ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2445-46.

Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgetheilte Cometen-Entdeckung. Von Prof. Hugo Gylden.

I.

Zu verschiedenen Zeiten habe ich die Mittheilung gelesen und erwogen, die in Pingré's Cometographie über den d'Angos'schen Cometen gegeben ist, dabei aber nie die Ueberzeugung gewinnen können, dieser Nachricht läge eine reine Erdichtung zu Grunde; so einfach, natürlich und ungezwungen erschien mir stets die Beschreibung des Vorganges bei der Entdeckung. Ein ganz anderes Ansehen gewinnt freilich die Sache, nachdem man die schwer wiegenden Consequenzen der später aufgefundenen ganzen Beobachtungsreihe nebst den von d'Angos selbst mitgetheilten Elementen berücksichtigt. In Bezug auf diese spätern Beobachtungen muss man sicherlich schon aus dem Grunde, dass d'Angos selbst Nichts von denselben wissen zu wollen schien, sich äussert reservirt verhalten. Selbst die scharfsinnigen und von tiefem, durch das Räthselhafte dieser Cometenentdeckung noch gesteigerten Interesse zeugenden Untersuchungen d'Arrest's sind wohl kaum im Stande, die Glaubwürdigkeit der ganzen Beobachtungsreihe, ihrer sehr mangelhaften historischen Authenticität gegenüber — von der Encke'schen Kritik sogar ganz abgesehen — festzustellen. Es liesse sich ja sogar die Frage stellen, woher denn die Beobachtungen in das Hindenburg'sche Archiv eigentlich gekommen sind? Vielleicht hat sich der Ritter, wie es zu jenen Zeiten nicht ganz beipielllos gewesen zu sein scheint,*) mit einem seiner Correspondenten einen groben Spass erlaubt, indem er ihm die fingirten Beobachtungen übermittelte, und dieser sich dúpiren lassen und die Beobachtungen weiter befördert. Die beiden ersten Beobachtungen aber, die der Entdecker an Messier mittheilte und welche von Pingré angeführt wurden, mithin die Entdeckung selbst, könnten als wahr angenommen werden, ohne dass man sich im Geringsten zu einem Urtheil über die Glaubwürdigkeit der übrigen zu verstehen braucht, und dies räumt sogar Encke ein, dessen Worte hier zu wiederholen ich mir erlaube. Er bemerkt [Corr. astr. Vol. IV, p. 469] »Tout ce qu'on pourrait alléguer dans cette mauvaise affaire en faveur du chevalier, ce serait de supposer qu'il avait réellement découvert le 10 et le 14 avril une comète, mais que n'ayant pu la retrouver ensuite, et ne voulant perdre les deux observations qu'il avait faites, et qui n'auraient pu servir, pour y suppléer, il avait, par vanité, imaginé une orbite quelconque, et fabriqué là-dessus toutes ces observations jusqu'au 1 Mai.«

*) Man sehe hierüber die Note des Herrn v. Zach in Veranlassung der Encke'schen Kritik. (Corr. astr. Vol. IV, p. 470.)

Die nächste Veranlassung, jetzt auf dies Thema zurückzukommen, lag in der Wahrnehmung einer gewissen Aehnlichkeit der Elemente dieses Cometen, wie sie Burckhardt aus den zwei an Messier mitgetheilten Beobachtungen erreicht, mit der einiger anderer Cometen. Aus der nachfolgenden Zusammenstellung ist man im Stande, die Sachlage zu beurtheilen.

	d'Angos (Burckh.)	Comet 1743 I	Comet 1819 IV	Com. (Denning) 1881 V
θ	55°	68°	77	66
i	26	2	9	7
π	150	93	67	18
log q	9.8338	9.9233	9.9506	9.8600

direct.

II.

Die angeführte Bahn des von d'Angos gesehenen Cometen bestimmte Burckhardt, indem er die Hypothese zu Grunde legte, der Comet sei zu den beiden Beobachtungszeiten in gleichen Abständen von der Erde gewesen. Statt derartige Hypothesen zu untersuchen, habe ich die Ergebnisse verschiedener Annahmen über die Lage der Bahnebene geprüft. Es wurden also Knotenlänge und Neigung willkürlich angenommen und die übrigen Elemente somit aus den beiden Beobachtungen berechnet. Ich stelle die Resultate einiger dieser Versuche hier zusammen.

	I	II	III	IV
θ	65°	45°	30°	65°
i	7	4	6	2
π	163	127	60	149
log q	9.9382	0.0000	9.9347	9.9884
log e	9.6967	9.1079	9.6279	9.1131

direct.

Wie man sieht ist die Uebereinstimmung der dritten Bahn mit der des vierten Cometen von 1819 bis auf die Knotenlänge nicht ganz unerheblich, und überhaupt ist die Aehnlichkeit der berechneten Bahnen mit denen der drei angeführten Cometen eine solche, dass man, wenn auch nicht an eine Identität, so doch an einen gemeinsamen Ursprung der vier Objecte denken kann. Das Bemerkenswerthe bei den gefundenen Bahnen ist die geringe Excentricität, die

überall zu Tage tritt; ferner die geringen Entfernungen von der Erde. Indem ich diese durch A und A' bezeichne, stelle ich sie hier zusammen, den vier Bahnen entsprechend

	I	II	III	IV
$\log A$	9.0782	8.6206	8.1226	8.5769
$\log A'$	9.0831	8.5825	7.6663	8.5864

Die Möglichkeit einer solchen Annäherung an die Erde führt nun wieder zu der von d'Arrest ausgesprochenen Ansicht, die Bahn müsse während einiger Zeit berechnet werden, als ob die Erde die Hauptanziehung ausübte. In der Folge werde ich über die Versuche berichten, die in dieser Hinsicht gemacht wurden; zunächst sollen aber die Resultate mitgetheilt werden, welche in Beziehung auf die Bahn des Cometen um die Sonne vor der Annäherung an die Erde gefunden wurden. Es kommt uns auch gerade darauf an, wo möglich diese Bahn zu ermitteln, denn die während der grossen Annäherung an die Erde angestellten Beobachtungen könnten möglicherweise zu völlig entstellten Resultaten in Bezug auf die Bahn um die Sonne führen.

