ten zu werden braucht, wenn er durch ein doppeltbrechendes Medium geht. Er vermuthet jedoch, dass für jede Platte nur ein Fall der Nichtspaltung möglich ist.

Leider wurden mir diese Arbeiten erst gegen Schluss meiner Untersuchungen bekannt.

Es bleibt mir noch übrig, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Prof. Dr. v. Helmholtz für die Ueberlassung der benutzten Apparate, sowie für die Freundlichkeit, mit der er mir mit Rath und That bei der Ausführung der erwähnten Untersuchungen zur Seite stand, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

VIII. *Die Commutatorstellung bei electrodynamischen Maschinen*¹⁾; von G. Stern.

In den Experimentaluntersuchungen über electrodynamische Maschinen wird meist nur erwähnt, dass bei allen Versuchen die Collectorbürsten auf das Maximum der Stromintensität eingestellt wären, und dass diese Einstellung durch Probiren erreicht sei; auch die bisher aufgestellten Theorien befassen sich nicht mit den Aenderungen, die in der Wirkungsweise der Maschinen auftreten, wenn dem Commutator eine andere Stellung gegeben wird. Und doch sind diese Aenderungen so bedeutend, dass durch sie schon eine Regulirung des Maschinenstromes bewerkstelligt ist.²⁾

Es ist deshalb im Folgenden versucht, den Einfluss der Commutatorstellung in die Theorie der Maschine hineinzuziehen; zum Schluss sind noch einige Versuche über diesen Gegenstand angestellt.

Die Clausius'sche Abhandlung³⁾ berücksichtigt nur den

1) Aus der Inauguraldissertation des Hrn. Verfassers. Dritter Theil. Göttingen 1885.

2) Hiram S. Maxim, Scient. Amer. 43. p. 260. 1880. Erwähnt in Electrotechn. Zeitschr. 2. p. 33. 1881.

3) Clausius, Wied. Ann. 20. p. 355. 1883.

Fall, dass der die Contactfedern verbindende Durchmesser der Collectorscheibe (die Contactlinie) senkrecht zur Axe der festen Electromagnete (der Pollinie) steht. Meist schliesst aber die Contactlinie einen endlichen Winkel φ mit der Senkrechten zur Pollinie ein.

Ist letzteres der Fall, so bleibt im Clausius'schen Aufsatz bis zur Formel (11) (p. 366) der Form nach alles ungeändert; diese Formel lautet unter Beibehaltung der Clausius'schen Bezeichnungen:

$$Ei = -T - \rho i^2 v,$$

wo E die electromotorische Kraft, i die Stromstärke und v die Tourenzahl bedeutet; T ist die von ponderomotorischen Kräften in der Zeiteinheit geleistete Arbeit und ρ ein Coefficient, der, von der inducirenden Wirkung des rotirenden Leiters auf sich selbst herrührt. Freilich haben jetzt E sowohl als auch T einen anderen Werth als bei Clausius, denn die Potentialdifferenz $W' - W''$ ¹⁾ ist von φ abhängig — selbst auf ρ hat eine Aenderung von φ Einfluss —, aber, wie man sich leicht überzeugt, bleibt die erwähnte Relation zwischen E und T dadurch ungeändert. Ich verweise deshalb in Betreff der Herleitung obiger Formel, ebenso wie in Bezug auf die weitere Begründung mancher Punkte in den folgenden Rechnungen auf die citirte Arbeit selbst.

Die Formel für das magnetische Moment der festen Electromagnete bleibt bei einer Verschiebung der Contactlinie auch ungeändert; nämlich, wenn wir mit Clausius an der Frölich'schen Annahme hierüber festhalten, ist (Formel (12) der Clausius'schen Abhandlung):

$$M = \frac{Ai}{1 + \alpha i},$$

wo A und α Constante sind. Die magnetische Wirkung, welche dieses Moment auf den Eisenkern des Pacinotti-Gramme'schen Ringes ausübt, wird ebenfalls nach Grösse und Richtung dieselbe bleiben; das durch sie allein im Eisenkern des Ringes hervorgerufene magnetische Moment wird sein:

$$\frac{CM}{1 + \gamma M},$$

1) Clausius, l. c. Formel (3) u. (10).

wo C und γ Constante sind. — Auch das von der durchströmten Umwicklung des Pacinotti'schen Ringes selbst direct herrührende Moment bleibt der Grösse nach dasselbe, nämlich:

$$\frac{CN}{1 + \gamma N}, \text{ worin } N = Bi,$$

eine Grösse ist, welche zur magnetisirenden Kraft der Umwicklung in derselben Beziehung steht, wie das magnetische Moment M zur magnetisirenden Kraft der festen Electromagnete. Aber da die Richtung der von der Umwicklung ausgehenden Kraft stets mit der Contactlinie zusammenfällt, so steht sie nicht mehr senkrecht zur Axe der festen Electromagnete, wie bei Clausius, sondern schliesst mit der Senkrechten zur Pollinie den Winkel φ ein. (Im Folgenden soll φ stets, von der Senkrechten zur Pollinie ausgehend, im Sinne der Rotation als positiv gezählt werden.) Die Resultirende von M und N ist also nicht mehr $\Pi_0 = \sqrt{M^2 + N^2}$, sondern:

$$\Pi = \sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \sin \varphi}.$$

Die Axe des resultirenden Moments hat dieselbe Richtung, wie Π ; ist also ω der Winkel zwischen der Resultanten Π und der Pollinie, wo:

$$\sin \omega = \frac{N \cos \varphi}{\Pi}; \quad \cos \omega = \frac{M - N \sin \varphi}{\Pi},$$

so bestimmen diese Gleichungen die Richtung des im Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes erregten Moments:

$$P = \frac{C \Pi}{1 + \gamma \Pi} = \frac{C \sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \sin \varphi}}{1 + \gamma \sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \sin \varphi}}.$$

