I. *Photometrische Untersuchungen;*
von H. Wild.

Wenn man den gegenwärtigen Zustand der Photometrie betrachtet, so kann man sich nicht verhehlen, daß dieselbe bedeutend hinter andern Theilen der Optik in ihrer Entwicklung zurücksteht und daß namentlich die Theorie auf diesem Gebiete der Erfahrung vorausgeeilt ist.

Fresnel hat schon im Jahr 1820 ¹⁾ die Formeln für die Intensität des an der Gränze von vollkommen durchsichtigen unkrystallinischen Medien reflectirten und gebrochenen Lichts theoretisch abgeleitet. Zu denselben Resultaten ist auch Neumann in der ausgezeichneten Abhandlung: „Theoretische Untersuchung der Gesetze, nach welchen das Licht an der Gränze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflectirt und gebrochen wird“ im Jahr 1835 ²⁾ von etwas andern Principien ausgehend gelangt und hat letztere auch zur Ermittlung der betreffenden Größen bei der Reflexion und Brechung des Lichts an der Gränze eines unkrystallinischen und krystallinischen Mediums benutzt. Diese Formeln entbehren bis zur Stunde fast ganz der Bestätigung durch genauere photometrische Messungen; sie bedürfen derselben aber um so eher, als sie sich auf die Hypothese stützen, daß die betreffenden Medien vollkommen durchsichtig seyen und daher an der mathematischen

1) *Ann. de chimie et phys. T. XVII, p. 179 et 132; diese Annalen Bd. 22, S. 68.*

2) *Mathematische Abhandlungen der Acad. der Wissenschaften zu Berlin von 1835.*

Gränze beider die vollständige Zerlegung des einfallenden Lichts in reflectirtes und gebrochenes stattfindet. Die experimentellen Untersuchungen von Jamin über die elliptische Polarisation bei durchsichtigen Medien ¹⁾ haben indessen gezeigt, daß diese Hypothese nur bei einigen wenigen Substanzen innerhalb der Beobachtungsfehler gültig ist. Wir müßten uns also im Allgemeinen an die Cauchy'schen Formeln für undurchsichtige Medien halten, diese sind indessen sehr complicirt und ihre Anwendung erheischt die Kenntniß mehr als einer Constante. Man wird daher gerne bei den Fresnel-Neumann'schen Formeln in der Praxis stehen bleiben, wenn man nur weiß, inwiefern dieselben als genau zu betrachten sind, oder wenigstens sicher ist, daß sie sich innerhalb der gegenwärtig bei photometrischen Messungen erreichbaren Genauigkeitsgränze der Erfahrung anpassen.

Die Winkelmessungen nun von Fresnel in der schon oben erwähnten Abhandlung und diejenigen von Brewster ²⁾ erweisen sich bei näherer Betrachtung immer noch so wenig genau, daß die Bestätigung, welche die genannten Formeln dadurch gefunden haben, sich nicht einmal bis zu $\frac{1}{100}$ des Intensitätsverhältnisses erhebt. Auch die eigentlich photometrischen Messungen von Arago über die Intensität des von einer planparallelen Glasplatte reflectirten und durchgelassenen Lichts und die Graduirung seines Glassatzpolarimeters ³⁾ können nicht nur nicht auf eine größere Genauigkeit Anspruch machen, sondern auch nicht mit den Ergebnissen der Theorie verglichen werden, da das Brechungsverhältniß der Glasplatten, an der Arago die betreffenden Bestimmungen machen liefs, nirgends angegeben ist. Ebenso bestätigen die polarimetrischen Mes-

1) *Ann. de chim. et phys.* 3. sér. t. 29, p. 263; t. 31, p. 165; diese Ann. Bd. 74, S. 248 u. Ergsbd. III, S. 269.

2) *Philos. Transactions* f. 1830, Pt. 1, p. 69 et 133; diese Ann. Bd. 19, S. 259 und 281.

3) *Oeuvres complètes de Fr. Arago T. X. (Mém. scientifiques I, p. 184.)*

sungen von Desains¹⁾ die Fresnel'schen Formeln blofs bis auf $\frac{1}{\tau\sigma\sigma}$ des Intensitätsverhältnisses. Viel genauer sind die Messungen von A. Seebeck und Neumann. Ersterer hat bei einer Reihe unkrystallinischer und krystallinischer Medien die Einfallswinkel bestimmt, für welche der reflectirte Strahl vollständig polarisirt ist, resp. ein nach der Einfallsebene polarisirter einfallender Strahl durch Reflexion ganz ausgelöscht wird²⁾. Seine Resultate sind Mittelwerthe aus 20 Beobachtungen auf *einer* frischgeschliffenen Fläche und weichen im Mittel um 3' von den Ergebnissen der Theorie ab. Diesem Fehler entspricht eine übrig bleibende Intensität des reflectirten Strahls von $\frac{3}{\tau\sigma\sigma\sigma}$ bis $\frac{4}{\tau\sigma\sigma\sigma}$ derjenigen des einfallenden Lichts. Neumann hat eine gröfsere Zahl von Beobachtungen am Kalkspath gemacht, nämlich bei verschiedenen Lagen der Einfallsebene gegen den Hauptschnitt und bei verschiedenen Incidenzen das Polarisations-Azimuth des einfallenden Strahls bestimmt, für welches entweder der gewöhnlich oder ungewöhnlich gebrochene Strahl verschwindet, und die Drehung der Polarisationsebene im reflectirten Strahle bei verschiedenen Polarisationsazimuthen des einfallenden Lichts gemessen³⁾. Aus diesen Messungen folgt, dafs seine Formeln für die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichts bis auf $\frac{1}{\tau\sigma\sigma\sigma}$ derjenigen des einfallenden Lichts als genau zu betrachten sind. Diese genaue Bestätigung der Theorie beschränkt sich aber auf *eine* Substanz und auf den Eintritt des Lichts in dieses Medium, die Formeln für den Austritt, resp. den Durchgang des Lichts durch durchsichtige Körper, sind damit noch nicht geprüft und doch sind sie es, die hauptsächlich praktische Anwendung finden. Allerdings ist dadurch die Richtigkeit der Principien, welche der Theorie zu Grunde liegen, im Allgemeinen als erwiesen zu betrachten und die weitem Untersuchungen werden daher nament-

1) *Ann. de chim. et phys.* t. 31, p. 286.

2) Diese *Ann.* Bd. 20, S. 27 u. Bd. 21, S. 290.

3) Diese *Ann.* Bd. 40, S. 497 u. Bd. 42, S. 1.

lich den Einfluß der Absorption erkennen und bestimmen lassen.

Eine allseitige genaue experimentelle Prüfung der Fresnel-Neumann'schen Formeln scheint mir daher durchaus noch wünschenswerth und für die Lösung einer Reihe weiterer photometrischer Probleme als Vorarbeit unentbehrlich. Da ich nun im Besitze eines Photometers bin, welches die Intensität zweier Lichtstrahlen leicht mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10000}$ zu vergleichen gestattet ¹⁾, so halte ich es für meine Pflicht, einen Versuch zur Ausfüllung dieser Lücke zu machen.

Ich werde hier zunächst den photometrischen Apparat etwas näher beschreiben, den ich dabei gebrauchen werde, und sodann die Resultate einer ersten experimentellen Prüfung des Gesetzes mittheilen, nach welchem sich ein vollständig polarisirter Lichtstrahl beim senkrechten Durchgang durch eine von parallelen Flächen begränzte Kalkspathplatte zwischen dem gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahle theilt.

1. Das Photometer.

§. 1. Idee und Theorie des Instruments.

Das zu beschreibende Instrument ist ein Polarisationsphotometer, d. h. die Vergleichung der beiden Lichtquellen stützt sich auf das bekannte Princip, daß gleiche Quantitäten senkrecht zueinander polarisirter Lichtstrahlen sich in ihrer Mischung wie natürliches Licht verhalten, die Gleichheit dieser beiden Lichtquantitäten also leicht und sicher mittelst eines Polariskops erkannt werden kann, das im vollständig und theilweise polarisirten Licht Interferenzfarben zeigt, im natürlichen dagegen farblos erscheint. Dieses Princip ist zuerst von Arago zu photometrischen Messungen vorgeschlagen worden. In der Darstellung der Arago'schen Ideen durch Babinet ²⁾ heißt es darüber:

1) Eine kurze Notiz über dieses Photometer habe ich bereits in den Berner-Mittheilungen vom Jahre 1859, S. 25 veröffentlicht.

2) Zusätze zur Uebersetzung von Herschel's »*Treatise on Light*« durch Quetelet; diese Ann. Bd. 35, S. 444.

»In der That besteht die Schwierigkeit der Probleme der Photometrie fast immer in den beiden folgenden Operationen, welche die Vergleichung zweier gegebener Lichter möglich machen, 1) Schwächung des stärkern Lichts um einen wohl bekannten Bruchtheil, um es dem schwächern gleich zu machen, und 2) Versicherung von der hergestellten Gleichheit durch ein fehlerfreies und sehr empfindliches Mittel. Wer sähe nun nicht sogleich, dafs man sich einerseits durch die Nichtfärbung einer Quarzplatte ¹⁾ von der Gleichheit der beiden gemengten und auf einander rechtwinklicht polarisirten Strahlen überzeugen kann, und dafs man anderseits in dem Malus'schen Gesetz des Cosinusquadrats des Winkels zwischen dem Hauptschnitt einer doppelbrechenden Krystallplatte und der Polarisationsebene eines darauf einfallenden polarisirten Lichtstrahls ein Mittel hat, den Bruchwerth des einen zur Neutralisation des andern angewandten Lichtbündels zu bestimmen.« Diese Idee hat indessen Arago selbst bei seinen photometrischen Untersuchungen nicht verwerthet, auch habe ich sie in der Sammlung seiner Werke nirgends von ihm selbst ausgesprochen finden können. Dagegen hat später Babinet dieselbe zur Construction des ersten Polarisationsphotometers verwendet, doch nicht in ihrer ganzen Ausdehnung ²⁾. Das Licht einer Lichtquelle wird durch Reflexion an einem Glasplattensatze unterm Polarisations-Winkel vollständig nach der Einfallsebene, das einer andern durch Transmission unter demselben Winkel nahezu ganz senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. Durch passende Aufstellung der Lichtquellen kann man es leicht dahin bringen, dafs die reflectirten Lichtstrahlen von der einen und die durchgehenden von der andern Lichtquelle zusammenfallen, und dafs beim Annähern oder Entfernen der einen Lichtquelle vom Glassatz die senkrecht zueinander polarisirten Antheile in

1) Das Polariskop von Arago besteht nämlich aus einer senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Quarzplatte von 5 bis 6^{mm} Dicke verbunden mit einem achromatischen Bergkrystallprisma.

2) *Compt. rend.* t. 37, p. 774.

den beiderlei Lichtstrahlen einander gleich werden, was mittelst eines Polariskops zu erkennen ist. Die eine Lichtquelle wird dann, indem man sie als constant annimmt, in ihrer Stellung belassen und die andere durch die mit ihr zu vergleichende dritte Lichtquelle ersetzt, die man ihrerseits so lange entfernt oder annähert, bis die Farben im Polariskop wieder verschwinden. Unter der Voraussetzung, dafs die erste Lichtquelle wirklich inzwischen constant geblieben ist, werden sich dann die Intensitäten der beiden andern Lichtquellen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von auf dem Wege ihrer Strahlen zum Apparat aufgestellten, durchscheinenden Schirmen verhalten. Die Vergleichung der Lichtquellen ist also eine indirecte und dadurch geht die ganze Schärfe der Beobachtung, welcher die Idee Arago's fähig ist, wieder verloren. Im 99. Bande S. 235 dieser Annalen habe ich ein, auf einer Idee des Hrn. Prof. Neumann in Königsberg beruhendes Photometer beschrieben, welches als eine Vervollkommnung des Babinet'schen Apparats und daher auch als eine vollständigere Anwendung des Arago'schen Principis betrachtet werden kann. Die Entwicklung der Theorie dieses Instruments, welche ich am betreffenden Orte gegeben habe, setzte mich nach einigen Fundamentalbeobachtungen in den Stand, die Intensitäten zweier Lichtquellen direct durch eine einmalige Vergleichung bis zu $\tau_{\sigma\pi}^1$ ihres Verhältnisses genau zu ermitteln, so dafs durch Vermehrung der Beobachtungen leicht eine Genauigkeit von $\tau_{\sigma\sigma\sigma}^1$ zu erreichen war¹⁾. In dieser Abhandlung habe ich auch gezeigt, dafs

1) Man hat allerdings behauptet, dafs auch das Babinet'sche Photometer unmittelbar zu Vergleichungen gebraucht werden könne. Da nämlich, zufolge der Fresnel'schen Formeln und den Arago'schen Beobachtungen, bei irgend welchen Einfallswinkeln im reflectirten und gebrochenen Licht gleiche Quantitäten senkrecht aufeinander polarisirter Lichtstrahlen enthalten seyn sollen, so bedürfe man keiner dritten Vergleich-Lichtquelle, sondern es sey unmittelbar nach hergestellter Neutralisation aus den Entfernungen der beiden Lichtquellen vom Apparat, von welchen die eine reflectirtes, die andere durchgelassenes Licht gebe, das Intensitätsverhältnifs zu berechnen. Dabei hat man indessen die

das Princip, wonach zwei gleiche Quantitäten senkrecht zueinander polarisirter Lichtstrahlen sich wie natürliches Licht verhalten sollen, nicht allgemein gültig ist und daher in gewissen Specialfällen zu Irrungen führen kann. An die Stelle desselben ist vielmehr folgendes andere Princip zu setzen:

Zwei gleich intensive, senkrecht zueinander polarisirte Lichtbüschel verhalten sich in ihrer Mischung bei Untersuchung mittelst irgend eines Polariskops dann wie natürliches Licht, wenn sie von natürlichem oder einer Mischung von natürlichem und polarisirtem Lichte herkommen, dessen Polarisationssebene mit einer der beiden schließlichen Polarisationssebenen übereinstimmt. Sind sie dagegen aus einem einzigen nach einer Zwischenrichtung ganz oder theilweise polarisirten Lichtbüschel durch Zerlegung entstanden, so verhält sich ihre Mischung wie polarisirtes Licht, dessen Polarisationssebene unter 45° gegen die beiden schließlichen Polarisationssebenen geneigt ist.