III.

Aus der intermediären Bahn des Cometen um die Erde, theilweise auch unter Berücksichtigung der Störungen der Bewegung in dieser Bahn, wurden zwei geocentrische Längen und Breiten gewonnen, gültig für Zeiten vor dem 10. April. *) Aus diesen Oertern wurden alsdann, unter Annahme hypothetischer Werthe für die Knotenlänge und die Neigung, die elliptischen Elemente der Bahn um die Sonne berechnet. Bei einigen Versuchen wurde aber die Lage der Bahn unter Hinzuziehung der, aus der intermediären Bahn folgenden Radiivectoren bestimmt. Solche Versuche wurden mit verschiedenen intermediären Bahnen ausgeführt, da diese, wie man sehen wird, in unserm Falle sämmtlich einen hypothetischen Character haben. Einige der Resultate, nämlich die, welche am annehmbarsten erscheinen, führe ich in der folgenden Zusammenstellung an.

	I	II	III	IV	V	VI
θ	77°	23°	73°	68°	67°	70°
i	1	11	1 ³ / ₄	1 ¹ / ₂	2	4
π	163	150	154	131	135	140
$\log q$	9.970	9.963	9.981	9.986	9.979	9.960
$\log e$	9.637	9.387	9.863	8.686	8.621	9.030

Hält man eine sehr geringe Excentricität für unwahrscheinlich, so findet man vielleicht das folgende Elementensystem, welches im Uebrigen gewissermaassen die Mitte der angeführten hält, als das annehmbarste:

$$\begin{aligned}\theta &= 70^\circ \\ i &= 2 \\ \pi &= 150 \\ \log q &= 9.980 \\ \log e &= 9.800 \\ &\text{direct.}\end{aligned}$$

*) Das Datum der Entdeckung.

Für die Umlaufszeit in dieser Bahn ergibt sich 5.13 Jahre.

Wäre die Perihellänge etwa 60° kleiner gefunden worden, als in den obigen Elementen angegeben ist, so hätte man schwerlich an der Realität des Resultates zweifeln können, mithin auch nicht daran, dass die Entdeckung d'Angos' wirklich stattgefunden hat; aber auch so ist die Uebereinstimmung mit den Elementen der drei andern Bahnen immerhin der Art, dass die Annahme, ein Comet sei wirklich von d'Angos gesehen worden, sowie die eines gemeinsamen Ursprungs der vier Objecte plausibel erscheint. Ob einige derselben vielleicht identisch sind, scheint mir gegenwärtig noch sehr schwer zu beurtheilen.

Jedoch muss andererseits eingeräumt werden, dass die hypothetische Annahme der sehr geringen Neigung nothwendig zu einer Bahn führen musste, deren Dimensionen von denen der Erdbahn nicht gar zu sehr verschieden sind. Die beobachteten Breiten sind nämlich nicht sehr gering, und führen daher, bei kleiner Neigung der Bahn, zu geringen Entfernungen des Cometen von der Erde. Da ferner die beobachtete geocentrische Bewegung nicht besonders gross war, so konnte die heliocentrische Bewegung des Cometen von der der Erde nicht sehr verschieden gefunden werden. Das obige Resultat beweist also im Grunde nur die Möglichkeit der gegebenen Erklärung, nicht ihre Nothwendigkeit; aber auch auf dieser Stufe der Modalität ist der Beweis nicht ohne Interesse. Sehen wir nämlich gänzlich von den sicherlich apokryphen Beobachtungen nach Apr. 14 ab, so stehen wir vor der Entscheidung der folgenden Frage: kann man annehmen, dass d'Angos am 10. und 14. April 1784 ein cometenähnliches Object gesehen und in solcher Weise beobachtet habe, dass es in eine Bahn verlegt werden kann, die auf einen gemeinsamen Ursprung der vier Cometen hinweist; oder aber, sollen wir die Mittheilung jener Entdeckung als eine reine Erdichtung ansehen? Mir erscheint es, als ob der ersten Alternative die grössere Wahrscheinlichkeit zuerkannt werden müsste. Denjenigen aber, die dennoch an der Erdichtung festhalten wollen, gebe ich zu bedenken, dass, wenn auch diese ersten Beobachtungen erdichtet worden sind, es doch schwer anzunehmen ist, sie seien aus vollkommen willkürlich erdichteten Elementen berechnet worden. Denn die Elemente mussten doch wenigstens der Bedingung genügen, dass der Comet zu den angegebenen Zeiten wirklich sichtbar war; ferner wohl auch der, dass der Comet in einer Himmelsgegend anzutreffen war, wo Cometen zu der betreffenden Jahreszeit zu suchen waren. Man kann daher die Erdichtung der Oerter und nicht die der Elemente als eine ziemlich abgemachte Sache betrachten, wenn man überhaupt an einer derartigen Hypothese festhalten will. Mit diesen Oertern und fingirten Abständen wäre alsdann die bekannte Bahn berechnet worden, wobei das Versehen mit der Verzehnfachung der Radiivectoren hätte geschehen können. — Aber in diesem Falle beweist die gegenstandslose Bahn auch nicht das Mindeste für oder gegen die Erdichtung der Oerter, denn sie hätte genau dieselbe werden müssen, wenn die zwei Oerter erdichtet wären, oder nicht. Wenn dem aber so ist, so muss die Hypothese der Erdichtung als die weniger wahrscheinliche bezeichnet werden.

IV.

Die im Vorhergehenden mitgetheilten Resultate sind gewonnen mit Hülfe intermediärer Bahnen, deren Bestimmung ich jetzt in möglichster Kürze darlegen werde. Man hätte für dieselben in unserm Falle vielleicht einfach Kegelschnitte annehmen können; da man aber nicht voraussehen konnte, ob der Abstand von der Erde innerhalb des betreffenden Theils der Bahn für eine solche Annahme hinreichend klein blieb, und da ich überdies eine für ähnliche Untersuchungen passende Methode an numerischen Beispielen prüfen wollte, so habe ich mich an die Annahme eines Kegelschnittes nicht gebunden.