Zur Berechnung der ponderomotorischen Kraft, welche der Magnetismus des Eisenkerns auf seine drehbare Umwicklung ausübt, zerlegt nun Clausius das Moment P in zwei Componenten, P_1 und P_2 , von denen die eine, P_2 , in die Richtung des magnetischen Momentes N der Umwicklung fällt, während die andere, P_1 , senkrecht dazu steht; dazu brauchte Clausius P nur mit $\sin \omega$, resp. $\cos \omega$ zu multipliciren. Wollen wir analog verfahren, so müssen wir statt dessen:

$$P_1 = P \cos(\omega - \varphi), \quad P_2 = P \sin(\omega - \varphi)$$

bilden; dann hat P_2 die Richtung von N , nämlich die der Contactlinie, und P_1 steht senkrecht dazu. — Nun ist aber nach den Gleichungen für $\sin \omega$ und $\cos \omega$:

$$\sin(\omega - \varphi) = \frac{N - M \sin \varphi}{II}, \quad \cos(\omega - \varphi) = \frac{M \cos \varphi}{II},$$

also ist:

$$P_1 = \frac{CM \cos \varphi}{1 + \gamma II} = \frac{CM \cos \varphi}{1 + \gamma \sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \sin \varphi}},$$

$$P_2 = \frac{C(N - M \sin \varphi)}{1 + \gamma II} = \frac{C(N - M \sin \varphi)}{1 + \gamma \sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \sin \varphi}}.$$

Dieses sind die Ausdrücke, die den Clausius'schen Formeln (16) entsprechen; freilich ist die dort im Nenner eingeführte Vereinfachung hier unstatthaft, weil hier II , ausser von i , auch von φ abhängt.

Wir berechnen jetzt mit Clausius die Arbeit für den Fall, dass der Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes an der Rotation nicht theilnimmt.

Die ponderomotorische Arbeit der festen Electromagnete auf die rotirende Umwicklung ist auch jetzt proportional dem magnetischen Moment M der ersteren und andererseits dem Moment N der Umwicklung. Clausius setzt daher diese Arbeit $-hMNv$ für die Zeiteinheit, wo h eine Constante ist. Soll diese Constante auch in unserem Falle ihren Werth beibehalten und nicht von φ abhängig sein, so müssen wir hier statt N eine andere Grösse einführen. Bei Clausius stehen nämlich die Richtungen von M und N senkrecht zu einander; soll also jetzt, wo N den Winkel φ mit der senkrechten zur Pollinie einschliesst, h seine Bedeutung beibehalten, so müssen wir statt N seine senkrecht zur Pollinie fallende Componente, d. h. $N \cos \varphi$ setzen; die mit der Richtung von M zusammenfallende Componente $N \sin \varphi$ kann ja auch kein wirksames Drehungsmoment ergeben. — Dann ist die zu bestimmende Arbeit der festen Magnete auf die drehbare Umwicklung gleich:

$$\mathfrak{A}_1 = -hMNv \cos \varphi.$$

Die Arbeit $\mathfrak{A}_2$, welche der Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes mit seinem Magnetismus auf seine Umwicke-

lung ausübt, ist wieder der Grösse N und ferner der Componente P_1 des magnetischen Moments P proportional, welche auf N senkrecht steht; also:

$$\mathfrak{A}_2 = -kNP_1v,$$

wo k ein constanter Factor ist.

Danach ist die ganze von der Maschine in der Zeiteinheit geleistete ponderomotorische Arbeit:

$$T = -hMNv \cos \varphi - kNP_1v.$$

Nach der oben, p. 608, eingeführten Gleichung (11) des Clausius'schen Aufsatzes ist folglich die Arbeit der electromotorischen Kraft:

$$Ei = hMNv \cos \varphi + knP_1v - \rho i^2 v,$$

wo für P_1 der auf p. 610 angegebene Ausdruck zu setzen ist. — Diese Formeln lassen den auf p. 608 angedeuteten Unterschied in den Werthen von E und T gegen die Clausius'schen Werthe erkennen.

Nimmt der Eisenkern des Ringes an der Rotation Theil, so fällt die Arbeit $\mathfrak{A}_2$, welche er auf seine Umwicklung übte, fort, da beide Systeme fest miteinander verbunden sind; aber statt dessen tritt die Arbeit $\mathfrak{A}_2'$, welche die festen Electromagnete auf den rotirenden Kern ausüben, auf. Nach einer von Clausius angestellten Betrachtung¹⁾, die sich unmittelbar auf unseren Fall überträgt, sind diese beiden Arbeitsgrössen gleich, und in der That unterscheiden sie sich der Rechnung nach, wie bei Clausius, so auch hier, nur durch ihre Constanten. Die Arbeit $\mathfrak{A}_2'$ muss nämlich proportional M und der Componente P_2^* des Moments P nach der Senkrechten zur Pollinie sein. Diese Componente ist:

$$P_2^* = \frac{CN \cos \varphi}{1 + \gamma H} \quad \text{und also} \quad \mathfrak{A}_2' = -k'MP_2^*v.$$

Um diese Arbeit mit der früher erhaltenen $\mathfrak{A}_2$ zu vergleichen, führen wir die Werthe von P_2^* und P_1 ein; dann ist:

$$\mathfrak{A}_2 = -kNP_1v = -k \frac{CMN \cos \varphi}{1 + \gamma H} v,$$

$$\mathfrak{A}_2' = -k'MP_2^*v = -k' \frac{CMN \cos \varphi}{1 + \gamma H} v.$$

1) Clausius, l. c. p. 374 f.

Man braucht also in der That auch hier nur $k = k'$ zu setzen, um die Rechnung mit der oben erwähnten Betrachtung in Uebereinstimmung zu bringen.

Unsere Formeln für Ei und für T_f p. 611, sind hier-nach bei langsamer Drehung auch für den Fall gültig, dass der Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes mit rotirt.