Die Erklärung aber dieses Principis ist folgende. Zwei senkrecht zueinander polarisirte Lichtstrahlen geben durch Interferenz einen linearpolarisirten Strahl, wenn ihre Wegdifferenz bei gleicher Phase oder ihre Phasendifferenz bei gleichem Wege 0 oder irgend ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ (wo λ die Wellenlänge darstellt) beträgt und zwar liegt die Polarisationssebene des resultirenden polarisirten Strahls in dem einen oder andern Quadranten, je nachdem die Weg- oder Phasendifferenz einem geraden oder ungeraden Viel-

verschiedene Absorption des Lichts bei der Reflexion und beim Durchgang durch eine Glassäule, die, wie ich in der citirten Abhandlung gezeigt habe, durchaus nicht zu vernachlässigen ist, unberücksichtigt gelassen. Zudem bleibt die Unbequemlichkeit, daß man die Lichtquellen zur Erzielung der Neutralisation verrücken muß. In einem Vortrage an der Versammlung schweizerischer Naturforscher zu Bern im Jahr 1858 habe ich von einer Verbesserung des Babinet'schen Photometers gesprochen, welche die Ausführung der Messung bei festen Lichtquellen sowie die Elimination des Einflusses der Absorption gestattet. Ein freilich etwas verstümmelter Auszug dieses Vortrags findet sich in der *Bibliothèque universelle de Genève* vom Jahre 1858.

fachen von $\frac{1}{2}\lambda$ entspricht. Liegt die letztere zwischen den angegebenen Gränzen, so erhalten wir je nach der Größe der Differenz einen rechts oder links rotirenden elliptisch polarisirten Strahl. Nun sind die Farbenerscheinungen in einem Polariskop für einfallende Lichtstrahlen, die in zwei verschiedenen Quadranten polarisirt sind oder als gleich elliptisch polarisirte nach entgegengesetzten Seiten rotiren, complementär, d. h. die Minima bei der Interferenz in der Krystallplatte fallen in einen Falle gerade dahin, wohin im andern die Maxima zu liegen kommen und umgekehrt. Wenn also in dem auf das Polariskop einfallenden Lichte in rascher Folge die Polarisationssebene der linear-polarisirten Strahlen in verschiedene Quadranten fällt oder die Rotationsrichtung elliptisch polarisirter Strahlen wechselt, so werden die entgegengesetzten Eindrücke im Auge sich so vermischen, daß es keine Interferenzen resp. Farbenerscheinungen mehr wahrnimmt. Das ist aber der Fall, wenn die beiden senkrecht zueinander polarisirten Strahlen aus natürlichem Lichte entstanden sind, indem ja das letztere als solches aufzufassen ist, in welchem beständig die Bewegungsrichtung sich ändert. Nur wenn die beiden Strahlen durch Zerlegung aus ein und demselben linear polarisirten Strahl entstanden sind, werden dieselben auf eine bestimmte Weise interferiren und so im Polariskope Farben zeigen.

Dieses Princip erklärt denn auch, weshalb wir beim Hindurchsehen mittelst eines Polariskops durch eine doppelbrechende Platte, bei geeigneter Stellung der letztern, nicht bloß für einfallendes natürliches Licht keine Farben erblicken, sondern auch, wenn dasselbe in einem solchen Azimuth zum Hauptschnitt polarisirt ist, daß die Intensitäten der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen gleich groß sind. In diesem letztern Falle rühren nämlich die gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen, senkrecht zueinander polarisirten Strahlen nicht von ein- und demselben polarisirten einfallenden Strahl her, sondern von zwei verschiedenen einfallenden Strahlen, welche daher zu

verschiedenen Zeiten verschiedene Weg- oder Phasendifferenzen besitzen.

Die letztere Erscheinung habe ich zur Construction des neuen Photometers benutzt, indem ich nicht verkannte, daß das frühere an mehreren Uebelständen leide. Die Anwendung von Glassäulen erheischt die Benutzung von complicirten Formeln zur Berechnung des Intensitätsverhältnisses, welche Formeln durch das Experiment noch nicht einmal als genau bestätigt sind. Zudem treten gerade bei Glas, wie A. Seebeck gezeigt hat, ganz besonders starke Oberflächenveränderungen ein, welche auf die Intensität des reflectirten Lichts einen bedeutenden Einfluß ausüben. Die Complicirtheit der Formeln macht es ferner, wie ich schon in der citirten Abhandlung gezeigt habe, unmöglich, den Einfluß der Absorption genau in Rechnung zu bringen. Endlich ist die Zahl der möglichen Fehlerquellen bei diesem Instrumente sehr groß und daher die von Zeit zu Zeit nothwendige Justirung des Instruments, resp. die Bestimmung dieser Fehler, eine sehr mühsame.

Alle diese Uebelstände sind bei dem neuen Apparate vermieden, der aus einem von parallelen Flächen begränzten Kalkspathstück, etwa einem natürlichen Kalkspath-Rhomboëder $RRR'R'$ (Fig. 5 Taf. V) von etwas größerer Dicke besteht, auf dessen einer Seite ein Kalkspathpolarisator (ein Foucault'sches oder Nicol'sches Prisma) PP sich befindet, während auf der andern ein Polariskop, bestehend aus einer Farben gebenden Krystallplatte KK und einem analysirenden Nicol NN , angebracht ist. Die Sehaxe des Polariskops ist senkrecht gegen die polirten Begränzungsflächen des Kalkspaths RR und $R'R'$ gerichtet, und um diese Richtung als Axe ist der Polarisator drehbar. Nehmen wir nun an, es befinde sich vor dem letztern eine Fläche ABC , welche auf ihrer einen Hälfte AB von der einen und auf der andern BC von der andern der zu vergleichenden Lichtquellen gleichförmig so beleuchtet werde, daß beide Theile in einer auf dem Hauptschnitt des Kalkspath-Rhomboëders (der Ebene der Zeichnung) senkrech-

ten Geraden zusammenstoßen, so zeigt die Betrachtung des Durchgangs der Strahlen aus der Nähe der Gränze B durch Polarisator und Rhomboëder, daß nach dem Austritt derselben aus dem letztern innerhalb des Raumes $\alpha\beta$ Strahlen von AB her, die eine gewöhnliche Brechung im Kalkspath-Rhomboëder erfahren haben, sich vermischen mit Strahlen von BC her, die ungewöhnlich gebrochen worden sind. Auf diesen Raum $\alpha\beta$, in welchem sich also senkrecht zueinander polarisirte Strahlen von den beiderlei Lichtquellen miteinander vermischen, beschränkt sich unsere ganze Betrachtung; diese Stelle wird mit dem Polariskope untersucht. Erscheint sie darin farblos, so werden wir daraus gemäß dem Vorigen auf Gleichheit der Intensität der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen, gemischten Strahlen schließen können. Diese Gleichheit wird aber immer, welches auch das Intensitätsverhältniß der beiden Lichtquellen ist, durch Drehung des Polarisators PP erzielt werden können und wenn wir den Winkel messen, welchen alsdann die Polarisationssebene des letztern mit dem Hauptschnitt des Rhomboëders bildet und das Gesetz kennen, nach welchem ein in irgend einem Azimuth polarisirter Strahl zwischen dem gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Lichte beim senkrechten Hindurchgang durch das Kalkspath-Rhomboëder sich theilt, so können wir auch genau angeben, in welchem Verhältniß die beiderlei Strahlen geschwächt worden sind, bis sie gleich wurden, also das Intensitätsverhältniß der beiden Lichtquellen berechnen.

Sehen wir jetzt zu, wie die Strahlen der beiden Lichtquellen bei ihrem Durchgange durch den Apparat sich verändern und welches die Intensität der Mischung von Strahlen sey, die zu dem hinter dem Polariskope befindlichen Auge gelangen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die beiden gleichförmig erleuchteten Flächen die Lichtquellen selbst seyen und natürliches Licht von den Intensitäten J^2 und J_1^2 aussenden; die diesen Intensitäten entsprechenden Amplituden seyen i und i_1 . Da die beiderlei Strahlen von der leuchtenden Fläche bis zur vorderen

Fläche des Kalkspatrhomboëders und von der hinteren Fläche desselben bis zum Auge genau dieselben Wege zurücklegen und dieselben Veränderungen erfahren, so werden die Amplituden i und i_1 hierdurch keinerlei relative Aenderung erleiden. Beim Eintritt, Durchgang und Austritt dagegen aus dem Rhoboëder erfahren diese Strahlen, die im Polarisator vollständig polarisirt worden sind, verschiedene Schwächungen, da ja die von AB her mit der Amplitude i blofs gewöhnlich gebrochenes und die von BC her mit der Amplitude i_1 blofs ungewöhnlich gebrochenes Licht ins Auge senden. Der gewöhnlich gebrochene Strahl ist nun sowohl im Innern des Kalkspaths, als auch nach seinem Austritt aus demselben nach dem Hauptschnitt, der ungewöhnlich gebrochene senkrecht zum Hauptschnitt vollständig polarisirt; es wird also, wenn ϑ den Winkel der Polarisationssebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt des Kalkspatrhomboëders resp. also das sogenannte Polarisationsazimuth des einfallenden Lichtes darstellt, jedenfalls von i blofs die Componente $i \cos \vartheta$ und von i_1 blofs $i_1 \sin \vartheta$ in den Kalkspath eindringen. Beim Eintritt, Durchgang und Austritt aus dem Kalkspath werden überdies diese Amplituden noch gewisse Veränderungen erleiden, welche wir für i durch den Factor k und für i_1 durch den Factor k_1 bezeichnen wollen. Heifsen wir ferner α den Winkel der Polarisationssebene des analysirenden Nicols mit dem Hauptschnitt des Kalkspatrhomboëders und β den Winkel des letzteren mit dem Hauptschnitt der Farben gebenden Krystallplatte, so werden die beiderlei gemischten Strahlen, welche aus dem Kalkspath mit den Amplituden $i k \cos \vartheta$ und $i_1 k_1 \sin \vartheta$ und den Verzögerungsphasen $\mathcal{A}$, und $\mathcal{A}_1$ austreten, nach dem Hindurchgang durch die Krystallplatte und den Analysator, folgende vier interferirende Strahlen mit gemeinschaftlicher Polarisationssebene geben:

$$\begin{aligned}
 & B k k' i \cos \vartheta \cos \beta \cos (\alpha + \beta) \sin (\tau - \mathcal{A}' - \mathcal{A}_1), \\
 & - B k_1 k' i_1 \sin \vartheta \sin \beta \cos (\alpha + \beta) \sin (\tau - \mathcal{A}' - \mathcal{A}_1), \\
 & B k k_1' i \cos \vartheta \sin \beta \sin (\alpha + \beta) \sin (\tau - \mathcal{A}' - \mathcal{A}_1), \\
 & B k_1 k_1' i_1 \sin \vartheta \cos \beta \sin (\alpha + \beta) \sin (\tau - \mathcal{A}' - \mathcal{A}_1),
 \end{aligned}$$

wo B ein Factor, der die gemeinsame Schwächung der Amplituden auf dem Wege der Strahlen von den Lichtquellen bis zum Kalkspathrhomboëder und von diesem bis zum Auge darstellt, ferner k' , k_1' , d' , und d_1' für die farbengebende Krystallplatte die entsprechende Bedeutung haben, wie die betreffenden Buchstaben ohne Strich für das Kalkspathrhomboëder, und endlich τ die Undulationsphase in der dem Auge des Beobachters zukommenden Entfernung von der Lichtquelle repräsentirt.

Als resultirende Intensität dieser vier Strahlen erhält man nach den gewöhnlichen Regeln:

$$(1) \quad R^2 = A + B \left\{ i i_1 k k_1 [k'^2 \cos^2(\alpha + \beta) - k_1'^2 \sin^2(\alpha + \beta)] \sin 2\beta \sin 2v \sin^2 \frac{d_1 - d_1'}{2} - (i^2 k^2 \cos^2 v - i_1^2 k_1'^2 \sin^2 v) k' k_1' \sin 2\beta \sin 2(\alpha + \beta) \sin^2 \frac{d_1 - d_1'}{2} + i i_1 k k_1 k' k_1' \sin 2(\alpha + \beta) \sin 2v \left[\sin^2 \beta \sin^2 \frac{d_1 - d_1' - (d_1' - d_1')}{2} - \cos^2 \beta \sin^2 \frac{d_1 - d_1' + (d_1' - d_1')}{2} \right] \right\},$$

wo A eine von den Verzögerungsphasen unabhängige Function von B , i , i_1 , k , k_1 , k' , k_1' , α , β , v . Damit nun unter übrigen gleichen Umständen die Interferenzfarben am deutlichsten werden und so ihr Verschwinden schärfer beurtheilt werden kann, bat man $\alpha = 0$ oder 90° und $\beta = 45^\circ$ zu setzen. Alsdann vereinfacht sich vorstehender Ausdruck zu:

$$(2) \quad R^2 = A + B \left\{ i i_1 k k_1 (k'^2 - k_1'^2) \frac{1}{2} \sin 2v \sin^2 \frac{d_1 - d_1'}{2} - (i^2 k^2 \cos^2 v - i_1^2 k_1'^2 \sin^2 v) k' k_1' \sin^2 \frac{d_1 - d_1'}{2} + i i_1 k k_1 k' k_1' \frac{1}{2} \sin 2v \left[\sin^2 \frac{d_1 - d_1' - (d_1' - d_1')}{2} - \sin^2 \frac{d_1 - d_1' + (d_1' - d_1')}{2} \right] \right\}.$$

In diesem Ausdrucke sind es bloß die mit dem Factor B versehenen periodischen Glieder, welche die Interferenzfarben bedingen, und zwar repräsentirt das erste Glied in der Klammer die durch das Kalkspathrhomboëder für sich

bedingte Interferenzerscheinung, das zweite diejenige der Krystallplatte des Polariskops für sich und endlich das dritte Glied Interferenzphänomene, welche durch die gleichzeitige Wirkung des Rhomboëders und der Krystallplatte erzeugt werden.

