	633,4
dito	1.	2002 ,75	465 45	

T a f e l III.

Röhre *V*. Länge 107^{mm},9 Durchmess. $\left\{ \begin{array}{l} D=0^{\text{mm}},1400 ; D=0^{\text{mm}},133 \\ d=0 ,1384 ; d=0 ,132 \end{array} \right.$
 Ausflusstemper. = 14°,75

		Drucke;	Ausflußzeiten	
		Quecksilber.	beobachtet.	berechnet, in der An- nahme des Gesetzes der Drucke und vom I. Ver- such ausgegangen.
3. Oct.	3.	146 ^{mm} ,22	5661"	
dito	2.	573 ,63	1445" 45"	1443",8
dito	1.	773 ,85	1069	1070 ,2
2. Nov.	5.	740 ,80	1121	1118
dito	4.	1515 ,18	546 15	546 ,59
dito	3.	2273 ,08	365 30	364 ,34
dito	2.	3019 ,45	273 30	271 ,58
dito	1.	3513 ,54	237	235 ,71

Von den beiden letzten Columnen enthält die erstere die beobachteten Ausflußzeiten, und die zweite die berechnete nach Hrn. Poiseuille's Gesetz, nämlich, daß die Zeiten des Ausflusses einer gleichen Menge Flüssigkeit durch das nämliche Haarröhrchen sich umgekehrt verhalten wie der Druck, unter welchen das Ausfließen geschieht. Der vollständige Einklang zwischen den Zahlen beider Columnen läßt keinen Zweifel an der Richtigkeit des Gesetzes übrig.

Da das die Flüssigkeit enthaltende Kügelchen *A* seine Geräumigkeit unter einem starken Druck vergrößern mußte, so wollten wir uns versichern, ob diese Vergrößerung merkliche Unterschiede herbeiführen könne. Zu dem Ende füllten wir das Kügelchen mit der Flüssigkeit bis zum Ende des Haarröhrchens und schmolzen dieses vor der Lampe zu, brachten in das Wasser der senkrechten, oberhalb des Kügelchen befindlichen Röhre ein Quecksilbertröpfchen und maßen die Drucke mit Hrn. Collardeau's Manometer.

So hatte man:

für

für eine Druckzunahme.	scheinbare Zunahme der Geräumigkeit.
1 Atmosph.	0,688 Kub. Millim.
2 -	1,376 - -
3 -	2,064 - -
4 -	3,096 - -
5 -	3,784 - -
6 -	4,644 - -
7 -	5,160 - -
8 -	5,848 - -
9 -	6,536 - -

Die gesammte Geräumigkeit war 6 Kub. Centm. Die Zusammendrückung des Wassers ist in obiger Tafel vernachlässigt.

Die Aenderung der Geräumigkeit des Kugelchens in Folge des Drucks ist also zu klein, als dafs man nöthig hätte sie zu berücksichtigen. Eine Berichtigung der Resultate in den vorstehenden Tafeln hielt man demnach nicht für nöthig.

Versuche zur Prüfung des Gesetzes der Längen.

Wir operirten mit einer selben Röhre, die successive verkürzt wurde. Die Durchmesser der abgenommenen Röhrenlängen wurden jedesmal in der am Mikroskop angebrachten Camera clara gemessen. Ihre Werthe finden sich in der Tafel.

Man experimentirte möglichst unter gleichem Druck; indess da diese Bedingung nicht absolut zu erreichen war, so genügte man ihr beinahe, und bestimmte, unter Annahme des zuvor erprobten Gesetzes der Drucke, durch Rechnung die Berichtigung, welche nöthig war, um die Versuche auf den Fall einer strengen Gleichheit der Drucke zurückzuführen.

Druck 1472^{mm},45 destillirtes Wasser; Temperatur; 14°,75.

No. der Ver- suche.	Name der Röh- ren.	Länge Millimeter.	Durchmesser am freien (<i>A</i>) und entgegengesetzten (<i>B</i>) Ende Millimeter.		Ausflußzeit bei gleichem Druck. 1472 ^{mm} ,45.
2	<i>V</i>	108,24	<i>A</i>	$\left. \begin{array}{l} D=0,272 \\ d=0,232 \end{array} \right\}$	633"
			<i>B</i>	$\left. \begin{array}{l} D=0,277 \\ d=0,234 \end{array} \right\}$	
5	<i>V'</i>	81,52	<i>A</i>	$\left. \begin{array}{l} D=0,2728 \\ d=0,2320 \end{array} \right\}$	492,3
			<i>B</i>	$\left. \begin{array}{l} D=0,277 \\ d=0,234 \end{array} \right\}$	
6	<i>V''</i>	54	<i>A</i>	$\left. \begin{array}{l} D=0,276 \\ d=0,233 \end{array} \right\}$	314,3
			<i>B</i>	$\left. \begin{array}{l} D=0,277 \\ d=0,234 \end{array} \right\}$	
7	<i>V'''</i>	9	$\left. \begin{array}{l} A \text{ u. } B \\ D=0,277 \\ d=0,234 \end{array} \right\}$		71,5

Die Zeit von

No. 5 verglichen mit No. 2 ist 492",28 statt 492",3
 - 6 - - - - 5 - 314,53 } statt 314,3
 - 6 - - - - 2 - 315,80 }
 - 7 - - - - 2 - 52,63 statt 71,5.