Bei schneller Rotation des Eisenkerns wird infolge der magnetischen Trägheit des Eisens seine magnetische Axe in dem Sinne der Rotation verschoben. Es sei die Grösse dieser Verschiebung gleich εv , wo ε eine kleine Constante bedeutet; dann ist der Winkel, den die magnetische Axe des Eisenkerns im Pacinotti'schen Ringe mit der Pollinie einschliesst, gleich:

$$\omega' = \omega + \varepsilon v.$$

Clausius macht an dieser Stelle noch eine Annahme, die meines Wissens bis jetzt experimentell noch nicht begründet ist, dass nämlich nicht allein die Richtung, sondern auch die Grösse des magnetischen Moments einer zwischen den Polen eines Magnets rotirenden weichen Eisenmasse durch die Rotation beeinflusst würde, welchem Umstande er hier durch die Substitution:

$$P' = P \cos \varepsilon v$$

Rechnung trägt, wo P' das in die veränderte Axenrichtung fallende Moment des rotirenden Eisenkerns ist.¹⁾ Zerlegen wir dieses neue magnetische Moment P' in zwei Componenten, eine, P'_2 , nach der Contactlinie und die andere, P'_1 , senkrecht dazu, so ist:

$$P'_1 = P' \cos (\omega' - \varphi) = P \cos \varepsilon v \cos (\omega - \varphi + \varepsilon v)$$

$$P'_2 = P' \sin (\omega' - \varphi) = P \cos \varepsilon v \sin (\omega - \varphi + \varepsilon v).$$

Hier führt Clausius für $\cos \varepsilon v$ und $\sin \varepsilon v$ wegen der Kleinheit von ε die ersten Glieder ihrer Reihenentwickelungen ein, setzt also $\cos \varepsilon v = 1$ und $\sin \varepsilon v = \varepsilon v$. Dadurch wird die oben eingeführte zweifelhafte Annahme $P' = P \cos \varepsilon v$ doch illusorisch gemacht, und wir haben:

1) Dies Annahme hat übrigens auch bei Clausius auf den späteren Verlauf der Rechnung keinen Einfluss.

$$P_1' = P [\cos (\omega - \varphi) - \varepsilon v \sin (\omega - \varphi)]$$

$$P_2' = P [\sin (\omega - \varphi) + \varepsilon v \cos (\omega - \varphi)].$$

Für P und ω ihre Werthe eingesetzt:

$$P_1' = \frac{C}{1 + \gamma H} [M \cos \varphi - \varepsilon v (N - M \sin \varphi)],$$

$$P_2' = \frac{C}{1 + \gamma H} [N - M \sin \varphi + \varepsilon v M \cos \varphi].$$

Auch die Berücksichtigung der sogenannten Foucault'schen Ströme im Eisenkern des rotirenden Ringes führt hier zu einem von dem Clausius'schen etwas abweichenden Resultat.

Auf dieselbe Weise wie bei Clausius kann man sich auch hier überzeugen, dass die Kräfte, die inducirend auf den Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes wirken, dieselben wie die magnetisirenden, also proportional der Grösse H sind, und wie jene den Winkel ω mit der Pollinie einschliessen.

Die im rotirenden Eisenkern inducirten Ströme wirken sowohl durch ihr eigenes Moment, als auch durch ihre magnetisirende Kraft, die den Magnetismus des Eisenkerns beeinflusst.

Ihr eigenes Moment ist proportional der inducirenden Kraft, also auch der Grösse H , und der Geschwindigkeit v ; es ist also durch:

$$\eta v H$$

auszudrücken, wo η eine kleine Constante ist. Das durch ihre magnetisirende Wirkung im Eisenkern des Ringes hervorgerufene magnetische Moment wird in ähnlicher Beziehung zu dem Ausdruck $\eta v H$ stehen, wie das Moment $CN/(1 + \gamma N)$, das die drehbare Umwicklung im Eisenkern erzeugt, zur Grösse N . Es ist das fragliche Moment also gleich:

$$\frac{D \eta v H}{1 + \delta \eta v H},$$

wo die Constanten D und δ den Grössen C und γ analog sind. — Beide Momente haben dieselbe Richtung, nämlich senkrecht zur inducirenden Kraft H . Es schliesst also die Richtung des Gesamtmoments, das die Foucault'schen Ströme im Eisenkern induciren, und dessen Grösse:

$$\eta v \Pi \left(1 + \frac{D}{1 + \delta \eta v \Pi} \right)$$

ist, den Winkel $90^\circ + \omega$ mit der Pollinie ein. — Wollen wir dieses Moment in Componenten zerlegen, deren Richtungen mit der von P_1 , resp. P_2 übereinstimmen, so müssen wir es mit $-\sin(\omega - \varphi)$, resp. mit $\cos(\omega - \varphi)$ multipliciren. Addiren wir die so erhaltenen Componenten zu den Componenten P_1' und P_2' von p. 613, so erhalten wir als Componenten des endgültigen Moments des rotirenden Eisenkerns:

$$P_1'' = P_1' - \eta v \Pi \left(1 + \frac{D}{1 + \delta \eta v \Pi} \right) \sin(\omega - \varphi),$$

$$P_2'' = P_2' - \eta v \Pi \left(1 + \frac{D}{1 + \delta \eta v \Pi} \right) \cos(\omega - \varphi).$$

Setzen wir für P_1' P_2' und für ω ihre Werthe ein, so ist:

$$P_1'' = \frac{C}{1 + \gamma \Pi} [M \cos \varphi - \varepsilon v (N - M \sin \varphi)] - \eta v (N - M \sin \varphi) \left(1 + \frac{D}{1 + \delta \eta v \Pi} \right),$$

$$P_2'' = \frac{C}{1 + \gamma \Pi} [N - M \sin \varphi + \varepsilon v M \cos \varphi] + \eta v M \cos \varphi \left(1 + \frac{D}{1 + \delta \eta v \Pi} \right),$$

oder:

$$P_1'' = \frac{C}{1 + \gamma \Pi} \left\{ M \cos - \varphi v \left(\varepsilon + \frac{D}{C} \cdot \frac{1 + \gamma \Pi}{1 + \delta \eta v \Pi} \right) (N - M \sin \varphi) \right\} - \eta v (N - M \sin \varphi),$$

$$P_2'' = \frac{C}{1 + \gamma \Pi} \left\{ N - M \sin \varphi + v \left(\varepsilon + \frac{D}{C} \cdot \frac{1 + \gamma \Pi}{1 + \delta \eta v \Pi} \right) M \cos \varphi \right\} + \eta v M \cos \varphi.$$