Für den Fall, daß wir es mit *weißem* oder überhaupt *nicht homogenem Lichte* zu thun haben, ist aber bekannt, daß eine dicke, unter irgend einem Winkel zur optischen Axe geschnittene Krystallplatte keine Interferenzfarben zeigt, indem die Wegdifferenz der interferirenden Strahlen so groß wird, daß die Maxima und Minima für die einzelnen Farben zu nahe zusammenfallen. Da dies ganz besonders vom Kalkspathe wegen seiner starken Doppelbrechung gilt, so wird also auch im vorliegenden Falle die Verzögerungsphase im Kalkspathrhomboëder $\delta - \delta'$ so groß seyn, daß wir von daher keine Interferenzfarben mehr erkennen können. Für die Krystallplatte KK dagegen soll eben die Verzögerungsphase $\delta' - \delta''$ so klein seyn, daß wir deutliche Interferenzfarben erhalten. Wenn aber $\delta' - \delta''$ klein ist gegenüber $\delta - \delta'$, so werden offenbar $\delta - \delta', -(\delta' - \delta'')$ und $\delta - \delta' + (\delta' - \delta'')$ wenig von einander verschieden und immer noch so groß seyn, daß im nicht homogenen Licht keine Farbenerscheinung dadurch bedingt wird. Sowohl das erste als dritte Glied in der Klammer tragen folglich zu der Interferenzerscheinung, die wir sehen, nichts bei, sondern es ist dieselbe bloß durch das zweite Glied bedingt, d. h. wir bemerken bloß das Interferenzphänomen, welches das Polariskop für sich allein giebt. Damit auch dieses verschwinde, ist nur nöthig, daß der Factor des zweiten Gliedes gleich Null werde, d. h. daß man habe:

$$i^2 k^2 \cos^2 \vartheta = i_1^2 k_1^2 \sin^2 \vartheta, \text{ oder } \frac{i^2}{i_1^2} = \frac{k_1^2}{k^2} \tan^2 \vartheta.$$

Nun verhalten sich aber in ein und demselben Medium die Quadrate der Amplituden wie die Intensitäten; also wird man auch als Bedingung für das Verschwinden der Farben haben:

$$(3) \quad \frac{J^2}{J_1^2} = \frac{k_1^2}{k^2} \tan^2 v = C \tan^2 v,$$

d. h. wenn wir den Winkel v der Polarisationssebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt des Kalkspatrhomboëders durch Drehen des ersteren so lange verändern, bis die Interferenzfarben im Polariskope verschwinden, so ist das Verhältniß der Lichtintensitäten der beiden Lichtquellen gleich dem Quadrat der trigonometrischen Tangente dieses Winkels multiplicirt mit einer gewissen Gröfse C , die zu bestimmen ist, wenn wir das Gesetz kennen, nach welchem ein polarisirter Lichtstrahl beim senkrechten Hindurchgang durch das Kalkspatrhomboëder sich zwischen dem gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahle theilt. Diese Bestimmung werde ich im zweiten Abschnitt theoretisch und experimentell auszuführen suchen.

Um zu entscheiden, ob auch für *homogenes Licht* die vorstehende einfache Bedingung für das Verschwinden der Farben Gültigkeit besitze, habe ich auf zweierlei Weise mit homogenem Lichte operirt. Das Sonnenlicht wurde vermitteltst eines Silbermann'schen Heliostaten horizontal durch eine von s'Gravesande'schen Schneiden gebildete Spalte in ein dunkles Zimmer geleitet und fiel in ungefähr 2^m Distanz auf einen undurchsichtigen Schirm mit einer zweiten, der ersteren parallelen Spalte; hinter diesem Schirm befand sich der Zerlegungsapparat, bestehend in drei großen Flintglasprismen, welche in geeigneter Weise auf einer Metallplatte aufgestellt sind und vermitteltst Correctionsschrauben, sowohl in Bezug auf ihre Axen einander parallel gemacht, als auch auf das Minimum der Ablenkung eingestellt werden können. Das durch die Prismen erzeugte Spectrum wurde endlich in ungefähr 2^m Distanz von denselben auf einen mit feinem geölten Papier bespannten Rahmen projectirt und der Apparat gegen diesen Schirm gerichtet. Da das Spectrum bei dieser Anordnung des Versuches etwas lichtschwach war, so wurde bei einem späteren Versuch die zweite Spalte durch eine achromatische Linse ersetzt, in deren Focus die erste Spalte sich befand und der mit

einem kleinen Fernrohr versehene photometrische Apparat dann unmittelbar hinter den Prismen aufgestellt. Die Untersuchung ergab in beiden Fällen, daß das Kalkspathrhomboëder auch im homogenen Licht für sich keinerlei Interferenzcurven zeige und daß die Interferenzerscheinung der farbengebenden Krystallplatte im Polariskope durch das Kalkspathrhomboëder gar nicht verändert werde, und ebenfalls bei geeigneter Stellung des Polarisators ganz verschwinde. Der Apparat kann somit unter Benutzung der Formel (3) nicht bloß zur Vergleichung von gemischtem, sondern auch von homogenem Lichte gebraucht werden.

Eine analoge Untersuchung des allgemeinen Falls, wo das von den Flächen AB und BC herkommende Licht theilweise polarisirtes ist, giebt als Bedingungsgleichung für die Neutralisation i. e. das Verschwinden der Farben:

$$(4) \quad \left[\frac{J^2}{2} + P^2 \cos^2 (\alpha - \varphi) \right] k^2 \cos^2 \varphi \\ = \left[\frac{J_1^2}{2} + P_1^2 \cos^2 (\alpha_1 - \varphi) \right] k_1^2 \sin^2 \varphi,$$

wo α und α_1 die Winkel darstellen, welche die Polarisationsebenen des polarisirten Lichts in den beiderlei Strahlen mit dem Hauptschnitt des Rhomboëders bilden, J^2 und J_1^2 die Intensitäten des natürlichen, P^2 und P_1^2 aber diejenigen des polarisirten Antheils in dem theilweise polarisirten einfallenden Lichte bezeichnen.

Behufs vollständiger Lösung der photometrischen Aufgabe in diesem allgemeinen Falle ist nun noch nöthig, die Verhältnisse von $\frac{J^2}{P^2}$ und $\frac{J_1^2}{P_1^2}$ mittelst eines *Polarimeters* zu bestimmen. Unser Photometer kann leicht in ein solches verwandelt werden. Man hat nämlich zu dem Ende bloß vor dem Polarisator ein zweites, annähernd gleich dickes Kalkspathrhomboëder so anzubringen, daß seine parallelen Begrenzungsflächen ebenfalls senkrecht zur Seaxe des Polariskops gerichtet sind und sein Hauptschnitt mit demjenigen des ersteren einen Winkel von 180° einschließt. Dieses zweite Rhomboëder R, R, R', R' , Taf. V Fig. 6, soll

mit dem ersteren in dieser Lage fest verbunden seyn, während der Polarisator PP dazwischen wie früher um die Sehaxe drehbar bleiben soll. Bringt man nun vor dem vorderen Rhomboëder einen Schirm mit rechteckiger Oeffnung oo von solcher Querdimension an, daß dasselbe zwei aneinandergränzende Bilder dieser Oeffnung erzeugt, so werden die durch diese Oeffnung senkrecht auf das Rhomboëder einfallenden Strahlen den in der Figur durch die punktirten Linien angedeuteten Weg durch den Apparat nehmen, und wir werden wieder in dem mit dem Polariskope zu untersuchenden Raume $\alpha\beta$ eine Mischung von senkrecht zu einander polarisirten Strahlen haben, deren Intensitätsverhältniß durch Drehung des Polarisators PP um seine Axe geändert werden kann. Die Untersuchung des partiell polarisirten Lichts geschieht in der Weise, daß man dasselbe durch die Oeffnung oo einfallen läßt, alsdann den ganzen Apparat um seine Axe so lange dreht, bis der Hauptschnitt des Rhomboëders mit der Polarisationssebene dieses Lichts zusammenfällt und darauf durch Drehung des Polarisators die Neutralisation herbeiführt.

Nach der beim Photometer auseinandergesetzten Methode findet man für diese Stellung des Polarisators folgende Bedingungsgleichung:

$$(5) \quad P^2 = \frac{J^2}{2} \left(\frac{k_1^2 k_1'^2}{k^2 k'^2} \tan^4 v - 1 \right) = \frac{J^2}{2} (CC \tan^4 v - 1),$$

wo P^2 die Intensität des polarisirten, J^2 diejenige des natürlichen Antheils im theilweise polarisirten Lichte, $\frac{k_1^2}{k^2} = C$ das Verhältniß der Schwächungen, welche der ungewöhnlich und gewöhnlich gebrochene Strahl bei ihrem Durchgange durch das eine Rhomboëder in ihrer Intensität erfahren und $\frac{k_1'^2}{k'^2} = C'$ die betreffende Gröfse für das andere Rhomboëder, endlich v wieder den Winkel des Rhomboëderhauptschnitts mit der Polarisationssebene des Polarisators PP darstellt ¹⁾.

1) Das Princip dieses Polarimeters kommt überein mit dem von Bernard angegebenen, *Compt. rend. T. 39 p. 775.*

§. 2. Beschreibung des ausgeführten Instruments.

An unserem Instrument als Photometer, wie es Fig. 7 in perspectivischer, nach einer Photographie ausgeführten Zeichnung darstellt, lassen sich drei Haupttheile unterscheiden, der eigentlich photometrische Apparat, das Polariskop und eine Vorrichtung zur zweckmäßigen Zuführung des Lichts der zu vergleichenden Lichtquellen. Diese drei Haupttheile sind gesondert in Fig. 8, *a*, *b*, *c* im Durchschnitt und in $\frac{1}{4}$ der natürlichen Gröfse dargestellt.

Der eigentlich photometrische Apparat besteht aus einer kürzeren cylindrischen Röhre *aa* Fig. 8*a*, welche in eine Kreisscheibe *bb* eingesetzt ist; über die beiderseits vorstehenden Enden sind zwei längere Röhrenstücke *dd* und *d₁d₁* geschoben, welche ausserhalb durch zwei diametral gegenüberstehende, um die Kreisscheibe herumgehende Bügel *c* und *c₁* fest mit einander verbunden sind. Der eine dieser Bügel *c* dient zugleich einem Getriebe *ef* zum Halter, welches in ein auf der Kreisscheibe befestigtes Zahnrad *gg* eingreift, so dafs man durch Drehung des Getriebes mittelst des Knopfes *e* die Kreisscheibe und damit auch die innere Röhre *aa* in Rotation versetzen kann. Um die Gröfse dieser Drehung bestimmen zu können, ist am Rande der Scheibe *bb* eine Theilung in $\frac{1}{4}^{\circ}$ auf Silber angebracht, an der man mittelst des feststehenden Nonius einzelne Minuten ablesen kann. Für die feineren Drehungen dient eine Micrometerschraube sammt Klemmvorrichtung, wie sie bei den Theodolithen üblich sind. In der Röhre *aa* steckt ein Foucault'scher Kalkspathpolarisator *hh*, der durch zwei Schrauben *i* und *i₁* um eine auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehende Axe gedreht und so in seiner Doppelfassung justirt werden kann. In die Röhren *dd* und *d₁d₁* werden die beiden Kalkspathrhomboëder mit ihren besonderen Fassungen eingeschoben, wenn der Apparat als Polarimeter gebraucht werden soll. (Die Zeichnung stellt das Photometer dar, und daher ist das eine Rhomboëder fortgelassen.) Beide Rhomboëder sind übrigens ganz gleich gefasst, nämlich in einen Messingcylinder *kk* mit ebenem Boden und

kreisförmiger excentrischer Oeffnung ll so gestellt, daß die untere Basis diese Oeffnung zuschließt, und dann in demselben mit Gyps festgegossen. Dieser Cylinder wird oben durch einen einzuschiebenden und vermittelt dreier seitlicher Schrauben zu befestigenden Deckel mm mit entsprechender excentrischer Oeffnung $l_1 l_1$ über der zweiten Basis des Rhomboëders verschlossen. Die drei vorstehenden Schraubenköpfe passen genau in drei Schlitz in der Röhre dd und ermöglichen so, das Rhomboëder, wenn es aus dem Apparat herausgenommen wird, nachher wieder genau in dieselbe Stellung zu bringen. Auf der entgegengesetzten Seite ist der Apparat durch einen Deckel nn verschlossen, dessen Oeffnung oo durch zwei Schieber beliebig verengt werden kann. Beim Gebrauch des Instruments als Polariometer wird derselbe mit dem schmälern Rande pp in den Deckel des hier einzuschiebenden Rhomboëders eingesetzt. Dieses zweite Rhomboëder greift in ähnlicher Weise mit den drei Schraubenköpfen seiner Fassung in Schlitz am Rande der Röhre $d_1 d_1$ ein. Um es dann gleichwohl mit dem ersten Rhomboëder in die erforderliche Parallelstellung der Hauptschnitte bringen zu können, besteht die Röhre $d_1 d_1$ aus zwei bei qq übereinandergeschobenen Stücken, die nach erfolgter Justirung durch eine Schraube r fest zu verbinden sind.

Auf das Ende der Röhre dd ist das Polariskop Taf. V Fig. 8b aufzuschrauben. Es besteht dasselbe aus zwei gekreuzten, unter 45° zur optischen Axe geschnittenen, je 2 Centm. dicken Quarzplatten aa , welche in einer Röhre bb gefaßt sind und durch acht Correctionsschrauben c in einer umschließenden Röhre dd nach jeder Richtung justirt werden können. Auf das obere Ende dieser Röhre ist ein schwach vergrößern des astronomisches Fernrohr ee (Objectiv von 33^{mm} Brennweite, Ocular von 24^{mm} Brennweite), das auf die Unendlichkeit eingestellt ist, aufgeschraubt. Es besitzt dasselbe ein justirbares Fadenkreuz f , zwischen demselben und dem Ocular eine unter 45° zur Axe geneigte Glasplatte g , aus ganz dünnem sogenanntem Birminghamer

Glas und eine seitliche durch einen Ring verschließbare Wandöffnung k , endlich vor dem Ocular ein Nicol'sches Prisma hh mit enger Ocularöffnung i . Die Röhre dd dieses Polariskop ist nicht unmittelbar an dem auf das obere Ende des Apparats $8a$ aufzuschraubenden Deckel ll befestigt, sondern an einer Metallplatte mm , welche mittelst der Schraube n zwischen zwei Schienen verschoben werden kann. Diese Verschiebbarkeit des Polariskops ist nothwendig, da, wie aus den Fig. 5 und 6 ersichtlich ist, das zu untersuchende Strahlenbüschel beim Polarimeter centrisch, beim Photometer aber excentrisch zu stehen kommt.