Man sieht, bei den drei ersten Versuchen sind die Ausflußzeiten proportional den Röhrenlängen. Nicht so verhält es sich mit dem vierten Versuch; allein bei diesem hatte die Röhre nur eine Länge von 9 Millim., befand sich also unterhalb der Gränze, von welcher an die von Hrn. Poiseuille gefundenen Gesetze gültig sind.

Versuche zur Prüfung des Gesetzes der Durchmesser.

Die Kommissäre experimentirten mit Röhren von fast gleicher Länge unter sehr wenig verschiedenen Drucken, und durch Rechnung bestimmten sie, unter Annahme der zuvor erprobten Gesetze der Drucke und der Längen, die Ausflußzeiten, welche stattgefunden haben wür-

den, wenn die Länge der Röhre und der Druck beim Ausflusse streng gleich gewesen wären.

Die Haarröhrchen waren an ein selbes Kugelchen angeschmolzen, um nicht die Veränderung des Volums der ausgeflossenen Flüssigkeit in Rechnung ziehen zu brauchen.

Wir haben nur zwei Versuche zur Prüfung des Gesetzes der Durchmesser angestellt, aber mit Röhren von sehr verschiedenem Durchmesser.

Durchmesser.

Versuch am 3. October. No. 3:

Röhre U ; $P=1984^{\text{mm}},75$; $T=14^{\circ},7$; Ausflußzeit $5664''$
 $l=107^{\text{mm}},9$ freies $\{ D=0^{\text{mm}},133$; entgegenges. $\{ D=0^{\text{mm}},1400$
 Ende $\{ d=0,132$; Ende $\{ d=0^{\text{mm}},1381$

Mittlere Durchmesser:

$$D_2 = \frac{\sqrt{0,133 \times 0,132} + \sqrt{0,14 \times 0,1384}}{2} = 0^{\text{mm}},135848$$

Versuch am 26. September. No. 1. Dasselbe Kugelchen wie bei der vorhergehenden Röhre U .

Röhre V ; $P=2002^{\text{mm}},75$; $T=14,7$; Ausflußzeit $465'',75$
 $l=108^{\text{mm}},24$ freies $\{ D=0^{\text{mm}},272$; entgegenges. $\{ D=0^{\text{mm}},277$
 Ende $\{ d=0,232$; Ende $\{ d=0,234$

Mittlere Durchmesser:

$$D'_2 = \frac{\sqrt{0,272 \times 0,232} + \sqrt{0,277 \times 0,234}}{2} = 0^{\text{mm}},252899$$

Gestützt auf das Gesetz der Drucke und das der Länge bestimmte man die Zeit, welche die Röhre V unter dem Drucke $1984^{\text{mm}},75$ und bei der Länge $107^{\text{mm}},9$ der Röhre U zum Ausfließen erfordert haben würde; diese Zeit ist $468''50$.

Unter gleichem Drucke, bei gleicher Temperatur und gleicher Röhrenlänge fließt eine gleiche Menge Flüssigkeit durch die Röhre vom Durchmesser $D_2=0^{\text{mm}},135848$ in $5664''$, und durch die Röhre V vom Durchmesser $D'_2=0^{\text{mm}},252899$ in $468''50$.

Wenn nämlich, bei Gleichheit alles Uebrigen, die

Producte sich direct verhalten wie die vierten Potenzen der Durchmesser, müssen für eine durch die Röhren U und V geflossene gleiche Menge Flüssigkeit die Zeiten im umgekehrten Verhältnisse der vierten Potenzen ihrer Durchmesser stehen.

Suchen wir nach dieser Hypothese die der Röhre V entsprechende Zeit verglichen mit der von U , so hat man:

$$D_2^4 : D_1^4 = x : 5664'',$$

woraus:

$$x = 471'',57, \text{ während der Versuch giebt } 468'',50.$$

Versuche zur Prüfung der empirischen Formel für die Veränderung der Ausflusgeschwindigkeit mit der Temperatur.

Vier Versuche wurden in dieser Absicht unternommen; ihre Resultate sind:

Röhre V_1 ; $l = 73^{\text{mm}}$; $D = 0,27$; $d = 0,23$; beides ungefähr.