Ersetzen wir den in der That von φ und v abhängenden Ausdruck:

$$\varepsilon + \frac{D}{C} \cdot \frac{1 + \gamma \Pi}{1 + \delta \eta v \Pi} \eta$$

durch eine als constant angenommene Grösse:

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{D}{C} \cdot \frac{1 + \gamma \Pi}{1 + \delta \eta v \Pi} \eta,$$

so ergibt sich:

$$P_1'' = \frac{C}{1 + \gamma \Pi} [M \cos \varphi - \varepsilon' v (N - M \sin \varphi)] - \eta v (N - M \sin \varphi),$$

$$P_2'' = \frac{C}{1 + \gamma \Pi} [N - M \sin \varphi + \varepsilon' v M \cos \varphi] + \eta v M \cos \varphi.$$

Die beiden letzten Gleichungen entsprechen den Clausius'schen Gleichungen Nr. 26¹⁾; sie stimmen mit diesen

1) Clausius, l. c. p. 382.

auch vollständig überein, nur ist hier stets $M \cos \varphi$ für M , und $N - M \sin \varphi$ anstatt N gesetzt. — Dass unsere Ausdrücke für P_1'' und P_2'' durch diese einfache Substitution aus den Clausius'schen hervorgehen müssen, kann man sich auch durch folgende Ueberlegung klar machen. — Es sind P_1'' und P_2'' die beiden zu einander senkrechten Componenten des magnetischen Moments im Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes, von denen P_1'' senkrecht zur Richtung der Contactlinie ist. Bei Clausius fiel deshalb die Richtung von P_1'' mit der Richtung der der Grösse M proportionalen magnetischen Kraft zusammen. Das ist jetzt nicht mehr der Fall; wir müssen also M nach den beiden Richtungen (der Contactlinie und senkrecht dazu) in Componenten zerlegen. Wir erhalten dann in der Richtung von P_1'' die Componente $M \cos \varphi$ und in der Richtung von P_2'' die Componente $-M \sin \varphi$. Die Richtung von N fällt nach wie vor mit der Componente P_2'' zusammen. In der Richtung der Contactlinie ist jetzt also die gesammte magnetisirende Kraft proportional der Grösse:

$$N - M \sin \varphi,$$

und in der dazu senkrechten Richtung der Grösse:

$$M \cos \varphi,$$

während bei Clausius in diesen Richtungen nur Kräfte proportional N , resp. M wirkten. N und M sind also durch die angegebenen Grössen zu ersetzen.

In den Formeln für Ei und T von p. 611 substituiren wir nun für die Componenten von P ihre soeben gefundenen allgemeineren Werthe, wobei zu berücksichtigen, dass in dem Ausdruck für T das Produkt $N P_1''$ durch $M P_2''$ zu ersetzen ist. Der Werth von P_2''' , der Componenten von P'' nach der Senkrechten zur Pollinie, ergibt sich auf analoge Weise wie P_1'' und P_2'' . Es ist:

$$P_2''' = \frac{C}{1 + \gamma H} [N \cos \varphi + \epsilon' v (M - N \sin \varphi)] + \eta v (M - N \sin \varphi).$$

Demnach wird:

$$T = -MNv \cos \varphi \left(h + \frac{kC}{1 + \gamma H} \right) - kM(M - N \sin \varphi) v^2 \left(\eta + \frac{\epsilon' C}{1 + \gamma H} \right),$$

$$Ei = MNv \cos \varphi \left(h + \frac{kC}{1 + \gamma H} \right) - kN(N - M \sin \varphi) v^2 \left(\eta + \frac{\epsilon' C}{1 + \gamma H} \right) - \rho i^2 v.$$

Hierin ist nach p. 608 und 609:

$$M = \frac{Ai}{1 + \alpha i} \quad \text{und} \quad N = Bi$$

und
$$H = \sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \sin \varphi}.$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für T und Ei ein, so gelangt man zu denjenigen Gleichungen, welche an Stelle der von Clausius mit I und II bezeichneten zu setzen sind.

Für grosse Stromstärken werden sich M und N bei einer kleinen Aenderung von i nur wenig ändern; sehen wir von der eintretenden Aenderung ganz ab, so können wir Ei durch einen Ausdruck von folgender Form darstellen:

$$Ei = Av \cos \varphi + Bv \frac{\cos \varphi}{1 + \gamma H} + \mathfrak{A}v^2 \sin \varphi + \mathfrak{B}v^2 \frac{\sin \varphi}{1 + \gamma H} \\ - \mathfrak{C}v^2 \frac{1}{1 + \gamma H} - \varrho vi^2 - \mathfrak{D}v^2.$$

Hier sind $A, B, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ als Constante zu betrachten, und zwar werden die Werthe der mit deutschen Buchstaben bezeichneten Constanten klein sein gegenüber den Werthen von A und B .

Für kleine Rotationsgeschwindigkeiten wird der Werth von φ , welchem das Maximum von i entspricht, einen kleinen, aber jedenfalls positiven Werth besitzen; für grössere Geschwindigkeiten wird sich die günstigste Stellung der Contactlinie im Sinne der wachsenden φ verschieben.

Zur Bestimmung des dem Maximalwerthe der Stromstärke entsprechenden Winkels φ kann man aber auch den folgenden Weg einschlagen.

Bestimmen wir die Stellung einer einzelnen Abtheilung des Pacinotti'schen Ringes in ihrer kreisförmigen Bahn durch den Winkel φ , welchen ihre Anfangsebene mit der Senkrechten zur Pollinie bildet, so wird die in der Abtheilung inducirte electromotorische Kraft dargestellt durch eine Function:

$$e = f(\varphi),$$

welche jedenfalls die Periode 2π besitzt und für zwei innerhalb dieser Periode liegende Werthe von φ verschwindet. — Bei

symmetrisch gebauten Maschinen, mit denen wir es wohl meist zu thun haben, dürfen wir annehmen, dass in den diametral gegenüberliegenden Punkten des Pacinotti'schen Ringes entgegengesetzt gleiche electromotorische Kräfte herrschen, dass also:

$$f(\varphi) = -f(\pi + \varphi)$$

ist. Diese Voraussetzungen werden übrigens von Isenbeck,¹⁾ der die Function $e = f(\varphi)$ experimentell untersucht hat, bestätigt.