Die Entfernung des Cometen von der Erde bezeichne ich durch r ; die der Sonne durch r' und den Winkel zwischen r und r' durch H ; endlich die Sonnenmasse durch M , indem die der Erde als Einheit angenommen wird. — Da nun $\frac{r}{r'}$ als ein sehr kleiner Bruch angenommen wird, so berücksichtige ich von der Störungfunction nur die Glieder:

$$\Omega = l_1^2 M \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r'^3} (1 - 3 \cos H^2) \right),$$

wo l_1 eine Constante bedeutet, die in die Gaussische übergeht, wenn man die Sonnenmasse als Masseneinheit und die mittlere Entfernung zwischen Erde und Sonne als Einheit der Entfernungen annimmt. Wählt man die Erdmasse und ein Hundertstel des Sonnenabstandes als solche Einheiten, so gilt, unter Annahme der Hansen'schen Sonnenmasse, der Werth:

$$\log l_1 = 8.48338.$$

Ferner bezeichne ich durch H_0 einen constanten Werth von H , gültig für beiläufig die Mitte der Zeit, innerhalb welcher man die Bewegung als in der intermediären Bahn vorsichgehend betrachtet. Ich setze nun:

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{1}{2} l_1^2 (\mu_2) r^2 \\ (\mu_2) &= M \frac{3 \cos H_0^2 - 1}{r'^3} \\ &= \frac{M}{2 r'^3} (1 + 3 \cos 2H_0), \end{aligned}$$

wobei r' als constant angesehen wird; endlich bezeichne ich

$$\Omega = (\Omega) + f(r),$$

so dass:

$$\begin{aligned} \Omega &= l_1^2 M \frac{1}{r'} + \frac{3}{2} M \frac{r^2}{r'^3} (\cos H^2 - \cos H_0^2) \\ &= l_1^2 M \frac{1}{r'} - \frac{3}{2} M \frac{r^2}{r'^3} \sin(H - H_0) \sin(H + H_0). \end{aligned}$$

Es seien nun x, y, z die rechtwinkligen geocentrischen Coordinaten des Cometen, bezogen auf die Ebene der Ekliptik und den Frühlingspunkt; ferner ξ und η ebenfalls

rechtwinklige geocentrische Coordinaten des Cometen, aber bezogen auf die veränderliche Ebene der intermediären Bahn: wir haben alsdann die beiden Gleichungssysteme:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + l_1^2 \frac{x}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + l_1^2 \frac{y}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + l_1^2 \frac{z}{r^3} = \frac{\partial(\Omega)}{\partial z} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \left[\frac{1}{r^2} + f'(r) \right] \frac{l_1^2 \xi}{r} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left[\frac{1}{r^2} + f'(r) \right] \frac{l_1^2 \eta}{r} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{cases}$$

Die Länge und Breite des Cometen, bezogen auf die Ekliptik, bezeichne ich durch l und b ; die Länge in der intermediären Bahn durch v ; man hat alsdann:

$$\begin{aligned} x &= r \cos b \cos l \\ y &= r \cos b \sin l \\ z &= r \sin b \\ \xi &= r \cos v \\ \eta &= r \sin v \end{aligned}$$

Es seien nun:

r_0 der intermediäre Radiusvector,
 v_0 die intermediäre Länge,
 τ die reducirte Zeit;

ferner sei:

$$(3) \quad \begin{cases} v - v_0 = \chi, \\ \frac{r}{r_0} = 1 + \nu; \end{cases}$$

für χ und ν gelten alsdann die Differentialgleichungen

$$(4) \quad \frac{d^2 \chi}{dv_0^2} = \frac{r^2}{c_0} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

$$(5) \quad r_0 \frac{d^2 \nu}{d\tau^2} - \frac{\nu}{(1+\nu)^2} \left(\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - \frac{c_0}{r_0^3} \right) = -[f'(r) - f'(r_0)] + \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{c_0}{r^3} \left[2 \frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0} \right)^2 \right],$$

wo c_0 eine weiter unten näher anzugebende Constante bedeutet.

Setzt man weiter:

$$\mathfrak{z} = \sin b,$$

so findet sich aus der dritten der Gleichungen (1) die nachstehende:

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv_0^2} + \left[1 + 2 \frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0} \right)^2 + \frac{r^3}{c_0} \frac{\partial(\Omega)}{\partial r} \right] \mathfrak{z} = \frac{r^3}{c_0} \frac{\partial(\Omega)}{\partial z}.$$

Wir haben aber, da die z -Coordinate der Sonne = 0 ist,

$$\frac{\partial(\Omega)}{\partial r} = -l_1^2 M \frac{r}{r^3} (1 - 3 \cos H^2)$$

$$\frac{\partial(\Omega)}{\partial z} = -l_1^2 M \frac{r}{r^3} z;$$

mithin auch:

$$\frac{d^2 z}{dz_0^2} + \left[1 + 2 \frac{d\chi}{dz_0} + \left(\frac{d\chi}{dz_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{l_1^2 M r^4}{c_0 r^3} (1 + \cos 2H) \right] z = 0.$$

Nachdem v und z bekannt sind, findet sich l mittelst einer Quadratur; es ist nämlich:

$$l = v + \int \left[\frac{\sqrt{1 - z^2 - \left(\frac{dz}{dv} \right)^2}}{1 - z^2} - 1 \right] dv.$$

Endlich findet man den Unterschied zwischen der wahren und der reducirtten Zeit ebenfalls durch eine Quadratur. Setzt man:

$$(8) \quad t - \tau = T,$$

so ist:

$$(9) \quad T = \int (2v + v^2) d\tau.$$

Die Ableitung dieser Gleichungen findet sich theils in meiner ersten Abhandlung über die Theorie der Bewegung der Himmelskörper, theils in der dritten, welche vor einiger Zeit der K. Akademie der Wissenschaften zu Stockholm eingereicht wurde.

V.