Der Gebrauch des Apparats als Photometer verlangt, daß die von den beiden Lichtquellen beleuchteten Flächen in einer Geraden aneinanderstoßen, oder wenigstens nur einen sehr geringen Zwischenraum zwischen sich lassen. Um dieß für alle gegebenen Fälle leicht ermöglichen zu können, wird der Apparat Fig. 8c auf das Ende der Röhre $d_1 d_1$ des Photometers mittelst der Hülse aa aufgeschoben. An dieser Hülse ist mittelst der durchbrochenen Platten bb ein würfelförmiger, innen geschwärzter Kasten cc befestigt, in welchem zwei rechtwinklichte Crownglasprismen d und d_1 auf kleinen Tischen so aufgestellt sind, daß sie von außen auf denselben um Axen, die senkrecht stehen auf der Ebene der Zeichnung, mittelst eines Schlüssels gedreht und nach Entfernung des oberen Deckels auch ganz herausgenommen werden können, sodann sind auch diesen Axen, resp. den Tischen, von unten durch Correctionsschrauben beliebige Neigungen zu geben. Die beiden Prismen stoßen mit ihren einen Kanten nahezu aneinander, und diese Berührungskante fällt in die Mitte des Kastens. Derselbe besitzt nun ferner je in der Mitte der drei Seitenwände gleich große kreisförmige Oeffnungen mit entsprechenden Ansatzröhren e , e_1 , e_2 . Auf die beiden ersteren sind zwei weitere Kästen f und f_1 aufgeschoben, von denen jeder wieder ein rechtwinklichtes, allseitig justirbares Crownglasprisma g und g_1 enthält. Es sollen diese das durch die Oeffnungen h und h_1 einfallende Licht den ersteren Pris-

men zureflectiren. Die Ansatzröhren dieser letzteren Oeffnungen haben denselben äußeren Durchmesser wie die von e , e_1 und e_2 , so daß auf alle entweder Deckel wie bei e_2 oder wie bei h Halter ii für um stählerne Axen kk drehbare geölte Papierscheiben pp passen.

Das ganze Instrument ist endlich, wie die perspectivische Ansicht es zeigt, vermittelt eines die Röhre d_1d_1 umschließenden Ringes an einem Dreifuße mit Stellschrauben so befestigt, daß es sich centrisch um eine horizontale und excentrisch um eine verticale Axe drehen kann.

§. 3. Justirung und Gebrauch des Instruments.

Die erste Aufgabe ist, die optische Axe des Polariskopfernrohrs, mittelst dessen man die von der Savart'schen Doppelplatte erzeugten Interferenzfransen beobachtet, senkrecht auf die Begränzungsfläche l, l_1 des oberen Kalkspathrhomboëders zu stellen. Zu dem Ende entfernt man, nachdem man das Fernrohr ee abgenommen hat, den Doppelquarz aus der Röhre dd , schraubt das Fernrohr wieder auf und läßt nun durch die seitliche Oeffnung k entweder diffuses Himmelslicht oder das Licht einer Kerzenflamme auf den Spiegel g einfallen. Da das Fernrohr zur Beobachtung der Farbenfransen auf die Unendlichkeit eingestellt werden muß, so erblickt man dann unmittelbar neben dem direct gesehenen Fadenkreuz sein von der ebenen Rhomboëderfläche reflectirtes Bild und kann daher durch Verschieben des Fadenkreuzes vermittelt der Justirungsschrauben eine vollständige Coincidenz beider bewerkstelligen, in welchem Falle dann obige Bedingung erfüllt seyn wird. Man sieht dabei im Allgemeinen noch zwei andere, etwas schwächere Bilder, herrührend von der Reflexion der beiden gebrochenen Strahlen an der hinteren Fläche des Rhomboëders. Diese Bilder werden aber nach erfolgter Justirung des Fernrohrs ebenfalls mit dem Fadenkreuze coincidiren, wenn die beiden Endflächen des Rhomboëders wirklich parallel sind, wie wir sie vorausgesetzt haben.

Nach dieser Operation wird der Doppelquarz wieder

eingesetzt und seinerseits so justirt, daß er das vom Rhomboëder reflectirte Bild nicht ablenkt resp. das von seiner vorderen Fläche reflectirte Bild des Fadenkreuzes ebenfalls mit dem letzteren coïncidirt. Je nachdem nun der Apparat als Photometer oder als Polarimeter dienen soll, wird durch den Schieber *m* das Polariskop so gestellt, daß das Fadenkreuz entweder den Zwischenraum zwischen dem gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Bilde eines über der Mitte der centrischen Oeffnung *oo* gespannten Fadens halbt, oder mit dem gewöhnlich gebrochenen Bilde zusammenfällt ¹⁾. Nach dieser Verschiebung ist es gut, sich durch Beobachtung des reflectirten Fadenkreuzes von der unveränderten Richtung der Polariskopaxe zu überzeugen. Das Foucault'sche Prisma soll so construirt und zu stellen seyn, daß dasselbe beim Drehen um seine Axe keine Veränderung in der angegebenen relativen Stellung des Fadenkreuzes und jener Bilder des ausgespannten Fadens bewirkt.

Für den Gebrauch des Apparats als Polarimeter wird die Oeffnung *oo* so lange verkleinert, bis das eine oder andere Rhomboëder gerade zwei aneinanderstoßende, nicht übergreifende Bilder derselben erzeugt, sodann ein Faden über die Oeffnung ausgespannt und derselbe, sowie das untere Rhomboëder, um die Axe des Apparats so lange gedreht, bis beide Rhomboëder von diesem Faden genau übereinanderfallende Bilder geben; alsdann sind die Hauptschnitte beider Rhomboëder parallel. Um auch noch die Endflächen des unteren Rhomboëders senkrecht zur Polariskopaxe zu stellen, kann man nach Entfernung des Polarisors und ersten Rhomboëders wieder das reflectirte Bild des Fadenkreuzes beobachten; in diesem Falle ist dann aber die Polariskopaxe unverändert zu lassen und die bei sorgfältiger Ausführung des Apparats jedenfalls nur kleine noch nothwendige Correction durch Schrauben in der Seitenwand

1) Ein schwaches Ausziehen des Oculars ermöglicht beide, Fadenkreuz und Doppelbild des ausgespannten Fadens, zu gleicher Zeit hinlänglich deutlich behufs Ausführung dieser Justirung zu sehen.

der Röhre $d_1 d_1$, welche das Rhomboëder etwas neigen, zu bewerkstelligen. Bei den polarimetrischen Messungen soll endlich noch die Polarisationssebene des einfallenden Lichts bestimmt werden, damit man dann den Hauptschnitt der Rhomboëder damit zusammenfallend machen kann. Diefes kann auf zweierlei Weise geschehen. Entweder dreht man nach Entfernung der Rhomboëder und des Polarisators aus dem Apparat den letzteren um seine Axe so lange, bis im Polariskope die Farben verschwinden; bei dieser Stellung fällt dann der Hauptschnitt des Doppelquarzes mit der Polarisationssebene des einfallenden Lichts entweder zusammen, oder steht auf ihr senkrecht. Eine Drehung des ganzen Apparats um 45° wird folglich jene Polarisationssebene dem Hauptschnitt der Rhomboëder parallel machen oder darauf senkrecht stellen, da ja der Hauptschnitt der farbengehenden Krystallplatte 45° mit dem Rhomboëderhauptschnitt bilden soll. Um die geforderte Parallelstellung zu erhalten und nicht die zweite senkrechte Stellung, genügt es, ein gewöhnliches Polariskop zu Hülfe zu nehmen. Da bei dieser Methode eine Zerlegung des Apparats nothwendig ist, so dürfte folgende andere vorzuziehen seyn, bei welcher alle Theile unverändert in ihrer Stellung gelassen werden können. Wir richten das Polarimeter zunächst nach einer Lichtquelle, welche nur natürliches Licht ausstrahlt und drehen nun den Polarisator, bis Neutralisation erfolgt. Es gilt dann die Bedingungs-gleichung

$$\tan^2 \varphi = \frac{k^2 k'^2}{k_1^2 k_1'^2}.$$

Ganz dieselbe Bedingung entspricht aber auch dem Verschwinden der Farben in dem Falle, wo das einfallende Licht im Azimuth 45° zum Hauptschnitt der Rhomboëder ganz oder theilweise polarisirt ist. Drehen wir somit bei der soeben ermittelten Stellung des Polarisators den ganzen Apparat um seine Axe, bis auch bei einfallendem partiell polarisirtem Licht Neutralisation eintritt, so wissen wir, dafs jetzt die gesuchte Polarisationssebene 45° mit dem Rhomboëderhauptschnitt einschließt, und wir haben daher nur

noch den ganzen Apparat um 45° um seine Axe zu drehen — nach welcher Seite lehrt wieder ein Hülfspolarisirkop —, um den Apparat in die geforderte Stellung für die Messung gebracht zu haben.

Den Gebrauch des Prismenapparats Fig. 8c für photometrische Zwecke wird die Erörterung einiger specieller Fälle am deutlichsten zeigen. Sind z. B. zwei gleichförmig leuchtende oder erleuchtete Flächen, welche in einer Geraden zusammenstoßen, mit einander zu vergleichen, so richtet man die Axe des Apparats gegen diese Gränze, nachdem man die beiden Prismen d und d_1 entfernt, den Deckel bei e_2 abgenommen, dagegen h und h_1 verschlossen hat, und dreht darauf den Apparat in der haltenden Hülse, bis der Rhomboöderhauptschnitt auf jener Gränzlinie senkrecht steht. Sind die beiden leuchtenden oder erleuchteten Flächen durch einen mäßigen Zwischenraum getrennt, so wird der Prismenapparat in der Zusammensetzung, wie ihn Fig. 8c zeigt, gebraucht, e_2 geschlossen und h und h_1 ganz geöffnet, die Prismen geben dann zwei aneinanderstossende Bilder der zu vergleichenden Lichtquellen. Um in diesem Falle den Einfluß einer allfälligen verschiedenen Schwächung des Lichts durch die Prismen rechts und links zu eliminiren, hat man bloß eine zweite Messung zu machen, nachdem man den Prismenapparat um 180° um die Instrumentaxe gedreht hat, und aus beiden Beobachtungen das Mittel zu nehmen. Stehen die beiden zu vergleichenden Lichtquellen einander diametral gegenüber, so stellt man den Apparat mitten zwischen beide und entfernt die beiden Prismenkasten f und f_1 . Eine allfällige verschiedene Lichtschwächung durch die beiden Prismen wird auch hier auf die eben angedeutete Weise unschädlich zu machen seyn. — Hat man leuchtende Punkte oder Linien oder die Totalwirkung ungleichförmig erleuchteter oder leuchtender Flächen, wie z. B. von Flammen, zu vergleichen, so müssen von denselben durch Diffusion bei der Reflexion an dickem weissen Papier, oder beim Durchgang durch geöltes Papier oder mattgeschliffenes Glas gleichförmig erleuchtete Flächen

erzeugt werden. Die diffuse Reflexion oder Refraction in einer nahestehenden, ruhenden Papierscheibe ist dabei in der Regel zur Herstellung einer völligen Gleichförmigkeit der erleuchteten Fläche nicht genügend. Man muß dann, wie es meines Wissens bei photometrischen Untersuchungen zuerst O. Hagen ¹⁾ gethan hat, die Papierscheibe von der Hand oder durch ein Uhrwerk in rasche Rotation um eine durch ihre Mitte gehende Axe versetzen. In der Fig. 8c ist, wie schon erwähnt, bei der Oeffnung *h* eine solche um eine Axe drehbare Scheibe dargestellt; auch in der perspectivischen Zeichnung sind die Scheiben vor beiden Oeffnungen zu erkennen. Eine verschiedene Schwächung des Lichts durch zwei verschiedene Scheiben, die vor zwei verschiedenen Oeffnungen des Prismenapparats angebracht sind, kann durch eine Doppelbeobachtung auf analoge Weise wie bei den Prismen aus dem Endresultate eliminirt werden.

Streng genommen ist unser Apparat, wie wir später sehen werden, bloß zur Vergleichung gleichartiger homogener Lichtquellen zu benutzen; indessen stößt der Gebrauch desselben auch bei gleichartigem, gemischtem Lichte in der Praxis auf keinerlei Schwierigkeiten und erleidet dabei auch die Genauigkeit der Messung keinen Eintrag. Sind endlich verschieden gefärbte, nicht homogene Lichtquellen mit einander zu vergleichen, so besteht die streng wissenschaftliche Methode der Vergleichung darin, daß man, wie schon Goni ²⁾ vorgeschlagen hat, von den beiden Lichtquellen vermittelt ein und desselben Prismas zwei aneinandergränzende Spectren derselben erzeugt und dann die Helligkeit der entsprechenden Theile derselben vergleicht. Unser Apparat eignet sich vorzüglich zur Ausführung dieser Messung. Man befestigt zu dem Ende den Theil 8c an einem besonderen Stativ und schiebt in die Röhre *aa* eine andere ein, welche an ihrem inneren Ende eine horizontale Spalte, am äußeren eine um ihren Focus von dieser Spalte abstehende achromatische Linse enthält. An derselben Röhre wird hin-

1) Diese Ann. Bd. 106 S. 42.

2) *Compt. rend. t. 50 p. 156.*

ter der Linse das analysirende Prisma so befestigt, daß seine brechende Kante horizontal liegt und es um eine horizontale Axe drehbar ist. Die aus dem Prisma schief nach oben austretenden zerstreuten Strahlen kann man dann unmittelbar zum Photometer gelangen lassen, wo das Polariskopfernrohr ein scharfes Bild des Spectrums giebt. Da nun die eine Hälfte der Spalte von der einen, die andere von der anderen Lichtquelle beleuchtet wird, wenn man die Strahlen resp. durch die Oeffnungen h und h_1 einfallen läßt, so kann also die Neutralisation in verschiedenen Theilen der aneinandergränzenden Spectra beider Lichtquellen leicht beobachtet werden.