Von der Selbstinduction der rotirenden Umwicklung des Ringes wollen wir vorerst absehen. — Dann ist die Summe aller electromotorischen Kräfte e während eines halben Umlaufs von einer Contactfeder bis zur anderen gleich der gesammten, in der Maschine erzeugten electromotorischen Kraft E . Ist also φ_0 der Werth von φ , der die Stellung der Contactfedern bestimmt, so ist:

$$E = \int_{\varphi_0}^{\pi + \varphi_0} f(\varphi) d\varphi.$$

Der Werth der Grenze φ_0 , für den E ein Maximum ist, ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$\frac{dE}{d\varphi_0} = -f(\varphi_0) + f(\pi + \varphi_0) = 0$$

oder:

$$f(\varphi_0) = f(\pi + \varphi_0).$$

Diese Gleichung ist mit der obigen Voraussetzung in Betreff der Function $f(\varphi)$ nur dann vereinbar, wenn:

$$f(\varphi_0) = 0$$

ist. Also macht der Werth von φ , der die Function $f(\varphi)$ zu 0 macht, die electromotorische Kraft E zu einem Maximum; d. h. die günstigste Stellung des Commutators ist diejenige, bei welcher die in einer an den Contactfedern befindlichen Leiterabtheilung erregte electromotorische Kraft gleich Null ist.

Dieser Werth von φ , für den $f(\varphi) = 0$ ist, wird aber durch den Durchmesser des Pacinotti'schen Ringes be-

1) Isenbeck, Electrotechn. Zeitschr. 4. p. 364. 1883. — Nach diesen Untersuchungen scheint $f(\varphi)$ einer Sinuscurve zu ähneln. Vgl. p. 601.

stimmt, welcher senkrecht zur Richtung der Resultirenden der inducirenden Momente steht. Um die Maximalstellung des Commutators für eine beliebig bestimmte Stromstärke i zu erhalten, müssen wir also den Werth von φ suchen, für welchen die Resultante der inducirenden Momente senkrecht zu der Contactlinie steht. Zerlegen wir daher jene Momente in je zwei Componenten parallel und senkrecht zu der Contactlinie, so muss die Summe der ersteren gleich Null sein.

Die auf eine Leiterabtheilung wirkenden inducirenden Momente sind nun erstens das von den festen Electromagneten ausgeübte, das proportional M ist und in die Richtung der Pollinie fällt, und zweitens das von dem Eisenkern des Pacinotti'schen Ringes herrührende, welches proportional der auf p. 609 bestimmten Grösse P sein wird; die Richtung des letzteren Moments schliesst mit der Pollinie den Winkel ω , also mit der Contactlinie den Winkel $\omega - \varphi$ ein. Setzt man die Summe der Componenten dieser beiden Momente parallel der Contactlinie gleich Null, so ergibt sich demnach:

$$M \sin \varphi = c P \sin (\omega - \varphi).$$

Hier ist c ein Factor, durch dessen Hinzufügung der Verschiedenheit Rechnung getragen werden soll, welche zwischen der inducirenden Wirkung des den festen Electromagneten angehörenden Momentes M und des dem Pacinotti'schen Ringe angehörenden Momentes P ohne Zweifel besteht.

Führt man für P und $\sin (\omega - \varphi)$ nach p. 609 und 610 ihre Werthe ein und setzt gleichzeitig:

$$c C = C',$$

so ergibt sich zur Bestimmung des Maximal- φ die Gleichung:

$$M (1 + \gamma \Pi) \sin \varphi = C' (N - M \sin \varphi).$$

Da in dieser Gleichung M , N und Π von i abhängig sind, so würde dieselbe mit der früher für i aufgestellten zu verbinden sein, um i und φ zu berechnen. Werden M und N als constant betrachtet, so ergibt sich für φ ein positiver Werth, welcher um so kleiner ist, je kleiner N im Vergleich zu M .

Das so zu bestimmende φ würde das Maximum von i

für eine Maschine (ohne Selbstinduction) ergeben, bei der der Eisenkern des Ringes fest, und nur seine Umwicklung allein beweglich ist. Rotirt der Eisenkern mit, so wird die Maximalstellung des Commutators durch die magnetische Trägheit des Eisens wesentlich verändert. Diese magnetische Trägheit bewirkt, wie wir p. 612 gesehen haben, dass bei schneller Rotation die magnetische Axe des Eisenkerns im Pacinotti'schen Ringe, und damit die Richtung von P um einen der Geschwindigkeit v proportionalen kleinen Winkel εv im Sinne der Rotation verschoben wird. — Trägt man diesem Umstande Rechnung, so tritt an Stelle der früheren Gleichung für φ die Gleichung:

$$M \sin \varphi = c P \sin (\omega - \varphi + \varepsilon v) = c P \sin (\omega - \varphi) + \varepsilon v c P \cos (\omega - \varphi)$$

oder:

$$M (1 + \gamma \Pi) \sin \varphi = C' (N - M \sin \varphi) + \varepsilon v C' M \cos \varphi,$$

eine Gleichung, aus welcher sich wiederum eine Vergrößerung des Winkels φ durch die magnetische Trägheit ergibt.

Auch die Induction der Umwicklung des Pacinotti'schen Ringes auf sich selbst (p. 608) hängt von der Commutatorstellung ab. Die electromotorische Kraft dieser Induction setzt Clausius¹⁾ gleich:

$$E_0 = - \rho i v.$$

Sie wird nur dadurch erregt, dass beim Uebergang der durch die Contactfedern in sich geschlossenen Abtheilungen der Umwicklung des Ringes aus dem in sich geschlossenen Zustand in die zweite Hälfte des rotirenden Leitungssystems die in ihnen herrschende Stromstärke geändert wird;²⁾ dabei entsteht erstens eine Induction der Leiterabtheilung auf sich selbst und zweitens eine Induction auf die anderen Abtheilungen.