$V =$ Geräumigkeit der Kugel bei 10° .

No. der Versuche.	Temperatur.	Zeit zur Leerung des Kugelchen unt. $1320^{\text{mm}},5$ VVasserdruck.	Gewicht d. ausgefloss. Flüssigk. in $300''$ unt. gleich. Druck, mit Berücksichtigung der VVärme-Ausdehnung des Kugelchen.
2	$2^\circ,57$	$610'',15$	$V_{\text{gr.}} \times 0,491704$
1	$10'',20$	$484,13$	$V_{\text{gr.}} \times 0,619526$
3	$18'',14$	$393,19$	$V_{\text{gr.}} \times 0,762010$
4	$26'',55$	$322,00$	$V_{\text{gr.}} \times 0,928726$

Producte.

No. 2 ; $P = 1320^{\text{mm}},5$	Zeit $322''$	No. 2 ; $0,491704$
- 3 ; $P = 1320,5$	- $393,19$	- 1 ; $0,6195267$
- 1 ; $P = 1320,5$	- $484,13$	- 3 ; $0,762010$
- 4 ; $P = 1320,5$	- $610,15$	- 4 ; $0,928726$.

Ferner, wenn die Coëfficienten $0,0336793$ und $0,0002209936$ der Formel S. 436 mit α und β bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \text{No. 2 ; } & 1 + \alpha \times 2^\circ,57 + \beta \times (2^\circ 57')^2 = 1,0880154 \\ - \text{ 1 ; } & 1 + \alpha \times 10^\circ,20 + \beta \times (10^\circ 2')^2 = 1,3665282 \\ - \text{ 3 ; } & 1 + \alpha \times 18^\circ,14 + \beta \times (18^\circ 14')^2 = 1,6836624 \\ - \text{ 4 ; } & 1 + \alpha \times 26^\circ,55 + \beta \times (26^\circ 55')^2 = 2,0499593 \end{aligned}$$

Die Verhältnisse der unter gleichem Druck in 300' ausgeflossenen Flüssigkeitsgewichte sind:

	Nach Versuch.	Nach der Formel.
Zwischen No. 4 u. 3	$\frac{0,928726}{0,726010} = 1,2187$	1,2176
- - 4 u. 2	$\frac{0,928726}{0,491704} = 1,88879$	1,8841
- - 3 u. 1	$\frac{0,762010}{0,619526} = 1,22998$	1,23207
- - 1 u. 2	$\frac{0,619526}{0,491704} = 1,2599$	1,2550

Man sieht, daß die empirische Formel die Resultate der Beobachtung so gut wieder giebt als man es nur wünschen kann.

Die Versuche der Kommissäre haben demnach die von Hrn. Poiseuille aufgefundenen Gesetze des Ausflusses von Wasser aus Röhren von sehr kleinen Durchmessern vollständig bestätigt.

Das Gesetz der Drucke, man muß es sagen, war schon von Dubuat und Girard bei Röhren von beträchtlicherem Durchmesser aufgefunden, aber nur für sehr geringe Veränderungen des Drucks nachgewiesen worden. Bei den Versuchen von Girard, die als die genaueren betrachtet werden müssen, ging der Druck nur von 5 bis 35 Centimeter Wasser. Bei Hrn. Poiseuille's Versuchen dagegen variierte der Druck von 35 Centimeter bis 240 Meter Wasserhöhe, und zwischen diesen so ausgedehnten Gränzen kann man das Gesetz als verbürgt betrachten.

Vergleichen wir nun die experimentell von Hrn. Poiseuille gefundene Formel mit der, welche die Theorie für den Ausfluß der Flüssigkeiten durch sehr enge Röhren in der Annahme einer parallelen Fortführung der Schnitte liefert.

Der Ausdruck für das Moment der beschleunigen.

den Kraft, welche die Bewegung der Flüssigkeit in einer horizontalen Röhre bewirkt, ist:

$$g \frac{H}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot L.$$

Die verzögernde Kraft, welche die Bewegung gleichförmig macht, ist proportional der Fläche πDL der Röhrenwand; überdies ist sie eine gewisse Function der Geschwindigkeit. Die Hydrauliker nehmen mit Coulomb an, diese Function könne dargestellt werden durch einen Ausdruck wie:

$$AV + BV^2,$$

wo A und B constante, aber unbestimmte Coëfficienten sind, die durch directe Versuche festgesetzt werden müssen. Die verzögernde Kraft wird alsdann:

$$\pi DL(AV + BV^2).$$

Sobald das Ausfließen gleichförmig geworden, ist nothwendig Gleichheit zwischen der beschleunigenden und der verzögernden Kraft vorhanden. Man hat also:

$$g \frac{H}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L = \pi DL(AV + BV^2)$$

oder:

