Notiz über das Gleichgewicht eines schweren Drahtes, dessen Axe eine Schraubenlinie bildet.

Von

MICHAIL OKATOW in ST. PETERSBURG.

Es sei ein Draht gegeben von kreisförmigem Querschnitt und nach allen Richtungen gleicher Elasticität, dessen Axe im natürlichen Zustande eine Schraubenlinie bildet; die Axe des fingirten Cylinders Z , auf dessen Mantelfläche die Schraubenlinie liegt, sei vertical, und die beiden Grundkreise des Cylinders, welche die beiden Endpunkte der Schraubenlinie enthalten, sollen mit diesen Endgn so verbunden sein, dass der Draht die Wirkung der beiden Kräftepaare auf sich nehmen kann, die in jenen Kreisen liegen und mit zwei gleichen, aber entgegengesetzten Drehmomenten M auf den Draht wirken sollen; der Mittelpunkt des unteren und der des oberen Grundkreises dienen ausserdem als Angriffspunkte für zwei entgegengesetzte verticale Kräfte A , resp. $(A + pl)$: dabei bezeichnet l die ganze Länge der Schraubenlinie und p das Gewicht der Längeneinheit des Drahtes, mithin das Product pl das Gewicht des ganzen Drahtes.

Die Schraubenlinie erfährt beim Uebergange aus dem Zustande des natürlichen Gleichgewichts in den des elastischen dreierlei Aenderungen: 1^{tens} der Durchmesser des fingirten Cylinders, auf dem die Schraubenlinie lag, ändert sich um eine Grösse C ; 2^{tens} jeder Punkt der Schraubenlinie verschiebt sich parallel der Axe des Cylinders um eine Grösse Y und dabei 3^{tens} dreht er sich um diese Axe um einen Kreisbogen B ; die Grössen C , Y und B sind nicht constant, sondern für verschiedene Punkte der Schraubenlinie verschieden.

Beim natürlichen Zustande des Drahtes bezeichnen wir:

durch s — den längs der Schraubenlinie gemessenen Abstand eines Punktes s derselben von ihrem oberen Ende;

durch Θ' — den constanten Winkel, den jede Tangente der Schraubenlinie mit der Axe des Cylinders bildet, und

durch n' — den constanten Kreisbogen vom Radius 1, welcher als Maass des körperlichen Winkels zwischen zwei Ebenen dient, die

durch die Axe des Cylinders Z und durch irgend zwei längs der Schraubenlinie um die Längeneinheit von einander entfernte Punkte s und $s + 1$ derselben gelegt worden sind; $\frac{2 \sin \Theta'}{n'}$ stellt somit den Durchmesser des Cylinders Z dar.

Es seien ferner:

E — der Elasticitätsmodul und

α — das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation des Stoffes des Drahtes, im gewöhnlichen Sinne dieser Worte;

m — die Dicke des Drahtes und

$J = \frac{\pi m^4}{64}$ — das Trägheitsmoment seines kreisförmigen Querschnittes.

Die gesuchten Grössen C , Y und B lassen sich für einen laufenden Punkt s der Axe des Drahtes durch die folgenden Formeln darstellen:

1) Die Zusammenziehung des fingirten Cylinders Z auf dem Niveau des Punktes s :

$$(1) \quad C = 2 \left(\frac{\sin \Theta'}{n'} - \frac{\sin \Theta}{n} \right);$$

2) Die Senkung des Punktes s :

$$(2) \quad Y = (\cos \Theta - \cos \Theta') \cdot s - \int_0^s s \cdot d(\cos \Theta);$$

3) Die die Anzahl der Windungen der Schraubenlinie vergrössernde Drehung des Punktes s um die Axe des Cylinders Z :

$$(3) \quad B = (n - n') \cdot s - \int_0^s s \, dn.$$

Die Gleichungen:

$$(4) \quad n(n \cos \Theta - n' \cos \Theta') \sin \Theta - (1 + \alpha) n(n \sin \Theta - n' \sin \Theta') \cos \Theta \\ = \frac{(1 + \alpha)(A + pl - ps)}{EJ} \sin \Theta$$

und

$$(5) \quad (n \cos \Theta - n' \cos \Theta') \cos \Theta + (1 + \alpha)(n \sin \Theta - n' \sin \Theta') \sin \Theta \\ = \frac{(1 + \alpha)M}{EJ}$$

sollen dabei zur Definition der in den Formeln (1), (2) und (3) auftretenden Grössen Θ und n dienen. Die Grösse A ist dann als positiv zu rechnen, wenn die beiden entgegengesetzten Kräfte A die Axe des Cylinders Z zu verlängern suchen; die Grösse M ist als positiv zu rechnen, wenn die beiden entgegengesetzten Kräftepaare M die Anzahl der Windungen der Schraubenlinie zu vergrössern bestrebt sind.