Die Induction der betreffenden Abtheilung auf sich selbst wird gleich:

$$V_0 \left(i_0 - \frac{i}{2} \right)$$

1) Clausius, l. c. p. 364.

2) Clausius, l. c. p. 362 f.

sein, wo V_0 ihr Selbstpotential und i_0 die Stromstärke ist, die in ihr herrscht, während sie in sich selbst geschlossen ist; $i/2$ ist die Intensität in den anderen Abtheilungen der rotirenden Umwicklung.

Zur Berechnung der Induction auf die übrigen Abtheilungen brauchen wir nur die Wirkung auf diejenige zu bestimmen, die in der Richtung der Rotation der inducirenden Leiterabtheilung zunächst liegt; die Wirkungen auf alle anderen vertheilen sich symmetrisch auf beide Hälften des Ringes und heben sich auf, während der in der Rotationsrichtung zunächst gelegenen auf der anderen Seite eine in sich selbst geschlossene Abtheilung gegenüberliegt. — Ist nun V_1 das Potential der betreffenden beiden Abtheilungen aufeinander, so ist die beim Uebergang entwickelte electromotorische Kraft gleich:

$$V_1 \left(i_0 - \frac{i}{2} \right).$$

Die bei dem einmaligen Eintritt einer Leiterabtheilung in den Stromkreis entwickelte electromotorische Kraft ist also gleich:

$$e dt = - (V_0 + V_1) \left(\frac{i}{2} - i_0 \right) = - V \left(\frac{i}{2} - i_0 \right).$$

Diese electromotorische Kraft, deren Dauer auf eine sehr kurze Zeit beschränkt ist, tritt impulsartig auf, so oft eine Abtheilung aus dem in sich geschlossenen Zustande in den Stromkreis eintritt. Wir ersetzen diese impulsartige Wirkung durch eine stetige. — Die Impulse wiederholen sich immer nach Verlauf der Zeit, welche eine Abtheilung nöthig hat, sich um sich selbst zu verschieben. Somit entfällt, wenn $2n$ die Zahl der Leiterabtheilungen ist, auf die Zeit $1/2nv$ ein Impuls von der sehr kleinen Dauer dt und der Grösse:

$$- \frac{V \left(\frac{i}{2} - i_0 \right)}{dt}.$$

Setzen wir an Stelle des Impulses von der Zeitdauer dt einen solchen von der Dauer $1/2nv$, so muss seine Grösse gleich:

$$- 2nv V \left(\frac{i}{2} - i_0 \right)$$

sein. In einer Secunde findet nun $2nv$ mal der Austritt einer Abtheilung aus dem in sich geschlossenen Zustande statt, somit schliessen sich jene fingirten Impulse von der Dauer $1/2nv$ zu einer continuirlichen Wirkung aneinander, deren Betrag für eine Secunde den Werth:

$$(1) \quad E_0 = -2nvV\left(\frac{i}{2} - i_0\right)$$

besitzt. Hierin ist sowohl i_0 als auch i wesentlich von der Commutatorstellung abhängig, und ohne eine genaue Kenntniss dieser Abhängigkeit, die wir p. 616 allgemein durch die Gleichung:

$$e = f(\varphi)$$

ausgedrückt haben, ist auch der Werth von E_0 nicht zu ermitteln.

Zu einer allgemeinen Theorie, welche in jedem Falle der Wirklichkeit angepasst werden kann, gelangt man dadurch, dass man die Function $f(\varphi)$ in eine Fourier'sche Reihe entwickelt.¹⁾

$$f(\varphi) = A_1 \sin(\varphi - a) + A_2 \sin 2(\varphi - a) + A_3 \sin 3(\varphi - a) + \dots \\ + B_1 \cos(\varphi - a) + B_2 \cos 2(\varphi - a) + \dots,$$

in welcher die Grössen a , A und B Functionen der Stromstärke i sein werden.

Den Isenbeck'schen²⁾ Versuchen nach scheint man der Wirklichkeit bei manchen Maschinen schon ziemlich nahe zu kommen, wenn man nur das erste Glied dieser Entwicklung berücksichtigt, also die während der Verschiebung $d\varphi$ inducirte electromotorische Kraft durch den Ausdruck:

$$(2) \quad e dt = p \sin(\varphi - a) d\varphi^3)$$

darstellt.

Es möge nun die Contactlinie mit der Pollinie den Winkel $(\pi/2) + \varphi_0$ einschliessen; betrachtet werde eine Stellung des Ringes, in welcher der Anfang einer Windungs-

1) Die folgenden Entwicklungen bis p. 625 verdanke ich in ihrer jetzigen Form grösstentheils den gütigen Mittheilungen des Hrn. Prof. Riecke.

2) Isenbeck, Electrotechn. Zeitschr. 4. p. 366. 1883.

3) Zu dieser Annahme bin ich zuerst durch die Arbeit von Joubert (Annales de l'Ecole Norm. Sup. 10. p. 131. 1881) angeregt, der bei magneto-electrischen Maschinen ähnliche Erscheinungen findet.

abtheilung gerade mit der Contactlinie zusammenfällt. Die Anordnung sei so getroffen, dass unter diesen Umständen die Abtheilung a schon der unteren Ringhälfte angehört; die Abtheilung e bleibe in sich geschlossen, bis eine Verschiebung des Ringes um die Breite einer Abtheilung erfolgt ist.