Die intermediären Coordinaten ξ_0 und η_0 bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \xi_0}{d\tau^2} + l_1^2 \frac{\xi_0}{r_0^3} - l_1^2 (\mu_2) \xi_0 = 0 \\ \frac{d^2 \eta_0}{d\tau^2} + l_1^2 \frac{\eta_0}{r_0^3} - l_1^2 (\mu_2) \eta_0 = 0 \end{cases}$$

Hieraus findet sich zunächst das Integral:

$$(11) \quad \xi_0 \frac{d\eta_0}{d\tau} - \eta_0 \frac{d\xi_0}{d\tau} = r_0^2 \frac{dz_0}{d\tau} = \sqrt{c_0},$$

wodurch die Bedeutung der Constante c_0 festgestellt worden ist; ferner die Gleichung:

$$(14) \quad \begin{cases} \sqrt{c_0} E = C \xi_0 - C_1 \eta_0 - \xi_0 \int (1+v)^2 U \eta_0 d\tau + \eta_0 \int (1+v)^2 U \xi_0 d\tau \\ \sqrt{c_0} \frac{dE}{d\tau} = C \frac{d\xi_0}{d\tau} - C_1 \frac{d\eta_0}{d\tau} - \frac{d\xi_0}{d\tau} \int (1+v)^2 U \eta_0 d\tau + \frac{d\eta_0}{d\tau} \int (1+v)^2 U \xi_0 d\tau \end{cases}$$

VI.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der intermediären Bahn, welche, wie wir leicht erkennen, sich näher und länger der wahren Bahn anschliesst als irgend ein Kegelschnitt. Durch die Aufnahme des Principes der intermediären Bahn nebst den dazu gehörenden Störungs-

$$(12) \quad \frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - \frac{c_0}{r_0^3} + l_1^2 \left[\frac{1}{r_0^2} - (\mu_2) r_0 \right] = 0.$$

Diese Gleichung wenden wir zunächst an, um die Gleichung (5) in einer für unsern Zweck entsprechenden Weise zu transformiren. Wir erhalten, durch Elimination der Grösse $\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} - \frac{c_0}{r_0^3}$,

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + l_1^2 \left[\frac{1}{r_0^3} - (\mu_2) \right] \frac{v}{(1+v)^3} = U,$$

indem wir nämlich die rechte Seite der Gl. (5) kurzweg mit $r_0 U$ bezeichnen. Setzen wir ferner:

$$E = \frac{v}{1+v},$$

so ergibt sich:

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{(1+v)^2} \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt}$$

und

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{1}{(1+v)^2} \frac{d^2 E}{d\tau^2}.$$

Wir erhalten hiermit aus der vorhergehenden Gleichung:

$$(13) \quad \frac{d^2 E}{d\tau^2} + l_1^2 \left[\frac{1}{r_0^3} - (\mu_2) \right] E = (1+v)^2 U.$$

Das Integral dieser Gleichung findet sich sehr leicht, wenn einmal die Integrale der Gleichung (10) gegeben sind. Man erhält nämlich:

formeln hat man eine, wie es scheint, meistens genügende Lösung des Problems der drei Körper in einem Falle, der bisher als einer der schwierigeren galt, nämlich in demjenigen, wo die Anziehung des Planeten nahezu gleich der der Sonne angenommen werden kann. Ich brauche kaum daran zu erinnern, dass solche Fälle in genügend grosser Zahl vorkommen, um die Erlangung einer Methode zur

zweckmässigen Erledigung derselben sehr wünschenswerth zu machen.

Wenn die Gl. (12) integrirt wird, so erhält man, unter Berücksichtigung der Gl. (11), und indem die Integrationsconstante mit h bezeichnet wird, das folgende Resultat:

$$(15) \quad \left[\frac{dr_0}{d\tau} \right]^2 = -\frac{c_0}{r_0^2} + \frac{2l_1^2}{r_0} - h + l_1^2 (\mu_2) r_0^2.$$

Hier führen wir eine neue Veränderliche u_0 ein, indem wir setzen:

$$d\tau = \beta r_0 du_0$$

oder

$$dv_0 = \frac{\beta \sqrt{c_0}}{r_0} du_0,$$

wo β eine Constante bezeichnet.

Wir erhalten nun:

$$\frac{1}{\beta^2} \left[\frac{dr_0}{du_0} \right] = -c_0 + 2l_1^2 r_0 - h r_0^2 + l_1^2 (\mu_2) r_0^4.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung muss ihre rechte Seite in Factoren zerlegt werden; wir haben daher zunächst die Wurzeln der Gleichung

$$(16) \quad 0 = -c_0 + 2l_1^2 r_0 - h r_0^2 + l_1^2 (\mu_2) r_0^4$$

zu untersuchen. Es lassen sich zwei Hauptfälle unterscheiden: in dem einen ist der Werth von (μ_2) positiv, in dem andern negativ. Im ersten Falle hat die Gleichung wenigstens zwei reelle Wurzeln, wir nehmen aber an, dass die Coefficienten derselben so beschaffen sind, dass sie auch im zweiten Falle wenigstens zwei reelle Wurzeln hat. Jeder dieser Hauptfälle zerfällt nun wieder in zwei Klassen, je nachdem die Anzahl der reellen Wurzeln 4 oder 2 beträgt. Wir unterscheiden also im Ganzen vier Fälle, nämlich:

1. (μ_2) positiv; 4 reelle Wurzeln, von denen wenigstens zwei positive Werthe haben;
2. (μ_2) positiv; 2 reelle Wurzeln, eine positive und eine negative;
3. (μ_2) negativ; 4 reelle Wurzeln, unter diesen wenigstens zwei positive;
4. (μ_2) negativ; 2 positive und zwei imaginäre Wurzeln.

Den Fall 1 habe ich in der ersten Abhandlung über die Theorie der Bewegung der Himmelskörper behandelt, den dritten und den vierten in der Abhandlung »Ueber die Bahn eines materiellen Punktes etc.«^{*)}. Die Untersuchung des zweiten Falles, welcher die intermediären Bahnen mit hyperbolischem Character umfasst, habe ich noch nicht veröffentlicht, aber sie liegt bereits fertig unter meinen Manuscripten. Da die Ableitung der auf die Bewegung in den intermediären Bahnen Bezug habenden Formeln zu viel Platz

erfordern würde, um in diesem Aufsätze Aufnahme finden zu können, so beschränke ich mich darauf, die für den dritten Fall geltenden Resultate hier zusammenzustellen. Die intermediären Bahnen des d'Angos'schen Cometen gehören nämlich diesem Falle an, so dass ich die Formeln durch ein numerisches Beispiel illustriren kann.