Es dürfte hier am Platze seyn, noch einer unmittelbaren Vergleichung verschieden gefärbter Lichtquellen vermittelst unseres Apparats zu erwähnen, welche sich mir bei der photometrischen Vergleichung von Stearinkerzen mit Photogenlampen und elektrischen Lampen ergab. Es ist dieselbe allerdings nicht eine streng wissenschaftliche, reicht aber für gewöhnliche technische Untersuchungen jedenfalls aus. In der Technik kommt es nämlich in der Regel blofs darauf an, diejenigen Strahlen der beiden wenig verschiedenen gefärbten Lichtquellen, welche für das Auge die hellsten sind, i. e. die gelben und grüngelben Strahlen des Spectrums, mit einander zu vergleichen. Während nun bei den gewöhnlichen Photometern der unmittelbare Vergleich verschieden gefärbter Lichtquellen fast unmöglich ist, indem das Auge bei verschiedener Farbennüance nur sehr unsicher die Gleichheit der hellsten Strahlen beurtheilt, macht das bei unserem Photometer und überhaupt bei allen Polarisationsphotometern keine grofse Schwierigkeit. Allerdings verschwinden in diesem Falle die Interferenzfarben im Polariskop bei keiner Stellung des Kalkspathpolarisators ganz, indem, wenn für eine gewisse Farbe die Bedingung der Neutralisation erfüllt ist, sie für die anderen nicht auch erfüllt seyn wird; man findet indessen beim Drehen des Polarisators stets, daß die übrig bleibenden Interferenzfarben bei einer gewissen Stellung ein Minimum der Intensität er-

reichen. Alsdann neutralisiren sich aber offenbar die hellsten Theile der Spectren beider Lichtquellen; indem wir also diese Minimumstellung beobachten, werden wir daraus das Intensitätsverhältniß der für das Auge hellsten Strahlen beider Lichtquellen berechnen können, worauf es eben ankommt. Auf diesen Vorzug der Polarisationsphotometer vor den gewöhnlichen Photometern ist, meines Erachtens, bis dahin nicht genug aufmerksam gemacht worden.

§. 4. Fehlerquellen und Leistungsfähigkeit des Instrumentes.

Die Theorie unsers Instrumentes verlangt zunächst, daß die Ein- und Austrittsflächen des Lichts bei den Kalkspath-Rhomboëdern plan und einander parallel seyen. Schon die Beobachtung des von den Hinterflächen der Rhomboëder reflectirten Fadenbildes zeigte, daß die Abweichung der Flächen vom Parallelismus jedenfalls gering sey. Eine besondere Messung mittelst eines Malus'schen Goniometers, dessen Nonien 10" ablesen lassen, ergab beim einen Rhomboëder eine Abweichung von 20", beim andern eine solche von 30". Diese Fehler können daher jedenfalls auf das Resultat keinen erheblichen Einfluß haben. Auch die Planität der Flächen erwies sich als ganz befriedigend, indem von entfernten Gegenständen nach der Reflexion an denselben noch ganz scharfe Bilder in einem 40 Male vergrößernden Fernrohre erhalten wurden¹⁾.

Es soll ferner die Fernrohraxe des Polariskops auf den Endflächen der Rhomboëder senkrecht stehen. Diese Bedingung kann durch Beobachtung des reflectirten Fadenbildes in aller Schärfe erfüllt werden und da man dieselbe leicht vor jeder Beobachtung schnell anstellen kann, so bedarf dieser Fehler keiner weitem Berücksichtigung.

Die Theorie setzt endlich noch voraus, daß die Strahlen von den beiden Lichtquellen beim Durchgang durch den Apparat bis zu der dem Auge nächsten Fläche des

1) Diese Kalkspath-Rhomboëder von untadelhafter Reinheit und höchst vollkommener Politur sind sammt ihren Fassungen von Hrn. Mechaniker und Optiker Böttcher in Berlin verfertigt worden.

Rhomboëders, von wo an sie dann gemischt bleiben, keinerlei Aenderung in ihrem Intensitätsverhältniß erfahren, aufser der im Kalkspath-Rhomboëder, welche wir in Rechnung gebracht haben. Es wäre nun aber gedenkbar, daß die Strahlen von der Lichtquelle J her beim Durchgang durch den Polarisator und Eintritt in das Rhomboëder in Folge von Politur- oder anderweitigen Verschiedenheiten an benachbarten Stellen, sey es nun der Oberfläche oder im Innern, eine andere Veränderung erfahren würden als die von J_1 her. Der Einfluß solcher Verschiedenheiten kann indessen ermittelt und aus dem Resultate eliminirt werden, wenn man die Messung wiederholt, nachdem man sowohl das Kalkspath-Rhomboëder als auch den Kalkspath-Polarisator in ihren Fassungen um 180° gegreht hat, und dann das Mittel aus beiden Messungen nimmt.

Allfällige Theilungs- und Excentricitätsfehler können hier, wo es sich bloß darum handelt, noch ganze Minuten zu bestimmen, nicht in Betracht kommen.

Es bleibt somit als einzige zu berücksichtigende Fehlerquelle der Beobachtungsfehler übrig. Wir erhalten ihn, wenn wir bei ganz constantem Verhältniß der Lichtintensitäten mehrmals nacheinander den Polarisator durch Drehung auf den Punkt einstellen, wo für unser Auge die Farben im Polariskope verschwinden und jedesmal den Winkel φ ablesen; die Differenz zwischen diesen einzelnen Ablesungen repräsentirt den Beobachtungsfehler. Die Größe desselben hängt aufser von der Lichtstärke, der Empfindlichkeit des Auges und dem Schutz desselben vor Seitenlicht wesentlich von der Beschaffenheit des Polariskops ab. Unter allen mir bekannten Polariskopen habe ich dasjenige von Savart als das tauglichste erfunden. Es wurden dazu Quarzplatten von 2 Centm. Dicke genommen, um trotz der Beobachtung der Interferenzfarben mit einem vergrößerten Fernrohr doch noch ein System feiner, scharfer Franzen zu erhalten. Das Auslöschen solcher kann nämlich viel schärfer beurtheilt werden als das von stark vergrößerten, dann aber auch verwaschenen und undeutlichen Farben-

fransen. Fig. 5a stellt das Fransensystem dar, welches das Polariskop zeigt, sammt dem darauf projecirten Fadenkreuz. Beim Drehen des Polarisators verschwindet dasselbe nicht ganz, sondern es geht bloß ein farbloser Streifen über das Gesichtsfeld hin, der complementär gefärbte Fransensysteme trennt. Man liest den Nonius ab, wenn der farblose Streifen mit seiner Mitte gerade auf den Durschnitt der Faden im Fadenkreuze fällt, wie dieß Fig. 9 b Taf. V darstellt. Für mein Auge, wenn es nicht ermüdet und gehörig vor Seitenlicht geschützt ist — was z. B. in einem hellen Raume durch Befestigung eines conischen Schirms an der Ocularröhre und mit einem dunklen Tuch, das den Kopf einhüllt, zu erreichen ist — beträgt so bei gleicher Intensität der beiden Lichtquellen und bei mittlerer Helligkeit, wie sie z. B. das diffuse Himmelslicht besitzt, der Beobachtungsfehler bei meinem Apparate 1 bis 2'. Aus diesem Beobachtungsfehler ergibt sich aber leicht die entsprechende Genauigkeit in der Bestimmung des Verhältnisses der Lichtintensitäten. Wenn man nämlich unsere für das Photometer geltende Formel (3):

$$\frac{J^2}{J_1^2} = C \tan^2 v$$

nach v differentiirt, so kommt:

$$d \frac{J^2}{J_1^2} = C \frac{2 \tan v}{\cos^2 v} dv.$$

Setzt man hier den einer bestimmten Stellung v des Polarisators zukommenden Beobachtungsfehler ein, so ergibt sich daraus der dem letztern entsprechende Fehler in Bestimmung des Verhältnisses der Lichtintensitäten. Angenommen die unbekannte Constante C sey = 1 (von welchem Werthe sie in der That nicht sehr abweicht) und der Beobachtungsfehler sey 1', also $dv = \text{arc. } 1'$, so ergibt sich für:

v	$\frac{J^2}{J_1^2}$	$d \frac{J^2}{J_1^2}$
30°	0,3333	0,00045
45	1,0000	0,00116
60	3,0000	0,00403

Hieraus folgt, daß meinem Beobachtungsfehler von 1 bis 2' für Werthe von ϑ , welche zwischen 30 bis 40° variiren, eine Genauigkeit von $\tau_{\sigma\sigma\sigma}$ bis $\tau_{\sigma\sigma\sigma}^2$ in der Bestimmung des Verhältnisses der Lichtintensitäten bei einmaliger Einstellung entspricht. Bei einer vollständigen Messung werden nun aber jedenfalls vier Einstellungen gemacht, nämlich in jedem Quadranten eine. Denn zwei Einstellungen in benachbarten Quadranten sind, wie wir gesehen haben, nothwendig, um von der unbekannten Normalstellung unabhängig zu werden, und zwei andere in den diametral gegenüberliegenden Quadranten, wobei dann der Polarisator je eine um 180° verschiedene Stellung hat, bezwecken die Elimination allfälliger Ungleichartigkeiten im Polarisator. Nimmt man das Mittel aus diesen Beobachtungen, so steht zu erwarten, daß dasselbe auch minder Geübten das Intensitätsverhältniß bis auf $\tau_{\sigma\sigma\sigma}$ genau gebe.

Die Erfahrung hat mir ferner gezeigt, daß es nicht räthlich ist, bei kleinern oder größern Winkeln ϑ als die oben betrachteten Gränzwerte von 30 und 60° Messungen anzustellen, indem dann die Unsicherheit sehr viel größer wird. Sollte daher das Intensitätsverhältniß 1:3 bei den zu vergleichenden Lichtquellen überschritten werden, so muß man zu weitem Hilfsmitteln seine Zuflucht nehmen, um das Intensitätsverhältniß in genau zu bestimmender Weise verändern zu können. Ich werde bei später mitzutheilenden Untersuchungen derartiger Hilfsmittel näher erwähnen.

In ähnlicher Weise können wir auch die Leistungsfähigkeit des Polarimeters ermitteln. Die Formel (5) für dasselbe:

$$\frac{P}{J^2} = \frac{1}{4} (C C' \tan^2 \vartheta - 1)$$

gibt nach ϑ differentiirt:

$$d \frac{P}{J^2} = 2 \frac{\tan^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} C C' d\vartheta.$$

Setzen wir hier wieder annäherungsweise: $C = C' = 1$, so ergibt sich für $\vartheta = 52^\circ 46' 16''$.

$$\frac{P^2}{J^2} = 1, \quad d \frac{P^2}{J^2} = 12,45 \, dv,$$

soll also bei der Bestimmung des Verhältnisses von P^2 zu J^2 ebenfalls eine Genauigkeit von $\frac{1}{10000}$ erhalten werden, so darf der Beobachtungsfehler bloß $\frac{1}{3}'$ betragen. Eine weitere Erörterung der Fehler des Polarimeters würde hier zu weit führen und ich verschiebe sie daher bis zur Mittheilung von gewissen Anwendungen desselben.

II. Untersuchung über das Gesetz, nach welchem ein vollständig polarisirter Lichtstrahl beim senkrechten Durchgang durch eine von parallelen Flächen begränzte Krystallplatte zwischen dem gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahle sich theilt.

Der Erste, der ein bestimmtes Gesetz für das Verhältniß der Lichtintensitäten des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahls aufstellte, ist Malus gewesen. In seiner „*Théorie de la double refraction*“¹⁾ nimmt er nämlich an, daß, wenn ein natürlicher Lichtstrahl von der Intensität Q senkrecht auf eine Seite eines von seinen natürlichen Bruchflächen begränzten Kalkspath-Rhomboëders einfalle, alsdann die Intensität der beiden austretenden Strahlen gegeben sey durch:

$$F_o = m \frac{Q}{2} \quad \text{und} \quad F_e = m \frac{Q}{2},$$

wo F_o die Intensität des gewöhnlich und F_e diejenige des ungewöhnlich gebrochenen Strahls, m die Schwächung beim Durchgange bezeichnet. Nach dem senkrechten Durchgang durch ein zweites gleiches Rhomboëder, dessen Hauptschnitt mit dem des ersten einen Winkel i einschließt, sollen dann die Intensitäten der vier Strahlen, nämlich des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen, im zweiten Rhomboëder herrührend vom gewöhnlich gebrochenen im ersten: F_{oo} und F_{oe} und der betreffenden Strahlen, die vom ungewöhnlich gebrochenen im ersten Rhomboëder herkommen: F_{eo} und F_{ee} seyn:

1) *Mémoires présentés par divers savants; t. 2, p. 303. Paris 1811.*

$$F_{..} = \frac{Q}{2} m^2 \cos^2 i, \quad F_{..} = \frac{Q}{2} m^2 \sin^2 i,$$

$$F_{..} = \frac{Q}{3} m^2 \sin^2 i, \quad F_{..} = \frac{Q}{2} m^2 \cos^2 i.$$

Malus giebt nicht an, ob er durch eigentlich photometrische Messungen zu diesem Gesetze gelangt sey. Haben ihn aber blofs theoretische Betrachtungen dazu geführt, so mußten ihm jedenfalls für die Richtigkeit desselben die Beobachtungen zu sprechen scheinen, wonach in der That für $i = 0$: $F_{..}$ und $F_{..}$ ein Maximum erreichen und $F_{..}$ und $F_{..}$ gleich Null werden, ferner für $i = 90^\circ$: $F_{..}$ und $F_{..}$ gleich Null werden, dagegen $F_{..}$ und $F_{..}$ einen Maximumswerth erlangen, endlich für $i = 45^\circ$ die unmittelbare Vergleichung mit bloßem Auge eine gleiche Intensität aller vier Bilder zu ergeben scheint. Dafs Malus wirklich diese Beobachtungen als Bestätigung seines Gesetzes betrachtete, scheint auch Arago, der sich zuerst wieder damit befaßte, anzunehmen; wenigstens sprechen dafür seine Aeußerungen in den *Mémoires scientifiques t. I, p. 153 et 154*. Die Bestätigung des Malus'schen Gesetzes durch Beobachtungen für die zwei Gränzfälle und eine mittlere Stellung haben indessen Arago nicht genügt und er suchte daher dasselbe auch für zwischenliegende Werthe von i unter Benutzung seines Polariskops, Glassatzpolarimeters und eines eigenthümlichen photometrischen Apparats zu prüfen, wobei er sich darauf stützte, dafs für $i = 45^\circ$ oder bei einfallendem natürlichen Licht wirklich die beiderlei Strahlen genau gleich intensiv seyen. Die Messungen, welche Laugier und Petit¹⁾ im Auftrage von Arago ausführten, bestätigten das Malus'sche Gesetz mit einer Genauigkeit von ungefähr $\frac{1}{10}$ des Intensitätsverhältnisses der beiden Strahlen; bei der Untersuchung mit dem Polariskop konnte ebenso für $i = 45^\circ$ eine Verschiedenheit in der Intensität der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen nicht entdeckt werden. Die hiebei benutzte doppeltbrechende Platte war aus *Bergkrystall* geschnitten. Arago

1) *Oeuvres de Fr. Arago, Mémoires scientifiques t. I, p. 179 et 180.*

und Andere scheinen damit das Malus'sche Gesetz auch für andere doppelbrechende Körper wie z. B. den Kalkspath als bestätigt betrachtet zu haben. Es beweisen dies die mannichfachen Anwendungen, welche aufser Arago ¹⁾ auch andere Physiker davon gemacht haben. So benutzten es Beer ²⁾ und O. Hagen ³⁾ bei Untersuchungen über die Absorption des Lichts in Krystallen, Provostaye und Desains ⁴⁾ bei der Vergleichung des Lichtausstrahlungsvermögens glühender Körper.