$$g \frac{H}{L} \cdot \frac{D}{4} = AV + BV^2$$

Schon Hr. Girard hat bemerkt, daß, jenseits einer gewissen Länge der Röhre in Bezug auf ihren Durchmesser, das Glied $g \frac{HD}{LV}$ constant wird, was erfordert, daß man habe $B=0$. Die Formel reducirt sich alsdann auf:

$$V = \frac{g}{4A} \cdot \frac{HD}{L}.$$

Diese Formel weicht von der Poiseuille'schen nur so weit ab, daß D darin durch D^2 ersetzt ist; allein man muß erwägen, daß man bei Aufstellung der theoretischen Formel vorausgesetzt hat, daß in einem selben Querschnitt des flüssigen Fadens alle Punkte glei-

che Geschwindigkeit besitzen. Das ist aber in Wirklichkeit nicht der Fall. In der Axe ist die Geschwindigkeit der Theilchen gröfser als nach der Wandung der Röhre hin, und an dieser Wand selbst ist die Geschwindigkeit vielleicht Null oder wenigstens sehr klein. Die Geschwindigkeit, welche aus der Menge der in einer gewissen Zeit ausgeflossenen Menge von Flüssigkeit abgeleitet wird, ist also nur eine mittlere Geschwindigkeit, welche wahrscheinlich eine veränderliche Function des wirklichen Durchmessers der Röhre ist.

In der Hoffnung einige genauere Angaben über diesen Gegenstand zu erhalten, haben die Kommissäre Hrn. Poiseuille veranlaßt, Versuche anzustellen über das Ausfließen einer sehr dünnflüssigen Flüssigkeit, wie Aether, und des Quecksilbers, welches bekanntlich das Glas nicht näßt, durch Röhren von verschiedenen Durchmessern. Der Aether zeigte ihm beim Ausfließen dieselben Gesetze wie das destillirte Wasser. Die Geschwindigkeit des Ausfließens wurde als proportional dem Druck gefunden, und bei zwei Versuchen mit Röhren von verschiedenen Durchmessern waren die Ausflufsgeschwindigkeiten genau den Quadraten der Durchmesser proportional.

Allein das Quecksilber zeigte andere Resultate. Nach einigen Versuchen des Hrn. P. näherte sich die Ausflufsgeschwindigkeit sehr der Proportionalität mit der ersten Potenz der Durchmesser. Diese Uebereinstimmung mit dem theoretischen Gesetz erklärt sich leicht. Da nämlich das Quecksilber die Wände der Röhre nicht näßt, so muß es in seinen einzelnen Fäden eine viel geringere Verschiedenheit der Geschwindigkeit darbieten, und folglich sich mehr den Bedingungen nähern, welche bei der Aufstellung der theoretischen Formel angenommen wurden.

Allein wir müssen hinzusetzen, daß Hrn. P's. bisherige Versuche über den Ausfluß des Quecksilbers weder

in hinlänglicher Zahl, noch unter recht genügenden Umständen angestellt worden sind, um diese Resultate mit vollem Vertrauen annehmen zu können. Die Kommissäre haben daher geglaubt, den Verfasser zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand auffordern zu müssen.

VI. *Ueber einen neuen optischen Versuch; von Sr. Ehrwürden Hrn. S. Earnshaw in Cambridge.*

(*Phil. Mag. Ser. III Vol. XXII p. 92*)

Durch eine Reihe eingeständlich dunkler, aber defsungeachtet auf die Undulationstheorie gestützter Schlüsse hat Fresnel für die Schwingungsweiten des von der Oberfläche eines nicht doppelbrechenden Mittels reflectirten Lichts die Formeln aufgestellt:

$$+a \frac{\sin(i-i')}{\sin(i+i')} \dots (A) \text{ und } -a \frac{\tan g(i-i')}{\tan g(i+i')} \dots (B)$$

nämlich die erstere (*A*) für das in der Reflexionsebene, und die zweite (*B*) für das winkelrecht gegen dieselbe polarisirte Licht. Es dürfte für keinen unübersteiglichen Einwurf gegen die Annahme dieser Formeln gehalten werden, wenn sie nicht genau die beobachtete Helligkeit darstellen. Nothwendiger ist es dagegen, daß sie genau mit der Erfahrung in denjenigen Erscheinungen übereinstimmen, welche von der Aenderung der algebraischen Zeichen, oder von der Gleichheit der Intensität beider Lichtarten oder von dem Verschwinden einer derselben abhängen. In allen bisher untersuchten Fällen dieser Art, glaube ich, stimmten die Resultate auch wirklich auf das Befriedigendste. Die Formel (*A*) ist immer positiv, so lange der Einfallswinkel zwischen 0° und 90° bleibt; (*B*) ist aber erst negativ, später positiv, und ver-