Die positiven Wurzeln der Gleichung (15) seien r_2 und r_1 , von denen $r_2 > r_1$; nach und nach berechnen wir mit diesen die folgenden Grössen:

$$\varrho_2 = r_2 \sqrt{(\mu_2)}; \quad \varrho_3 = r_1 \sqrt{(\mu_2)}$$

$$\mu = \frac{1}{2} (\varrho_2 + \varrho_1)$$

$$v = \sqrt{\frac{(\varrho_2 - \varrho_1)^2}{2} - \frac{2}{r_2 + r_1}}$$

$$k^2 = \frac{2v(\varrho_2 - \varrho_1)}{(\mu + v + \varrho_1)(\mu - v + \varrho_2)}; \quad k'^2 = 1 - k^2$$

$$\operatorname{sn}(\omega, k') = -\sqrt{\frac{\mu - v + \varrho_2}{\mu + v + \varrho_2}}$$

$$\operatorname{cn}(\omega, k') = \sqrt{\frac{2v}{\mu + v + \varrho_2}}$$

$$\operatorname{dn}(\omega, k') = \sqrt{\frac{2v}{\mu + v + \varrho_1}}$$

$$\operatorname{sn}(\sigma, k') = \sqrt{\frac{(\mu - v)(\mu + v + \varrho_1)}{(\mu + v)(\mu - v + \varrho_1)}}$$

$$\operatorname{cn}(\sigma, k') = \sqrt{\frac{2v\varrho_1}{(\mu + v)(\mu - v + \varrho_1)}}$$

$$\operatorname{dn}(\sigma, k') = \sqrt{\frac{2v\varrho_2}{(\mu + v)(\mu - v + \varrho_2)}}$$

Indem wir ferner mit K und K' die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, den Moduln k und k' entsprechend, bezeichnen, berechnen wir zwei Grössen ς und ς_1 aus den Formeln:

$$1 + \varsigma = \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi\sigma}{KK'} - \frac{d \log \theta(\omega - \sigma, k')}{d\omega} + \frac{d \log \theta(\omega + \sigma, k')}{d\omega} \right]$$

oder:

$$\begin{aligned} \varsigma = & 1 - \frac{1 - q^2 e^{\frac{\pi}{K}(\sigma - \omega)}}{1 + q^2 e^{\frac{\pi}{K}(\sigma - \omega)}} + \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{K}(\sigma + \omega)}}{1 + e^{-\frac{\pi}{K}(\sigma + \omega)}} \\ & - 2 \frac{e^{-\frac{\pi}{K}(\sigma - \omega)} \left[1 - q^4 e^{2 \frac{\pi}{K}(\sigma - \omega)} \right]}{1 + e^{-\frac{\pi}{K}(\sigma - \omega)}} + \dots \end{aligned}$$

und:

^{*)} Abh. der k. Akad. d. Wiss. zu Stockholm, Bd. 17.

$$1 + \zeta_1 = \frac{2K}{\pi} \frac{2\varrho_1}{V(\mu + \nu + \varrho_1)(\mu - \nu + \varrho_2)} + \frac{4q \left[e^{-\frac{\pi}{K}\omega} - e^{\frac{\pi}{K}\omega} \right]}{1 + q \left[e^{-\frac{\pi}{K}\omega} + e^{\frac{\pi}{K}\omega} \right] + q^2} + \dots$$

Setzen wir schliesslich

$$N = \pm \frac{l_1 V(\mu_2)}{1 + \zeta_1},$$

so haben wir folgende Ausdrücke für den intermediären Radiusvector, für die intermediäre Länge und für die reducirte Zeit.

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r_1} &= \frac{1 - k^2 \operatorname{sn} i\sigma^2 \operatorname{sn} u_0^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}(i\omega + K)^2 \operatorname{sn} u_0^2} \\ &= \left[\frac{\theta_3(i\omega)}{\theta(i\sigma)} \right]^2 \frac{\theta(u_0 + i\sigma) \theta(u_0 - i\sigma)}{\theta_3(u_0 + i\omega) \theta_3(u_0 - i\omega)} \\ v_0 - \Gamma &= (1 + \zeta) \frac{\pi}{2K} u_0 + i \log \frac{\theta(u_0 - i\sigma)}{\theta(u_0 + i\sigma)} \\ \pm N(\tau - \tau_0) &= \frac{\pi}{2K} u_0 - \frac{i}{1 + \zeta_1} \log \frac{\theta(u_0 - i\omega - K)}{\theta(u_0 + i\omega + K)} \end{aligned}$$

und hier bedeutet Γ die Länge des Perigaeums und τ_0 die Zeit, zu welcher der Comet diese Länge hat. Bei der Anwendung des ersten dieser Ausdrücke kann man sich auch der Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(i\omega + K) &= \sqrt{\frac{\mu + \nu + \varrho_1}{2\nu}} \\ i \operatorname{sn} i\sigma &= \operatorname{sn}(i\omega + K) \sqrt{\frac{\mu - \nu}{\varrho_1}} \end{aligned}$$

bedienen.

Schliesslich erwähne ich noch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r_1} e^{i(v_0 - v^0)} &= \left[\frac{\theta_3(i\omega)}{\theta(i\sigma)} \right]^2 \frac{[\theta(u_0 + i\sigma)]^2}{\theta_3(u_0 + i\omega) \theta_3(u_0 - i\omega)} e^{i \frac{\pi}{2K} (1 + \zeta) u_0} \\ \frac{r_0}{r_1} e^{-i(v_0 - v^0)} &= \left[\frac{\theta_3(i\omega)}{\theta(i\sigma)} \right]^2 \frac{[\theta(u_0 - i\sigma)]^2}{\theta_3(u_0 + i\omega) \theta_3(u_0 - i\omega)} e^{-i \frac{\pi}{2K} (1 + \zeta) u_0}, \end{aligned}$$

welche bei der Entwicklung der Störungsausdrücke erforderlich sind.