Vermittelst unsers Instruments läst sich nun das Malus'sche Gesetz in einem speciellen Falle mit großer Schärfe prüfen. Richtet man nämlich dasselbe gegen eine ganz gleichmäßig beleuchtete Wand, so daß man hat: $J = J_1$, so muß zufolge der Gleichung (3) der Neutralisationswinkel σ gegeben seyn durch:

$$\tan^2 \sigma = \frac{1}{C}.$$

Wenn aber das Malus'sche Gesetz richtig ist, so soll $C = 1$ seyn und folglich der Neutralisationswinkel in unserem speciellen Falle gleich 45° werden. Ich habe auf zweierlei Weisen ganz gleichmäßig beleuchtete Flächen hergestellt: einmal, wie ich schon oben andeutete, dadurch, daß ich vor der Oeffnung des Photometers eine durchscheinende (geölte) Papierscheibe aufstellte, welche durch ein Uhrwerk sehr rasch gedreht wurde und in unmittelbarer Nähe des geöffneten Fensters sich befand. Sodann erzielte ich auch eine gleichmäßige Beleuchtung, indem ich das von einem großen (4 Fuß ins Quadrat haltenden) weißen Papierschirm reflectirte Sonnenlicht in einer Distanz von etwa 10 Fuß mit dem Apparate auffing. Bei dieser Entfernung des Schirms verwischen sich nämlich alle die kleinen Ungleichartigkeiten im Papier, und da derselbe auf der ringsum freien Terrasse der Berner Sternwarte nahezu senkrecht

1) *Oeuvres de Fr. Arago. Mémoires sur la photométrie.*

2) Diese Ann. Bd. 84 S. 37.

3) Diese Ann. Bd. 106 S. 33.

4) *Compt. rend. t. 38 p. 977.* Diese Ann. Bd. 93 S. 151.

gegen die Richtung der auffallenden Sonnenstrahlen aufgestellt war, so kann man jedenfalls eine gleichmäßige Erleuchtung durch diese voraussetzen. Bei meinen ersten Versuchen erhielt ich zwar keine ganz constanten Resultate, doch waren die Werthe von ϑ stets um Gröfsen von 45° verschieden, welche den Beobachtungsfehler bedeutend überstiegen. Ich schrieb diese Abweichung dem Umstande zu, dafs bei der damaligen Einrichtung des Apparats die optische Axe des Polariskops noch nicht justirbar war und daher zu vermuthen war, es stehe dieselbe nicht genau senkrecht auf den Begrenzungsflächen des Rhomboëders. Beinahe wäre ich in denselben Fehler wie O. Hagen ¹⁾ verfallen, der unter Voraussetzung der Richtigkeit des Malus'schen Gesetzes die senkrechte Stellung der Sechse danach beurtheilte, dafs für ein Azimuth $\vartheta = 45^\circ$ die beiden Bilder einer Oeffnung gleich hell erscheinen mußten. Nachdem indessen der Apparat die vollkommnere, oben beschriebene Einrichtung erhalten hatte, so dafs man leicht vor jedem Versuche die optische Axe senkrecht zu den Rhomboëderflächen stellen konnte, erhielt ich als Mittel aus je zwei Einstellungen in jedem Quadranten an einer Reihe verschiedener Tage Werthe für ϑ , welche im Maximum um nicht mehr als 2 Minuten von einander abwichen. Aus diesen Resultaten ergibt sich als mittlerer Werth für:

$$J^2 = J_1^2: \quad \vartheta = 44^\circ 36'$$

mit einem mittleren Fehler von $\pm 30''$. Es weicht somit dieses Beobachtungsergebnis von dem durch das Malus'sche Gesetz geforderten Werth um $24'$ ab; das ist aber eine Gröfse, welche den Betrag der möglichen Fehler weit übersteigt. Daher kann denn, wenigstens für den Kalkspath, das Malus'sche Gesetz nicht richtig seyn; es ist mit anderen Worten die Constante $C = \frac{k_1^2}{k^2}$ in der Gleichung (3) nicht gleich 1, sondern zufolge unserer Beobachtung:

$$C = \frac{1}{\tan^2 44^\circ 36'} = 1,0283.$$

1) Diese Ann. Bd. 106 S. 44.

Poggendorff's Annal. Bd. CXVIII.

Es werden also auch bei senkrechtem Einfall von natürlichem Licht auf ein Kalkspathrhomboëder die von einer kleinen Oeffnung durch dasselbe erzeugten zwei Bilder nicht genau gleich hell, sondern um nahe $\frac{1}{3\pi}$ in ihrer Intensität verschieden und zwar wird das gewöhnlich gebrochene Bild das schwächere seyn. Haidinger behauptet in der That, die beiden Bilder seyen nicht genau gleich hell. Bei Beobachtungen, die ich selbst in dieser Hinsicht anstellte, konnte ich, selbst wenn beide Bilder sich in einer Geraden berührten, nicht mit Sicherheit einen Unterschied constatiren. Auch andere Personen, denen ich die Erscheinung zeigte, erklärten die Bilder als gleich hell, nur mein Freund, Hr. Dr. Simmler, fand hie und da das gewöhnlich gebrochene Bild etwas schwächer. Es zeigt dieß, daß die Empfindlichkeit unseres Auges in der unmittelbaren Beurtheilung der Gleichheit zweier Lichtintensitäten im Allgemeinen doch nicht so groß ist, als man gewöhnlich annimmt.

Ueber die Bedeutung dieser Constanten C muß uns nun die in der Einleitung erwähnte Theorie von Neumann Aufschluß geben können. Ich werde hier kurz diejenigen Hauptresultate dieser Theorie, welche ich auf unsern speciellen Fall werde anzuwenden haben, mittheilen.

Wenn aus einem unkrystallinischen Medium ein in irgend einem Azimuth zur Einfallsebene vollständig polarisirter Lichtstrahl auf ein optisch einaxiges krystallinisches Medium einfällt und S die Componente der Amplitude desselben nach der Einfallsebene, P diejenige senkrecht zur Einfallsebene darstellt, so sind die Componenten der reflectirten Amplitude nach der Einfallsebene und senkrecht dazu: R_1 und R_2 , sowie die Amplituden D_1 und D_2 des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahls leicht aus folgenden vier Gleichungen abzuleiten:

$$P + R_1 = D_1 \sin \alpha_1 + D_2 \sin \alpha_2,$$

$$(S + R_1) \cos \varphi = D_1 \cos \varphi \cos \alpha_1 + D_2 \cos \varphi \cos \alpha_2,$$

$$(S - R_1) \sin \varphi = D_1 \sin \varphi \cos \alpha_1 + D_2 \sin \varphi \cos \alpha_2,$$

$$(P - R_1) \sin \varphi \cos \varphi = D_1 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha_1 + D_2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha_2 \left[1 + \frac{\cos n_2 (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2)}{\sin n_2 \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1} \right], \quad (1)$$

wo:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\sin \nu \sin \beta}{\sin n_1}, \quad \cos \alpha_1 = - \frac{\cos \nu \sin \varphi_1 - \sin \nu \cos \varphi_1 \cos \beta}{\sin n_1},$$

$$\cos n_1 = \cos \nu \cos \varphi_1 + \sin \nu \sin \varphi_1 \cos \beta,$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\sin \nu \sin \beta}{\sin n_2}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{\cos \nu \sin \varphi_2 - \sin \nu \cos \varphi_2 \cos \beta}{\sin n_2}.$$

$$\cos n_2 = \cos \nu \cos \varphi_2 + \sin \nu \sin \varphi_2 \cos \beta,$$

ferner: φ_1 und φ_2 die Winkel der einfallenden, der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Wellenebene mit der Gränzebene beider Medien, ν den Winkel des Einfallslotes mit der optischen Axe des krystallinischen Mediums, β den Winkel des Hauptschnitts mit der Einfallsebene, endlich n_1 und n_2 die Winkel der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Wellennormale mit der optischen Axe und α_1 und α_2 die Winkel der Polarisations Ebenen des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahls mit der Einfallsebene darstellen.

— 57 *

- 1) Die Verschiedenheit einiger Zeichen in diesen Formeln gegenüber denen im Neumann'schen Original erklärt sich durch eine etwas abweichende Annahme über die positive Bewegungsrichtung in den einzelnen Wellenebenen, die ich getroffen habe.

Aus diesen Gleichungen folgt nun z. B.:

$$D_+ = \frac{2 \sin q \cos q \sin n_e [P \sin(q + q_e) \sin v \sin \beta - SK]}{\sin(q + q_e) [\sin^2 v \sin^2 \beta \sin(q + q_e) \cos(q - q_e) + (\cos v \sin q_e - \sin v \cos q_e \cos \beta) K]},$$

$$D_- = \frac{2 \sin q \cos q \sin n_e \sin(q + q_e) [P(\cos v \sin q_e - \sin v \cos q_e \cos \beta) + S \cos(q - q_e) \sin v \sin \beta]}{\sin(q + q_e) [\sin^2 v \sin^2 \beta \sin(q + q_e) \cos(q - q_e) + (\cos v \sin q_e - \sin v \cos q_e \cos \beta) K]},$$

$$\text{wo: } K = \cos v (\sin q \cos q \sin q_e + \cos q_e \sin^2 q_e) - \sin v \cos \beta (\cos q_e \sin q \cos q + \sin q_e \cos^2 q_e).$$

Will man aus den Amplituden die Intensitäten kennen lernen, so ist dabei zu beachten, daß man innerhalb ein und desselben Mediums die Intensitäten zweier Strahlen sich wie die Quadrate ihrer Amplituden verhalten, in verschiedenen Medien aber diesen Quadraten noch gewisse Factoren beizufügen sind, die das Verhältniß der in beiden Medien von den betreffenden Strahlen in Bewegung gesetzten Massen bezeichnen. So ist z. B. für das einfallende, das gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochene Licht dieses Verhältniß gegeben durch:

$$\sin q \cos q : \sin q_e \cos q_e : \sin q_e \cos q_e \left[1 + \frac{\sin \alpha_e \cos n_e (\sin^2 q_e - \sin^2 q_e)}{\sin n_e \sin q_e \cos q_e} \right].$$

Die Richtigkeit dieser Gesetze ist, wie in der Einleitung näher angegeben wurde, durch Beobachtungen von Neumann und A. Seebeck in einer Reihe von Specialfällen am Kalkspath bis auf ungefähr 1000 der Intensität des einfallenden Lichts bestätigt worden.

Der Austritt des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahls aus dem Krystall wird durch folgende Ausdrücke bestimmt. Für den auf die Austrittsfläche einfallenden Strahl mit der Amplitude D_+ findet man die Amplituden R_+ und R_- des gewöhnlich und ungewöhnlich reflectirten Strahls und die Componenten S_+ und P_+ nach der Einfallsebene und senkrecht dazu von der Amplitude des ausgetretenen Strahls aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P_1 &= D_1 \sin \gamma_1 + R_{12} \sin \delta_{12} + R_{13} \sin \delta_{13}, \\
S_1 \cos \psi'_1 &= D_1 \cos \psi_1 \cos \gamma_1 + R_{12} \cos r_{12} \cos \delta_{12} + R_{13} \cos r_{13} \cos \delta_{13}, \\
S_1 \sin \psi'_1 &= D_1 \sin \psi_1 \cos \gamma_1 - R_{12} \sin r_{12} \cos \delta_{12} - R_{13} \sin r_{13} \cos \delta_{13}, \\
P_1 \sin \psi'_1 \cos \psi'_1 &= D_1 \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sin \gamma_1 - R_{12} \sin r_{12} \cos r_{12} \sin \delta_{12} - \\
&\quad - R_{13} [\sin r_{13} \cos r_{13} \sin \delta_{13} - \cotang N_{12} (\sin^2 r_{12} - \sin^2 r_{13})],
\end{aligned}$$

wo:

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \nu_1 \sin \beta_{12}}{\sin n_{12}}, \quad \cos \gamma_1 = - \frac{\cos \nu_1 \sin \psi_1 - \sin \nu_1 \cos \psi_1 \cos \beta_{12}}{\sin n_{12}},$$

$$\cos n_{12} = \cos \nu_1 \cos \psi_1 + \sin \nu_1 \sin \psi_1 \cos \beta_{12},$$

$$\sin \delta_{12} = \frac{\sin \nu_1 \sin \beta_{12}}{\sin N_{12}}, \quad \cos \delta_{12} = \frac{\cos \nu_1 \sin r_{12} + \sin \nu_1 \cos r_{12} \cos \beta_{12}}{\sin N_{12}},$$

$$\cos N_{12} = \cos \nu_1 \cos r_{12} - \sin \nu_1 \sin r_{12} \cos \beta_{12},$$

$$\cos \delta_{13} = \frac{\sin \nu_1 \sin \beta_{13}}{\sin N_{13}}, \quad \sin \delta_{13} = - \frac{\cos \nu_1 \sin r_{13} + \sin \nu_1 \cos r_{13} \cos \beta_{12}}{\sin N_{13}},$$

$$\cos N_{13} = \cos \nu_1 \cos r_{13} - \sin \nu_1 \sin r_{13} \cos \beta_{12},$$

ferner: ψ_1, ψ'_1, r_{12} und r_{13} die Winkel der einfallenden, gebrochenen und der beiden reflectirten Wellenebenen mit der brechenden Ebene, γ_1 den Winkel der Polarisationsenebene des einfallenden Strahls D_1 , δ_{12} und δ_{13} diejenigen der Polarisationsenebenen der beiden reflectirten Strahlen mit der Einfallsebene darstellen und endlich ν_1, β_{12} und n_{12} entsprechende Bedeutung wie oben haben, während N_{12} und N_{13} die Winkel der gewöhnlich und ungewöhnlich reflectirten Wellennormalen mit der optischen Axe bezeichnen.