Während die Abtheilung a in sich geschlossen ist, muss nach dem Ohm'schen Gesetz das Product ihres Widerstandes w in der Stromstärke i_0 gleich der Summe sämtlicher in der Abtheilung herrschenden electromotorischen Kräfte sein, also gleich der von aussen inducirten vermindert um die electromotorische Kraft $V_0(di_0/dt)$ der dabei auftretenden Selbstinduction. Dann hat man zur Bestimmung der in ihr herrschenden Stromstärke:

$$(3) \quad wi_0 + V_0 \frac{di_0}{dt} = p \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{n} - a\right).$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt, wenn $d\varphi/dt = 2\pi v$ ist:

$$i_0 = \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{n} - a\right) 2\pi v + Ce^{-\frac{wt}{V_0}}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten C wenden wir die Gleichung auf den Anfangszustand zur Zeit t_0 an, in welchem die Abtheilung in den sich geschlossenen Zustand eintritt; in diesem Moment ist die Stromstärke noch gleich der in einer Ringhälfte herrschenden, d. h. gleich $i/2$. Danach ergibt sich zur Bestimmung von C die Gleichung:

$$\frac{i}{2} = \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{n} - a\right) 2\pi v + Ce^{-\frac{wt_0}{V_0}}.$$

Die Stromstärke, welche nach Verschiebung um π/n erreicht wird, ist die gesuchte:

$$i_0 = \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{n} - a\right) 2\pi v + Ce^{-\frac{w}{V_0}\left(t_0 + \frac{1}{2\pi v}\right)},$$

$$i_0 = \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{n} - a\right) 2\pi v + e^{-\frac{w}{V_0} \frac{1}{2\pi v}} \left\{ \frac{i}{2} - \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{n} - a\right) 2\pi v \right\}.$$

Wir setzen $q = w/2\pi v V_0$; dann ist:

$$(4) \quad i_0 = \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - a - \frac{\pi}{n}\right) 2\pi v (1 - e^{-q}) + \frac{i}{2} \cdot e^{-q}.$$

Die Stärke des von der Maschine gelieferten Stromes kann jetzt in folgender Weise bestimmt werden.

Nach Gl. (2) ist die gesammte in der unteren Ringhälfte inducirte Kraft:

$$\sum edt = p \sum \sin(\varphi - a) d\varphi,$$

welche Summe über alle Abtheilungen des Ringes von $\varphi = \varphi_0$ bis $\varphi = \varphi_0 + \pi - (\pi/n)$ zu erstrecken ist. Verwandeln wir diese Summe in ein Integral, indem wir den Werth $\sin(\varphi - a)$ gleichmässig über die Peripherie des Kreises ausbreiten, so ist, da $d\varphi = (\pi/n)$ gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} \sum \sin(\varphi - a) &= \frac{n}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \frac{n-1}{n}\pi} \sin(\varphi - a) d\varphi \\ &= -\frac{n}{\pi} \left\{ \cos\left(\varphi_0 + \frac{n-1}{n}\pi - a\right) - \cos(\varphi_0 - a) \right\}. \end{aligned}$$

Für ein sehr grosses n wird dieser Ausdruck:

$$\sum \sin(\varphi - a) = \frac{2n}{\pi} \cos(\varphi_0 - a) + \sin(\varphi_0 - a).$$

Die electromotorische Kraft wird somit:

$$\sum edt = \frac{2n}{\pi} p \cos(\varphi_0 - a) d\varphi + p \sin(\varphi_0 - a) d\varphi.$$

Es soll hieraus der Integralwerth der electromotorischen Kraft für eine Secunde bestimmt werden. — Für eine Zeit, die der Verschiebung des Ringes um die Breite einer Abtheilung entspricht, würde die Kraft sein:

$$\sum edt = 2p \cos(\varphi_0 - a) + \frac{\pi}{n} p \sin(\varphi_0 - a).$$

Während einer ganzen Umdrehung des Ringes geht diese Verschiebung $2n$ mal, und also während einer Secunde $2nv$ mal vor sich; demnach ist die im Laufe einer Secunde in einer Ringhälfte der Maschine inducirte Integralkraft:

$$(5) \quad \sum edt = 4nvp \cos(\varphi_0 - a) + 2v\pi p \sin(\varphi_0 - a).$$

Diese Kraft ist, da die beiden Ringhälften als nebeneinander geschaltet anzusehen sind, gleich der ganzen in der Maschine herrschenden electromotorischen Kraft, vermindert um die

electromotorische Kraft der Selbstinduction. Ist also W der Gesamtwiderstand der Maschine, so ist:

$$(6) \quad Wi = 4nvp \cos(\varphi_0 - a) + 2v\pi p \sin(\varphi_0 - a) - 2nvV \left(\frac{i}{2} - i_0 \right).$$

Aus den Gleichungen (4) und (6) in Verbindung mit Gleichung (1) lässt sich nun der Werth sowohl von E_0 als auch von i bestimmen.

Führen wir in Gleichung (6) den Werth von i_0 aus Gleichung (4) ein, so ist:

$$\begin{aligned} (W + nvV)i &= 4nvp \cos(\varphi_0 - a) + 2v\pi p \sin(\varphi_0 - a) \\ &+ 2nvV \frac{p}{w} \sin\left(\varphi_0 - a - \frac{\pi}{n}\right) 2\pi v \left(1 - e^{-q}\right) + nvVi e^{-q}. \end{aligned}$$

Also haben wir zur Berechnung von i die Gleichung:

$$(7) \quad \left\{ i \left\{ W + nvV(1 - e^{-q}) \right\} = 2vp \left\{ 2n \cos(\varphi_0 - a) + \pi \sin(\varphi_0 - a) \right\} \right. \\ \left. + 4\pi v^2 V \frac{p}{w} (1 - e^{-q}) \left\{ n \sin(\varphi_0 - a) - \pi \cos(\varphi_0 - a) \right\} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nach (6) die electromotorische Kraft der Selbstinduction, wenn wir von Wi den Ausdruck:

$$4nvp \cos(\varphi_0 - a) + 2v\pi p \sin(\varphi_0 - a)$$

subtrahiren; demnach ist:

$$\begin{aligned} E_0 &= 4\pi v^2 V \frac{p}{w} (1 - e^{-q}) \left\{ n \sin(\varphi_0 - a) - \pi \cos(\varphi_0 - a) \right\} \\ &\quad - nvV(1 - e^{-q})i. \end{aligned}$$