Auf die Einzelheiten dieser Entwicklungen werde ich jedoch hier nicht weiter eingehen, da ich von den vollständigen Formeln bis jetzt noch keinen numerischen Gebrauch gemacht habe. Die Störungen des Cometen in seiner intermediären Bahn wurden nämlich nach wesentlich abgekürzten Formeln mehr geschätzt als berechnet, da es sich zeigte, dass die Resultate von dem Betrage dieser Störungen ziemlich unberührt blieben. Zurückgerechnet auf den Anfang des März, ergaben sich doch Störungswerthe im Betrage von über 5 Graden in der Variation und von 4 Tagen in der Zeitreduction.

VII.

Die Anwendung der vorhergehenden Formeln setzt voraus, dass die numerischen Werthe von $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ für den Zeitpunkt bekannt sind, von welchem aus man die Bewegung als in der intermediären Bahn vor sich gehend ansieht. Diese Werthe bezeichne ich mit $x^0, y^0, z^0, \frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dy^0}{d\tau}, \frac{dz^0}{d\tau}$, indem angenommen wird, dass für den bezeichneten Zeitpunkt:

$$t = \tau.$$

Es sei nun I die Neigung der intermediären Bahn gegen die Fundamentalebene und Θ die Länge ihres aufsteigenden Knotens über letzterer; man hat alsdann:

$$\begin{aligned} x^0 \frac{dy^0}{d\tau} - y^0 \frac{dx^0}{d\tau} &= V c_0 \cos I \\ x^0 \frac{dz^0}{d\tau} - z^0 \frac{dx^0}{d\tau} &= V c_0 \sin I \cos \Theta \\ y^0 \frac{dz^0}{d\tau} - z^0 \frac{dy^0}{d\tau} &= V c_0 \sin I \sin \Theta. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen finden sich c_0, I und Θ .

Den Werth des Radiusvectors, welcher für den bestimmten Zeitpunkt gilt, bezeichnen wir mit r^0 ; derselbe findet sich aus der Formel:

$$r^{0^2} = x^{0^2} + y^{0^2} + z^{0^2}$$

und man hat ebenfalls:

$$r^0 \frac{dr^0}{d\tau} = x^0 \frac{dx^0}{d\tau} + y^0 \frac{dy^0}{d\tau} + z^0 \frac{dz^0}{d\tau}.$$

Endlich findet man mit Hülfe der Gleichung (15) den Werth der Constante h ; es ist nämlich:

$$h = \frac{2l_1^2}{r^0} + l_1^2 (\mu_2) r^{0^2} - \frac{c_0}{r^{0^2}} - \left[\frac{dr^0}{d\tau} \right]^2.$$

Den Werth von (μ_2) wird man durch einen leichten Ueberschlag haben festsetzen können, indem man nur ganz beiläufig die Werthe von H , verschiedenen Zeiten entsprechend, berechnet.

Bei der Untersuchung des d'Angos'schen Cometen lag die Sache nicht so einfach, 1) weil der Comet zur Zeit seiner Sichtbarkeit bereits als in die intermediäre Bahn eingetreten angenommen werden musste; 2) weil nur zwei Beobachtungen vorhanden sind. Es liess sich daher nur die Lage der Bahn, also die Elemente I und Θ , und ausserdem der Differentialquotient $\frac{dv_0}{d\tau}$ bestimmen. Um die Bahn voll-

ständig zu erhalten, mussten Hypothesen über r^0 und $\frac{dr^0}{d\tau}$ gemacht werden, und die verschiedenen Hypothesen, die in dieser Beziehung geprüft wurden, bedingten ebenso viele verschiedene Bahnen: ich habe wohl gegen 10-15 solche berechnet. Es würde kein Interesse haben, die Resultate aller dieser Versuche kennen zu lernen, weshalb die folgenden Mittheilungen sich wesentlich auf eine einzige Bahn beziehen.

VIII.

Die an Messier übermittelten Beobachtungen sind die folgenden

Pariser m. Zeit	Länge	Breite*)
1784 April 10 14 ^h 31 ^m	325° 53'	+37° 26'
14 15 18	315 3	+33 12.

Durch diese beiden Oerter und durch die Erde wurde eine Ebene gelegt; die Neigung derselben gegen die Ekliptik und die Länge des aufsteigenden Knotens sind die folgenden:

$$I = 42^\circ 45'$$

$$\theta = 90^\circ 0.$$

Nahezu dieselben Werthe finden sich auch aus den späteren (fingirten) Daten: d'Arrest fand aus dem Complexe sämtlicher Oerter die Werthe:

$$I = 43^\circ 8'$$

$$\theta = 90^\circ 52$$

und Gauss hat sie in zwei verschiedene Combinationen zu 43° 56', resp. 90° 34' und 43° 5', resp. 90° 57' berechnet. [Astr. Nachr. 1574]. Endlich kann hervorgehoben werden, dass die von d'Angos selbst angegebenen Werthe der Neigung und der Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn um die Sonne die folgenden sind:

$$i = 47^\circ 55'$$

$$\theta = 86^\circ 52$$

und diese Werthe sind ebenfalls nicht sehr verschieden von den oben angeführten, die Lage der intermediären geocentrischen Bahn bestimmenden Elementen. Diese Uebereinstimmung ist, wie es scheint, leicht zu erklären. Wenn aus den beiden angeführten Oertern unter Annahme von willkürlichen, aber sehr grossen Abständen die Bahn um die Sonne berechnet wird, so muss ihre Lage im Raume als nahezu dieselbe gefunden werden, wie die der oben bestimmten Ebene. Die in einer solchen Bahn berechneten Oerter müssen ebenfalls, wenn sie dazu verwendet werden, zu nahezu ähnlichen Elementen der Bahn um die Erde führen.