Für den Austritt des ungewöhnlich gebrochenen Strahls mit der Amplitude D , gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 P &= D, \sin \gamma + R_{\infty} \sin \delta_{\infty} + R_{\infty} \sin \delta_{\infty}, \\
 S, \cos \psi' &= D, \cos \psi, \cos \gamma + R_{\infty} \cos r_{\infty} \cos \delta_{\infty} + R_{\infty} \cos r_{\infty} \cos \delta_{\infty}, \\
 S, \sin \psi' &= D, \sin \psi, \cos \gamma - R_{\infty} \sin r_{\infty} \cos \delta_{\infty} - R_{\infty} \sin r_{\infty} \cos \delta_{\infty}, \\
 P, \sin \psi', \cos \psi' &= D, [\sin \psi, \cos \psi, \sin \gamma + \cotang n_{\infty} (\sin^2 r_{\infty} - \sin^2 \psi)] - R_{\infty} \sin r_{\infty} \cos r_{\infty} \sin \delta_{\infty} - \\
 &\quad - R_{\infty} [\sin r_{\infty} \cos r_{\infty} \sin \delta_{\infty} + \cotang N_{\infty} (\sin^2 r_{\infty} - \sin^2 r_{\infty})],
 \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
 \cos \gamma &= \frac{\sin r_{\infty} \sin \beta_{\infty}}{\sin n_{\infty}}, \quad \sin \gamma = \frac{\cos r_{\infty} \sin \psi_{\infty} - \sin r_{\infty} \cos \psi_{\infty} \cos \beta_{\infty}}{\sin n_{\infty}}, \\
 \cos n_{\infty} &= \cos r_{\infty} \cos \psi_{\infty} + \sin r_{\infty} \sin \psi_{\infty} \cos \beta_{\infty}, \\
 \sin \delta_{\infty} &= \frac{\sin r_{\infty} \sin \beta_{\infty}}{\sin N_{\infty}}, \quad \cos \delta_{\infty} = \frac{\cos r_{\infty} \sin r_{\infty} + \sin r_{\infty} \cos r_{\infty} \cos \beta_{\infty}}{\sin N_{\infty}}, \\
 \cos N_{\infty} &= \cos r_{\infty} \cos r_{\infty} - \sin r_{\infty} \sin r_{\infty} \cos \beta_{\infty}, \\
 \cos \delta_{\infty} &= \frac{\sin r_{\infty} \sin \beta_{\infty}}{\sin N_{\infty}}, \quad \sin \delta_{\infty} = - \frac{\cos r_{\infty} \sin r_{\infty} + \sin r_{\infty} \cos r_{\infty} \cos \beta_{\infty}}{\sin N_{\infty}}, \\
 \cos N_{\infty} &= \cos r_{\infty} \cos r_{\infty} - \sin r_{\infty} \sin r_{\infty} \cos \beta_{\infty},
 \end{aligned}$$

und die Bedeutung der einzelnen Buchstaben nach Vergleich mit dem Vorigen aus den betreffenden Indices ohne Weiteres erhellt.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man berücksichtigt, daß $r_{\infty} = \psi$, ist:

$$R_{\alpha\alpha} = -D_{\alpha} \frac{\sin(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha})}{\sin(\psi'_{\alpha} + \psi_{\alpha})} L \left\{ [\sin \gamma_{\alpha} \cos \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} + \psi_{\alpha}) - \cos \gamma_{\alpha} \sin \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - r_{\alpha\alpha})] \sin(\psi'_{\alpha} + r_{\alpha\alpha}) - \right. \\ \left. - \cos \gamma_{\alpha} \cotang N_{\alpha\alpha} (\sin^2 r_{\alpha\alpha} - \sin^2 r_{\alpha\alpha}') \right\},$$

$$R_{\alpha\alpha} = -D_{\alpha} \frac{\sin(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha})}{L} [\sin \gamma_{\alpha} \cos \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} + \psi_{\alpha}) - \cos \gamma_{\alpha} \sin \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha})],$$

wo:

$$L = \sin(\psi'_{\alpha} + r_{\alpha\alpha}) [\sin \delta_{\alpha\alpha} \cos \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha}) - \sin \delta_{\alpha\alpha} \cos \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - r_{\alpha\alpha})] + \cos \delta_{\alpha\alpha} \cotg N_{\alpha\alpha} (\sin^2 r_{\alpha\alpha} - \sin^2 r_{\alpha\alpha}');$$

ferner:

$$R_{\alpha\alpha} = -\frac{D_{\alpha}}{\sin(\psi'_{\alpha} + r_{\alpha\alpha})} L \left\{ \sin(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha}) \sin(\psi'_{\alpha} + r_{\alpha\alpha}) [\cos \delta_{\alpha\alpha} \sin \gamma_{\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} + \psi_{\alpha}) - \sin \delta_{\alpha\alpha} \cos \gamma_{\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - r_{\alpha\alpha})] - \right. \\ \left. - \cos \delta_{\alpha\alpha} \sin(\psi'_{\alpha} + r_{\alpha\alpha}) \cotg n_{\alpha} (\sin^2 r_{\alpha\alpha} - \sin^2 \psi_{\alpha}) + \cos \gamma_{\alpha} \sin(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha}) \cotg N_{\alpha\alpha} (\sin^2 r_{\alpha\alpha} - \sin^2 r_{\alpha\alpha}') \right\},$$

$$R_{\alpha\alpha} = -\frac{D_{\alpha}}{L} \left\{ \sin(\psi'_{\alpha} - \psi_{\alpha}) [\cos \gamma_{\alpha} \sin \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - r_{\alpha\alpha}) - \sin \gamma_{\alpha} \cos \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} + \psi_{\alpha})] \right. \\ \left. + \cos \delta_{\alpha\alpha} \cotg n_{\alpha} (\sin^2 \psi_{\alpha} - \sin^2 r_{\alpha\alpha}') \right\},$$

wo:

$$L' = \sin(\psi'_{\alpha} + r_{\alpha\alpha}) [\sin \delta_{\alpha\alpha} \cos \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - r_{\alpha\alpha}) - \cos \delta_{\alpha\alpha} \sin \delta_{\alpha\alpha} \cos(\psi'_{\alpha} - r_{\alpha\alpha})] \\ + \cos \delta_{\alpha\alpha} \cotg N_{\alpha\alpha} (\sin^2 r_{\alpha\alpha} - \sin^2 r_{\alpha\alpha}');$$

endlich:

$$S_{\alpha} = D_{\alpha} \frac{\sin 2 \psi_{\alpha} \cos \gamma_{\alpha}}{\sin(\psi_{\alpha} + \psi'_{\alpha})} + R_{\alpha\alpha} \frac{\sin \gamma_{\alpha} \sin n_{\alpha} \sin(r_{\alpha\alpha} - r_{\alpha\alpha}')}{\sin N_{\alpha\alpha} \sin(\psi_{\alpha} + \psi'_{\alpha})}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= D_1 \frac{\sin 2\psi_e \sin \gamma_e}{\sin(\psi_e + \psi'_e) \cos(\psi_e - \psi'_e)} - R_{ee} \frac{\cos \gamma_e \sin n_e \sin(r_{ee} - r_{ee})}{\sin N_{ee} \sin(\psi_e + \psi'_e) \cos(\psi_e - \psi'_e)} \\
S_1 &= D_1 \cos \gamma_e \frac{\sin(\psi_e + r_{ee})}{\sin(\psi'_e + r_{ee})} + R_{ee} \cos \delta_{ee} \frac{\sin(r_{ee} - r_{ee})}{\sin(\psi'_e - r_{ee})} \\
P_2 &= D_2 \frac{\sin \delta_{ee} \sin(\psi_e + r_{ee}) \cos(\psi_e - r_{ee}) + \cos N_{ee} (\sin^2 r_{ee} - \sin^2 r_{ee})}{\sin \delta_{ee} \sin(\psi'_e + r_{ee}) \cos(\psi'_e - r_{ee}) + \cos N_{ee} (\sin^2 r_{ee} - \sin^2 r_{ee})} \\
&\quad + R_{ee} \sin \delta_{ee} \frac{\sin \delta_{ee} \sin(r_{ee} - r_{ee}) \cos(r_{ee} + r_{ee}) + \cos N_{ee} (\sin^2 r_{ee} - \sin^2 r_{ee})}{\sin \delta_{ee} \sin(\psi'_e + r_{ee}) \cos(\psi'_e - r_{ee}) + \cos N_{ee} (\sin^2 r_{ee} - \sin^2 r_{ee})}.
\end{aligned}$$

Diese Formeln sind bis jetzt noch nicht experimentell geprüft worden.

Nehmen wir jetzt zunächst, um sie auf unseren speciellen Fall anzuwenden, an, es falle die Einfallsebene mit dem Hauptschnitt zusammen und es sey die Austrittsfläche parallel der Eintrittsfläche, so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned}
\psi_e &= \varphi_e, \quad \psi_e = \psi'_e, \quad r_{ee} = r_{ee}, \quad r_{ee} = r_{ee}, \quad r_e = r_e, \quad v_e = v_e, \quad \beta_e = \beta_e, \quad \beta = 0, \\
\sin \alpha_e &= \cos \alpha_e, \quad \sin \gamma_e = \sin \delta_{ee}, \quad \cos \delta_{ee} = \cos \gamma_e, \quad \sin \delta_{ee} = \sin \delta_{ee}, \quad \cos \delta_{ee} = 0,
\end{aligned}$$

$$\cos \alpha_e = \cos \gamma_e = \cos \delta_{ee} = \cos \delta_{ee} = +1,$$

$$\sin \alpha_e = \sin \delta_{ee} = \sin \gamma_e = \sin \delta_{ee} = -1,$$

$$n_e = v - \varphi_e, \quad n_e = v - \varphi_e, \quad N_{ee} = N_{ee} = v + \varphi_e, \quad N_{ee} = N_{ee} = v + \varphi_e,$$

und man findet dann:

$$D_1 = S \frac{2 \sin \varphi_e \cos \varphi_e}{\sin(\varphi_e + \varphi_e)},$$

$$D_s = P \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi \sin (\nu - \varphi_s)}{\cos \nu (\sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi_s + \cos \varphi_s \sin^2 \varphi_s) - \sin \nu (\sin \varphi \cos \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \cos^2 \varphi_s)},$$

$$R_{ss} = -D_s \frac{\sin(\varphi - \varphi_s)}{\sin(\varphi + \varphi_s)}, \quad R_{ss} = 0, \quad R_{ss} = 0,$$

$$R_{ss} = -D_s \frac{\sin(\varphi - \varphi_s) \cos(\varphi + \varphi_s) + \cot \varphi (\nu - \varphi_s) (\sin^2 \varphi_s - \sin^2 \varphi_s)}{\sin(\varphi_s + \varphi_s) \cos(\varphi_s - \varphi_s) + \cot \varphi (\nu + \varphi_s) (\sin^2 \varphi_s - \sin^2 \varphi_s)},$$

$$S_o = D_o \frac{2 \sin \varphi_s \cos \varphi_s}{\sin(\varphi + \varphi_s)}, \quad P_o = 0,$$

$$S_s = 0, \quad P_s = D_s \frac{\sin(\varphi_s + \varphi_s) \cos(\varphi_s - \varphi_s) + \cot \varphi (\nu + \varphi_s) (\sin^2 \varphi_s - \sin^2 \varphi_s) + \cot \varphi (\nu - \varphi_s) (\sin^2 \varphi_s - \sin^2 \varphi_s)}{\sin(\varphi + \varphi_s) \cos(\varphi - \varphi_s) + \cot \varphi (\nu + \varphi_s) (\sin^2 \varphi_s - \sin^2 \varphi_s)}.$$

Nun ist aber:

$$\sin \varphi_s = a \sin \varphi,$$

$$\sin \varphi_s = \sqrt{c^2 - a^2} \cos^2 (\nu - \varphi_s) \sin \varphi, \quad \sin \varphi_s = \sqrt{c^2 - a^2} \cos^2 (\nu + \varphi_s) \sin \varphi$$

und folglich:

$$\tan \varphi_s = -A + B, \quad \tan \varphi_s = A + B^1),$$

wo:

$$A = \frac{\sin \nu \cos \nu \sin^2 \varphi (c^2 - a^2)}{1 - \sin^2 \varphi (c^2 \cos^2 \nu + a^2 \sin^2 \nu)}, \quad B = \frac{\sin \varphi \sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu - c^2 a^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \sin^2 \varphi (c^2 \cos^2 \nu + a^2 \sin^2 \nu)},$$

1) Da $\tan \varphi_s$ und $\tan \varphi_s$ je Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, so würden wir eigentlich für beide Winkel je zwei Werthe erhalten. Wir haben indessen hier nur die eine Wurzel zu berücksichtigen, da die andere sich auf den Winkel der je auf der anderen Seite der Gränzfläche an die Wellenoberfläche gelegten Tangentialebene mit der bestehenden Ebene bezieht.

und wo a das reciproke Brechungsverhältniß des gewöhnlich gebrochenen, c dasjenige des ungewöhnlich gebrochenen Strahles darstellt.