Die in (2) und (3) unter den Integralzeichen stehenden Differentialausdrücke lassen sich als rationale Functionen von $\tan \frac{1}{2} \Theta$ darstel-

len; man bekommt alsdann z. B. für die Verschiebung Y eines Punktes s den Ausdruck:

$$(6) \quad Y = (\cos \Theta - \cos \Theta') s - \left(l + \frac{A}{p} \right) (\cos \Theta - \cos \Theta_0) + \frac{M}{p} (n - n_0) \\ - + \frac{a - b \sin 2\Theta}{1 + \alpha \sin^2 \Theta} - \frac{a - b \sin 2\Theta_0}{1 + \alpha \sin^2 \Theta_0},$$

worin Θ_0 und n_0 die Werthe von Θ und n für das obere Ende $s = 0$ der Schraubenlinie bedeuten, und die Constanten a und b sind:

$$a = \frac{(1 + \alpha) M^2}{2 E J p} - \frac{E J n'^2}{2 \alpha p} (\cos^2 \Theta' - (1 + \alpha) \sin^2 \Theta'); \\ b = \frac{E J n'^2 \sin 2\Theta'}{4 p}.$$

Die angeführten Formeln genügen einer strengeren Theorie des Gleichgewichts elastischer Stäbe, wie sie von Kirchhoff gegeben wurde, nur für diejenigen Punkte der Schraubenlinie, welche beim elastischen Gleichgewichte des Drahtes um eine ganze Anzahl von Umgängen von dem unteren Ende desselben entfernt sind. Man darf jedoch dieselben Ausdrücke von C , Y und B auf der ganzen Ausdehnung der Schraubenlinie benutzen, mit einer desto grösseren Genauigkeit, je grösser die Anzahl der Windungen des Drahtes ist. In der That, die Formänderung der Schraubenlinie in den nahe zum unteren Ende des Drahtes liegenden Punkten hängt wesentlich bloss von der angehängten Last A und dem Drehmomente M ab, und nicht vom Gewichte des übrig bleibenden Theils des Drahtes; bei einem Punkte aber, der um mehrere Windungen vom unteren Ende absteht, kann man die störende Wirkung eines Theils einer Windung gegen die gesammte Wirkung aller dieser Windungen vernachlässigen und die Grössen C , Y und B so bestimmen, als ob sie durch die von einer ganzen Anzahl der Windungen herrührende Last ($pl - ps$) hervorgebracht würden.

Die Formeln (1) — (3) bestimmen nach der Formänderung die Lage eines Molecüls o des Drahtes, welches sich vor der Formänderung auf der Axe des Drahtes in einer Entfernung s vom oberen Ende desselben befand; es bleibt jetzt übrig zu zeigen, wie man nach der Formänderung die Lage aller Molecüle des zum Molecül o zugehörigen Querschnittes S findet. Zu diesem Zwecke denken wir uns vor der Formänderung in einem Punkte s' der Schraubenlinie stehend, dessen Abstand s' vom oberen Ende ein wenig grösser ist, als der Abstand s des Molecüls o , unser Gesicht dem Kreise S zugekehrt, und wir wollen das Molecül o zum Anfangspunkte eines Systems von Polarcoordinaten wählen, zu deren Axe derjenige materielle Radius $o1$ des Kreises S dienen soll, welcher im Punkte o des fingirten, die Schraubenlinie enthaltenden Cylinders Z die nach aussen gerichtete Normale

dieses letzteren bildet. Ein Molecül a des Kreises S wird dann durch seinen Abstand ϱ vom Molecül o und durch den Winkel φ zwischen den beiden Strahlen $o1$ und oa definirt; den Winkel φ , der alle Werthe zwischen 0 und 2π annehmen kann, wollen wir dabei vom Strahle $o1$ ausgehend in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers bis zu dem Strahle oa ablesen. Die strenge Theorie zeigt, dass die Molecüle a des Kreises S auch nach der Formänderung keine windschiefe Fläche, sondern eine Ebene bilden, die auf der Axe des veränderten Drahtes senkrecht steht, und wenn wir auf diese Theorie das nämliche Näherungsverfahren, wie früher, anwenden, so folgt, dass der materielle Strahl $o1$ nach der Formänderung wiederum geradlinig und horizontal bleibt. Durch diese Bemerkungen wird die Lage des betrachteten materiellen Querschnittes S und des Strahles $o1$ im Raume nach der Formänderung vollständig bestimmt; die einzelnen Molecüle a lassen sich jetzt durch ihre Polarcoordinaten $(\varrho - c)$ und $(\varphi + \Delta\varphi)$ in Beziehung auf das Molecül o und den Strahl $o1$ bestimmen; man findet nämlich für die Verkürzung c des Abstandes ϱ zwischen den Molecülen a und o den Ausdruck:

$$(7) \quad c = \frac{\alpha (A + pl - ps)}{E\lambda} \varrho + \frac{\alpha (n \sin \Theta - n' \sin \Theta')}{2} \varrho^2 \cos \varphi,$$

worin $\lambda = \frac{1}{4} \pi m^2$ den Inhalt des kreisförmigen Querschnittes S des Drahtes bezeichnet, und für den Bogen $\beta = \varrho \cdot \Delta\varphi$, um welchen sich das Molecül a um das Molecül o in der Richtung des Uhrzeigers gedreht hat, den Ausdruck

$$(8) \quad \beta = - \frac{\alpha (n \sin \Theta - n' \sin \Theta')}{2} \varrho^2 \sin \varphi.$$

Man sieht aus der Formel (8), dass der materielle Strahl $o1$, wie bereits erwähnt, und sein entgegengesetzter, für welche $\varphi = 0$, resp. $= \pi$ ist, gradlinig bleiben, und dass alle übrigen Durchmesser eines Querschnittes S sich bei der Formänderung des Drahtes in flache Parabeln umformen.