Mit den gefundenen Werthen der Neigung und der Knotenlänge wurden die Längen in der Bahn berechnet, und es fanden sich:

*) Die Richtigkeit der Verwandlung der AR und Decl. in Längen und Breiten ist von Encke bestätigt worden.

$$\begin{array}{rcl} & v & \\ \text{April } 10 & 333^\circ 33' & \\ & 14 & 323 \ 45. \end{array}$$

Die Bewegung ist also rückläufig.

Für die Länge und Winkelgeschwindigkeit, die letztere während der Zwischenzeit als constant angenommen, fanden sich endlich die der Mitte der Zeiten entsprechenden Werthe:

$$\begin{array}{l} \tau^0 = \text{April } 12.6212 \\ v^0 = 328^\circ 39' \\ \frac{dv^0}{d\tau} = 2^\circ 43.02, \end{array}$$

oder in Theilen des Radius ausgedrückt:

$$\log \frac{dv^0}{d\tau} = 8.62752.$$

Der Winkel H ist die Hypothenuse eines sphärischen Dreieckes, dessen übrige Seiten von der Breite des Cometen und der Differenz der Längen des Cometen und der Sonne gebildet werden. Bezeichnen wir die letztere Länge mit $\odot$, so haben wir

$$\cos H = \cos b \cos (l - \odot).$$

Nach dieser Formel werden berechnet

$$\begin{array}{rcl} & H & \\ \text{April } 10 & 63^\circ 35' & \\ & 14 & 73 \ 58. \end{array}$$

Demgemäss wurde für die Zeit kurz vor den Beobachtungen angenommen:

$$H_0 = 60^\circ.$$

Mit dem Werthe der Sonnenmasse, wie ihn Hansen gefunden hat, nämlich:

$$M = 354936$$

und dem Werthe $r' = 100$ wurde nun der Coefficient (μ_2) berechnet, und es ergab sich

$$\log (\mu_2) = 8.94810_n.$$

Dies sind die Daten, auf welche die folgenden Rechnungen, unter Hinzufügung hypothetischer Werthe von r^0 und $\frac{dr^0}{d\tau}$, sich stützen.

IX.

Es wurden unter vielen anderen auch die Werthe

$$\log r^0 = 0.17609; \log \frac{dr^0}{d\tau} = 8.18224$$

den ferneren Rechnungen zu Grunde gelegt.

Die Gleichung (16), nachdem sie durch l_2^2 dividirt worden war, erhielt nun nachstehende numerische Coefficienten, die durch ihre Logarithmen gegeben sind *)

$$0 = -[1.03846] + 2r_0 - [0.60206]r_0^2 - [8.94810]r_0^4.$$

Eine leichte Rechnung ergab die positiven Wurzeln derselben, wie folgt:

$$\log r_2 = 0.83005; \log r_1 = 0.16280$$

und mit diesen Werthen wurden nun die folgenden Grössen berechnet:

$$\begin{aligned} \log \rho_2 &= 0.30410 \\ \log \rho_1 &= 9.63685 \\ \log \mu &= 0.08770 \\ \log \nu &= 9.79064 \\ \log k &= 9.75763 \\ \log k' &= 9.91384. \end{aligned}$$

Ferner folgen:

$$\begin{aligned} \log q &= 8.39393; \log q' = 8.84077 \\ -\frac{2K}{\pi} &= 0.04200; \quad \frac{2K'}{\pi} = 0.11280. \end{aligned}$$

Um die Formeln kürzer angeben zu können, setze ich

$$\frac{\pi}{2K} u_0 = \varepsilon_0$$

und führe überdies die Bezeichnungen

$$r_2 + r_1 = 2a; \quad r_2 - r_1 = 2ae$$

ein.

Es ergab sich

$$\begin{aligned} \log a &= 0.61365 \\ \log e &= 9.81015 \end{aligned}$$

$$\text{am } u_0 = \varepsilon_0 + [0.45281] \sin 2\varepsilon_0 + [8.546] \sin 4\varepsilon_0 + \dots,$$

wo die Coefficienten durch ihre Logarithmen gegeben und in Graden ausgedrückt sind. Ferner fand sich:

$$\frac{r_0}{a} = [9.54915] + \frac{[9.70969] \sin u_0^2}{1 - [9.78050] \sin u_0^2};$$

und indem für r_0 der Werth r^0 eingesetzt wurde, ergab sich der entsprechende Werth von ε_0 , den wir ε^0 nennen wollen, nämlich

$$\varepsilon^0 = \pm 7^\circ 36' 6'',$$

wo wir die doppelten Vorzeichen hingesetzt haben, weil der

*) Bei den hier mitgetheilten Rechnungen wurde statt der oben angeführten Werthe von h der folgende angewandt:

$$\log h = 8.46047;$$

der Unterschied beider ist zu unerheblich, um auf die Resultate wesentlichen Einfluss ausgeübt haben zu können.

angenommene Werth von $\frac{dr^0}{d\tau}$, sowohl positiv als negativ sein kann, ohne dass die Rechnung weiter abgeändert wird.

Nun wurden die mit ω und σ bezeichneten Bögen gesucht und fand sich dabei, indem sie in Theilen des Radius ausgedrückt wurden:

$$\begin{aligned} \omega &= -1.0800 \\ \sigma &= +1.1411. \end{aligned}$$

Aus diesen wurde gefolgert:

$$\log e^{-\frac{\pi}{2K}\omega} = 0.42599; \log e^{\frac{\pi}{2K}\sigma} = 0.44988,$$

und nun konnten die Werthe von ς und ς_1 berechnet werden; es ergab sich:

$$\begin{aligned} \varsigma &= 0.08823 \\ \varsigma_1 &= -0.02178. \end{aligned}$$