Setzen wir diese Werthe in obige Gleichungen ein und nehmen endlich $\varphi = 0$ an, so erhalten wir schliesslich:

$$\begin{aligned} D_o &= \frac{2}{1+a} S, & D_e &= \frac{-2}{1+\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}} P, \\ R_{oo}' &= -\frac{1-a}{1+a} D_o, & R_{ee} &= -\frac{1-\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{1+\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}} D_e, \\ S_e &= \frac{2a}{1+a} D_o, & P_e &= \frac{2\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{1+\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}} D_e, \\ R_{oe} &= R_{eo} = P_o = S_e = 0. \end{aligned}$$

Innerhalb ein und desselben Mediums verhalten sich nun die Intensitäten wie die Quadrate der Amplituden; bezeichnen wir daher die Intensität des gewöhnlich gebrochenen austretenden Strahls mit O^2 , die des ungewöhnlich gebrochenen mit E^2 , so kommt:

$$\begin{aligned} O^2 &= S_o^2 + P_o^2 = \frac{16a^2}{(1+a)^4} S^2, \\ E^2 &= S_e^2 + P_e^2 = \frac{16(c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}{(1+\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu})^4} P^2. \end{aligned}$$

Wir sehen hieraus, dafs der austretende gewöhnlich gebrochene Strahl allerdings vollständig nach dem Hauptschnitt und der ungewöhnlich gebrochene senkrecht dazu polarisirt ist, dagegen das Malus'sche Gesetz nicht allgemein richtig ist. Nehmen wir nämlich an, es sey der einfallende Strahl von der Intensität Q^2 natürliches Licht, so hat man:

$$P^2 = \frac{Q^2}{2}, \quad S^2 = \frac{Q^2}{2};$$

also

$$(6) \quad O^2 = \frac{8a^2}{(1+a)^4} Q^2, \quad E^2 = \frac{8(c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}{(1+\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu})^4} Q^2$$

Wäre dagegen derselbe nach einem Azimuth i vollständig polarisirt, so hätte man:

$$P^2 = Q^2 \sin^2 i, \quad S^2 = Q^2 \cos^2 i;$$

und somit:

$$(7) \quad \begin{cases} O^2 = \frac{16a^2}{(1+a)^4} Q^2 \cos^2 i, \\ E^2 = \frac{16[a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \nu]}{[1 + \sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \nu}]^4} Q^2 \sin^2 i. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun eben, daß das Malus'sche Gesetz bloß als eine Annäherung zu betrachten ist. Denn nur wenn man $a^2 - c^2 = 0$ setzen kann, d. h. die Doppelbrechung sehr gering ist, werden die Factoren von P^2 und S^2 gleich, so daß man im ersteren Fall beim Einfall von *natürlichem* Lichte hat:

$$O^2 = E^2;$$

und für *polarisirtes* Licht im letzteren Falle:

$$\frac{O^2}{E^2} = \frac{\cos^2 i}{\sin^2 i}.$$

In Wirklichkeit repräsentirt aber O^2 nicht die volle Intensität des nach dem Hauptschnitt polarisirten austretenden Lichts und ebenso nicht E^2 die ganze Intensität des senkrecht dazu polarisirten Lichts. Man erkennt nämlich leicht, daß sich dem direct durchgegangenen Strahl von der Intensität O^2 noch solche beigesellen, welche nach einer 2 resp. 4, 6, 8 etc. maligen gewöhnlichen inneren Reflexion ebenfalls auf dieselbe Seite austreten und auch nach dem Hauptschnitt polarisirt sind; und daß entsprechend mit dem ungewöhnlich gebrochenen Strahl E^2 solche zusammenfallen, welche eine 2 resp. 4, 6 etc. malige ungewöhnliche innere Reflexion erlitten haben und senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt sind. Die Summe der Intensitäten aller dieser nach dem Hauptschnitt polarisirten austretenden Strahlen ist gegeben durch:

$$\Sigma O^2 = S^2 \frac{16a^2}{(1+a)^4} \left[1 + \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^4 + \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^8 + \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{12} + \dots \right],$$

und entsprechend die Summe der senkrecht zum Hauptschnitt polarisirten Strahlen durch:

$$\Sigma E^2 = P^2 \frac{16 (c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}{(1 + \sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu})^4} \left[1 + \left(\frac{1 - \sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{1 + \sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}} \right)^4 + \dots \right].$$

Nehmen wir wieder an, das einfallende Licht besitze die Intensität Q^2 und sey im Azimuth i zum Hauptschnitt polarisirt, so erhalten wir nach Summation der geometrischen Reihen:

$$(8) \quad \begin{cases} \Sigma O^2 = \frac{16a^2}{(1+a)^4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^4} Q^2 \cos^2 i = \frac{2a}{1+a} Q^2 \cos^2 i \\ \Sigma E^2 = \frac{2\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{1 + c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu} Q^2 \sin^2 i. \end{cases}$$

Auch hieraus folgt wieder, dafs nur für $a^2 - c^2 = 0$ in den beiden Ausdrücken die Factoren von $Q^2 \cos^2 i$ und $Q^2 \sin^2 i$ gleich werden resp. also für $i = 45^\circ$: $\Sigma O^2 = \Sigma E^2$ werde. Im Allgemeinen ist dagegen das Intensitätsverhältnifs des nach dem Hauptschnitt und senkrecht dazu polarisirten Lichts:

$$\frac{\Sigma E^2}{\Sigma O^2} = \frac{(1+a^2) \sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{a(1+c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)} \tan^2 i.$$

Die Bedeutung der Constanten C in der Photometerformel (3) ist also:

$$C = \frac{(1+a^2) \sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{a(1+c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}.$$

Glücklicherweise besitzen wir sehr genaue Bestimmungen der Brechungsverhältnisse des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahls bei *Bergkrystall* und *Kalkspath* von Rudberg ¹⁾. Für Strahlen von der Brechbarkeit der Fraunhofer'schen Linie D ergibt sich daraus bei:

	Bergkrystall	Kalkspath
$a =$	0,647593	0,602955
$c =$	0,643799	0,672789

1) Diese Ann. Bd. 14 S. 45

Diese Zahlen können dazu dienen, für zwei Specialfälle, welche gewöhnlich zur Anwendung kommen, nämlich für Platten, welche parallel zur optischen Axe und unter 45° dazu geschnitten sind, die Constante C gemäß Formel (9) zu berechnen. Man findet für:

	$\nu = 90^\circ$	$\nu = 45^\circ$
Bergkrystall	$C = 0,99759$	$0,99880$
Kalkspath	$C = 1,04739$	$1,02598$

Hienach kann also in der That bei *Bergkrystall* für photometrische Messungen, welche keine gröfsere Genauigkeit als $\frac{2}{1000} - \frac{3}{1000}$ beanspruchen, das Malus'sche Gesetz als gültig betrachtet, oder mit anderen Worten die Constante C gleich 1 gesetzt werden. Beim *Kalkspath* dagegen würde man einen Fehler bis zu $\frac{1}{100}$ des Verhältnisses der Lichtintensitäten begehen, wenn man sich an das Malus'sche Gesetz halten wollte. Man muß also jedenfalls bei stark doppelbrechenden Medien an der Stelle des Malus'schen das in den Gleichungen (6) bis (8) enthaltene *Neumann'sche Gesetz* gebrauchen.

Zur Verification dieses letzteren Gesetzes kann vor der Hand unsere auf S. 225 mitgetheilte experimentelle Bestimmung der Constanten C dienen. Diese Beobachtungen beziehen sich auf ein Kalkspathrhomboëder, dessen Seiten den natürlichen Bruchflächen parallel seyn sollen, und auf weifses Licht. Wir haben also zunächst in der Gleichung (9) für ν den Werth zu setzen, der der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths entspricht. Nach Naumann ¹⁾ ist bei der gewöhnlichen Varietät des Kalkspaths der Neigungswinkel der Rhomboëderflächen in den Endkanten: $105^\circ 8'$. Hieraus berechnet sich für den Neigungswinkel der Rhomboëderflächen gegen die Hauptaxe der Werth: $45^\circ 25' 22''$; es wird daher:

$$\nu = 44^\circ 34' 38''.$$

Führen wir diesen Werth von ν in Gleichung (9) ein und setzen für a und c die zufolge der Rudberg'schen

1) Elemente der Mineralogie von Naumann S. 233.

Bestimmungen den einzelnen Fraunhofer'schen Linien entsprechenden Werthe, so erhalten wir folgende Resultate für die Constante C und den derselben entsprechenden Neutralisationswinkel v bei gleichen einfallenden Lichtintensitäten:

Linie	a	c	C	v
<i>B</i>	0,604931	0,673895	1,02509	44° 38' 42"
<i>D</i>	0,602955	0,672789	1,02563	44 38 15
<i>E</i>	0,601106	0,671736	1,02613	44 37 50
<i>G</i>	0,596598	0,669107	1,02736	44 36 48

Es ist somit auch bei gleichbleibendem Intensitätsverhältniß für verschiedene Farben die Constante C und damit auch der Neutralisationswinkel verschieden. Für blaues und rothes Licht beträgt der Unterschied des letzteren bereits 2', so daß er mit unserem Instrumente sollte nachgewiesen werden können. Die Benutzung des Sonnenspectrums zu dieser Untersuchung ist indessen nicht so einfach, wie es auf den ersten Anblick erscheint; meine ersten Versuche in dieser Hinsicht scheiterten namentlich daran, daß es unmöglich war, dem Spectrum auf seiner ganzen Breite oder auch nur einem Bruchtheil derselben während der zum Versuche nothwendigen Zeit eine gleichförmige Intensität zu erhalten. Einen vervollkommenen Apparat für diese Untersuchung habe ich wegen der inzwischen eingetretenen ungünstigen Jahreszeit noch nicht gebrauchen können.

Streng genommen wäre also eine vollkommene Neutralisation nur für homogenes Licht denkbar, sie ist indessen für das Auge auch bei weißem Lichte ganz vollständig. Es erklärt sich dies dadurch, daß eben die Strahlen in der Mitte des Sonnenspectrums eine sehr viel größere Intensität besitzen, als diejenigen gegen die beiden Enden zu. Wenn daher für diese Farben Neutralisation erfolgt ist, so sind dann die noch übrig bleibenden Interferenzfransen, herrührend von den anderen Farben, so schwach, daß das Auge sie nicht mehr wahrnimmt. Zuzufolge den Beobachtun-

gen von Fraunhofer ¹⁾ sind die hellsten Strahlen im Sonnenspectrum diejenigen zwischen den Linien *D* und *E*. Wenn also für weisses Licht Neutralisation eintritt, so wird der Winkel v derselben dem Mittel aus den oben für die Linien *D* und *E* berechneten entsprechen müssen. Es sollen demnach für gleich intensive weisse Lichtquellen der Neutralisationswinkel v und entsprechend die Constante *C* die Werthe:

$$v = 44^{\circ} 38' 2'' \quad C = 1,02588$$

annehmen. Diese aus der Theorie gefolgerten Gröfsen weichen von den S. 225 mitgetheilten, aus der Beobachtung sich ergebenden, blofs um 2' resp. 0,0024 ab und können daher, meines Erachtens, vor der Hand *als Bestätigung des Neumann'schen Gesetzes* betrachtet werden. Allerdings ist die Abweichung von 2' gröfser als der wahrscheinliche Fehler meiner Beobachtung; allein wir haben bei der Anwendung der Theorie auf den unserer Beobachtung entsprechenden Specialfall einige Voraussetzungen gemacht, die möglicherweise nicht genau erfüllt sind und so vorstehende Abweichung erklären könnten. Zunächst wäre es möglich, dafs der Winkel der Rhomboëderflächen in den Endkanten bei dem zu unseren Rhomboëdern verwendeten Kalkspath verschieden von $105^{\circ} 8'$ wäre, und sodann konnte ich mich auch nicht davon überzeugen, ob die polirten Endflächen der Rhomboëder wirklich den natürlichen Bruchflächen parallel seyen; die über den Gyps allerdings etwas vorstehenden Seitenflächen der Rhomboëder sind nämlich mattgeschliffen und geschwärzt, so dafs eine Winkelmessung nicht mehr auszuführen war. Endlich könnten auch die von Rudberg bestimmten Brechungsverhältnisse nicht genau für unsere Kalkspathsorte passen. Ehe ich daher im Stande seyn werde, bei weiteren Untersuchungen auch noch diesen Umständen Rechnung zu tragen, möchte ich es nicht wagen, auf Grund der obigen Abweichung der Theorie von der Erfahrung eine verschiedene Absorption des gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahls im Kalkspath anzu-

1) Gilbert's Annalen Bd. 56 S. 297.

nehmen. Durch das Savart'sche Polariskop in der Modification, wie ich es oben beschrieben habe, ist uns aber ein Mittel gegeben, diese und analoge Fragen mit großer Genauigkeit zu beantworten.

Bern, im December 1862.

II. Ueber Anwendung der Quenstedt'schen Krystall-Projection; von Websky, Oberberggrath in Breslau.

Die von Quenstedt angegebene Projections-Weise der Krystalle ¹⁾ beruht darauf, daß man die Flächen eines Krystalls durch den Endpunkt einer $= 1$ gesetzten Axe legt und die Sectionslinien derselben auf einer — in der Regel durch die anderen Axen gehenden Ebene verzeichnet; jeder Schnittpunkt zweier Sectionslinien bildet einen Zonenpunkt und repräsentirt eine Zonenaxe, deren Lage zu den Hauptaxen bestimmt wird durch den Zonenpunkt einerseits und andererseits durch den über der Projections-ebene gedachten Endpunkt der $= 1$ gesetzten Axe.

In Nachstehendem wird die Aufgabe behandelt: zu einem solchen Projectionsbilde eines Krystalls die Sectionslinien eines zweiten, mit dem ersteren nach einem bekannten Zwillingsgesetz verbundenen Krystalls, bezogen auf die Axen des ersteren, hinzuzufügen, so daß man beide Krystalle in ihrer Verbindung zeichnen und berechnen kann, gerade so, als wenn sie ein einziges Individuum wären.

1) Methode der Krystallographie von Quenstedt, 1840. — Beiträge zur rechnenden Krystallographie von Quenstedt, 1848. — Handbuch der Mineralogie von Quenstedt, 1855. — Elemente der rechnenden Krystallographie von Schröder, 1852. — Lehrbuch der Krystallochemie von Rammelsberg, 1852.