Die mittlere Bewegung der intermediären Anomalie wurde mit dem letzteren Werthe, wie folgt, erhalten:

$$N = -0^\circ 50' 37''.$$

Die Ausdrücke für die intermediäre Länge und für die reducirte Zeit konnten nun berechnet werden, und es ergaben sich die nachstehenden, in Graden ausgedrückten Werthe der Coefficienten:

$$\begin{aligned} v_0 - \Gamma &= (1 + \varsigma) \varepsilon_0 + [1.34616] \sin 2\varepsilon_0 \\ &\quad + [0.34539] \sin 4\varepsilon_0 \\ &\quad + [9.4630] \sin 6\varepsilon_0 \\ &\quad + [8.632] \sin 8\varepsilon_0 \\ &\quad + [7.829] \sin 10\varepsilon_0 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\tau - \tau_0) &= \varepsilon_0 - [1.30622] \sin 2\varepsilon_0 \\ &\quad + [0.25933] \sin 4\varepsilon_0 \\ &\quad - [9.3315] \sin 6\varepsilon_0 \\ &\quad + [8.450] \sin 8\varepsilon_0 \\ &\quad - [7.600] \sin 10\varepsilon_0 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Werthes ε^0 in diese Formeln erhalten wir die Werthe von $v^0 - \Gamma$ und $\tau^0 - \tau_0$ und können somit, da v^0 und τ^0 bekannt sind, die Elemente Γ und τ_0 ermitteln. Die Rechnung ergab:

$$\begin{aligned} v^0 - \Gamma &= \pm 15^\circ 29' \\ \tau^0 - \tau_0 &= \mp 6.1203 \text{ Tage} \end{aligned}$$

und hiermit wären die Elemente der intermediären Bahn des d'Angos'schen Cometen um die Erde, während der Zeit seiner Sichtbarkeit, ermittelt. Ich stelle sie hier zusammen:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 1784 \text{ April } 12.6212 \pm 6.1203 \\
I &= 328^\circ 39' + 15^\circ 29' \\
\log a &= 0.61365 \\
\log e &= 9.81015 \\
\log k &= 9.75763 \\
\zeta &= +0.08823 \\
N &= -0^\circ 50' 37'' \\
\theta &= 90^\circ 0' \\
I &= 42.45 \\
\log(\mu_2) &= 8.94810_n.
\end{aligned}$$

Die doppelten Vorzeichen habe ich stehen lassen, weil Versuche mit beiden Systemen gemacht wurden, ohne jedoch zu wesentlich verschiedenen Resultaten zu führen.

Wir müssen aber noch die Bewegung der Knoten wenigstens beiläufig bestimmen, denn diese ist zu bedeutend, um völlig vernachlässigt werden zu dürfen. Setzen wir zu diesem Zwecke die Werthe von r^0 und H_0 statt r und H in die Gleichung (7), so erhalten wir

$$\beta = \sin I \cos [(1 + 0.12)v - \theta_0],$$

wo nun $\sin I$ und θ_0 die Integrationsconstanten sind. Indem man mit θ die veränderliche Knotenlänge bezeichnet, kann man, auf Grund obiger Gleichung, die Formel

$$\theta = 90^\circ 0' - 0.12 [v_0 - 328^\circ 39']$$

aufstellen, in der man v_0 als in Graden ausgedrückt denken muss.

Dieser Werth der Bewegung der Knoten gilt indessen nur für die nächste Zeit um April 10-12 herum; vorher war sie grösser, erstens weil $\cos 2H$ einen grössern Werth als $-1/2$ hatte, zweitens weil auch r jedenfalls grösser angenommen werden muss. Die Versuche, auf die frühere Bahn um die Sonne herum zu schliessen, wurden mit Werthen der Knotenbewegung ausgeführt, deren Coefficienten bis auf 0.355 gingen.

Ausser dem obigen führe ich noch ein zweites Elementensystem an, welches Herr Prof. G. Lewitzky berechnet hat. Aus denselben Annahmen wie oben, jedoch mit dem Unterschiede, dass jetzt angenommen wurde:

$$\log \frac{dr^0}{d\tau} = 8.60206,$$

folgerte er die nachstehende Bahn:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 1784 \text{ April } 12.621 \pm 11.457 \\
I &= 328^\circ 39' \mp 37^\circ 3' \\
\log a &= 0.66072 \\
\log e &= 9.86297 \\
\log k &= 9.83628 \\
e^{-\frac{\pi}{K}\omega} &= 0.72413 \\
e^{\frac{\pi}{K}\sigma} &= 0.76570 \\
\zeta &= 0.07850 \\
N &= -0^\circ 50' 21''
\end{aligned}$$

Neigung und Knotenlänge wie vorher.

X.

Diesen Aufsatz beschliesse ich mit der Mittheilung einer nach Hansen's Tafeln berechneten Sonnenephemeride von März 1 bis April 10, dem Zeitpunkt, wo die von d'Arrest berechnete Ephemeride anfängt. Es scheint mir nämlich nicht unmöglich, dass man auf den d'Angos'schen Cometen nochmals zurückkommen wird, und für diesen Fall könnten die betreffenden Sonnenörter gebraucht werden:

M. Par. Mittag	☉	log R
1784 März 1	341° 36' 48.7	9.996482
2	342 36 49.5	592
3	343 36 48.9	703
4	344 36 46.7	816
5	345 36 43.1	930
6	346 36 38.2	9.997047
7	347 36 31.7	164
8	348 36 23.4	284
9	349 36 13.5	404
10	350 36 1.8	526
11	351 35 48.3	9.997648
12	352 35 33.1	772
13	353 35 16.2	896
14	354 34 57.5	9.998020
15	355 34 37.0	145
16	356 34 14.6	271
17	357 33 50.4	397
18	358 33 24.6	521
19	359 32 57.1	646
20	0 32 27.4	771
21	1 31 55.9	9.998896
22	2 31 22.3	9.999021
23	3 30 46.7	146
24	4 30 8.8	271
25	5 29 28.8	396
26	6 28 56.0	521
27	7 28 1.0	644
28	8 27 13.7	767
29	9 26 24.1	888
30	10 25 32.5	0.000012
31	11 24 38.5	0.000135
April 1	12 23 42.4	259
2	13 22 44.1	382
3	14 21 43.7	506
4	15 20 41.0	630
5	16 19 36.3	754
6	17 18 29.4	878
7	18 17 20.4	0.001004
8	19 16 9.3	130
9	20 14 55.9	255
10	21 13 40.3	0.001381

Stockholm 1882 Juni 16.

Hugo Gylden.