Hierin für i sein Werth aus Gleichung (7) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} E_0 &= - \frac{nvV(1 - e^{-q})}{W + nvV(1 - e^{-q})} 2vp \left\{ 2n \cos(\varphi_0 - a) + \pi \sin(\varphi_0 - a) \right\} \\ &+ 4\pi v^2 V \frac{p}{w} (1 - e^{-q}) \left\{ n \sin(\varphi_0 - a) - \pi \cos(\varphi_0 - a) \right\} \frac{W}{W + nvV(1 - e^{-q})}. \end{aligned}$$

oder:

$$(8) \quad \left\{ E_0 = \frac{4v^2 V(1 - e^{-q})p}{\left\{ W + nvV(1 - e^{-q}) \right\} w} \left\{ n\pi \left(W - \frac{w}{2} \right) \sin(\varphi_0 - a) \right. \right. \\ \left. \left. - (\pi^2 W + n^2 w) \cos(\varphi_0 - a) \right\} \right\}.$$

Die Gleichungen (7) und (8) enthalten die vollständige Theorie der Maschine, wenn man berücksichtigt, dass in den-

selben p und a ganz allgemein als Functionen der Stromstärke aufzufassen sind. Für p wird sich, der Annahme von Clausius¹⁾ entsprechend, die Gleichung:

$$p = K \frac{i}{\kappa + i}$$

als möglich erweisen, während a nach den am Schlusse mitgetheilten Versuchen eine lineare Function von i ist. Es ist klar, dass eine Berechnung von i allgemein nicht ausführbar ist.

Die Formel (7) kann indessen jedenfalls noch weiter entwickelt werden für den Fall:

$$\varphi_0 = a.$$

Es ist der Werth von φ , für den die electromotorische Kraft e gleich Null ist, und charakterisirt nach p. 617 die Commutatorstellung, für welche — abgesehen von Selbstinduction und anderen Nebenumständen — die electromotorische Kraft der Maschine ein Maximum wird.

Da a eine Function der Stromstärke ist, so muss dabei berücksichtigt werden, dass auch φ_0 für jede andere Stromstärke eine andere Grösse besitzen wird.

Für $\varphi_0 = a$ folgt aus Gleichung (7):

$$\frac{i}{p} = \frac{4\pi v - 4\pi^2 v^2 \frac{V}{w} (1 - e^{-q})}{W + \pi v V (1 - e^{-q})}.$$

Setzen wir $p = K i / (\kappa + i)$, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa + i}{K} &= \frac{4\pi v - 4\pi^2 v^2 \frac{V}{w} (1 - e^{-q})}{W + \pi v V (1 - e^{-q})}, \\ i &= \frac{4\pi v K}{W} \cdot \frac{1 - \frac{\pi^2 v V}{n w} (1 - e^{-q})}{1 + \frac{\pi^2 v V}{n W} (1 - e^{-q})} - \kappa. \end{aligned}$$

Führt man die Division aus, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$(7') \quad i = 4\pi K \frac{v}{W} \left(1 - n V \frac{v}{W} - \frac{\pi^2 V}{n w} v \right) - \kappa.$$

1) Clausius, l. c. p. 367. Formel (12).

Diese Formel ist leicht mit den Erfahrungsthatſachen in Beziehung zu ſetzen. Sie beſtimmt die Stromſtärke für den Fall, daſs der Commutator jedesmal auf das Maximum der Intensität eingeteilt iſt. Im allgemeinen iſt an ihr die Abhängigkeit der Stromſtärke von dem Quotienten v/W zu ſehen, während ſie auch deutlich die am anderen Orte¹⁾ aufgeſtellte Behauptung begründet, daſs i nicht allein Function von v/W iſt, ſondern daſs ein gröſſeres v bei gleichem v/W eine Verminderung von i herbeiführt.

Um die günſtigſte Commutatorſtellung für eine Maſchine auf experimentellem Wege zu erhalten, bin ich folgendermaſſen verfahren:

Durch die Abwechſelung der isolirenden und Metallſtreifen war die Collectorscheibe der Maſchine in 48 nahezu gleiche Theile getheilt, da die Ringumwicklung 24 Abtheilungen hatte. Jeder dieſer Theile entſpricht einem Winkel von $7,5^\circ$. Durch eine Marke, die ich an der Collectorbürſte anbrachte, und eine zweite, mit deren Hülfe ich den Pacinotti'schen Ring in eine feſte Stellung zu dem Electromagnet bringen konnte, ermöglichte ich es, den Contacten eine genau zu beſtimmende Stellung, und alſo dem Winkel φ der Contactlinie einen beſtimmbaren Werth zu geben; durch die Eintheilung der Collectorscheibe war dieſer Winkel bis auf etwa einzelne Grade abzuleſen.

Die Maſchine wurde dann mit conſtanter Tourenzahl und conſtantem Widerſtand bei variablem φ in Gang geſetzt, und die auftretende Intensität gemeſſen. Leider lieſs es die Conſtruction der Maſchine nicht zu, den Winkel φ in ſehr weiten Grenzen zu variiren, und ſo die Abhängigkeit der Intensität von der Commutatorſtellung in ihrem ganzen Verlaufe zu ſtudiren. Uebrigens waren es auch ſehr langwierige Verſuche, denn nur eine ſehr groſſe Zahl von Beobachtungen lieſs die kleinen Differenzen in den zu beobachtenden Gröſſen exact erkennen.

1) Stern, Unterſuchungen an einer electrodynamischen Maſchine. Inauguraldiſs. Göttingen 1885. p. 14.

Die Abhängigkeit der Intensität J von φ ist im Folgenden durch einige beispielsweise herausgegriffene Tabellen gezeigt. Da es nur auf relative Messungen ankommt, so gebe ich die Intensität einfach durch den doppelten Ablenkungswinkel 2α des zu den Untersuchungen angewandten Galvanometers, der proportional der Stromstärke ist.

Es bedeuten in diesen Tabellen die Zahlen der ersten Columnne den Winkel φ in Bogengraden, die der zweiten die Tourenzahlen v , die der dritten die aufgetretenen Intensitäten, und die der vierten Columnne die durch Interpolation aus einer etwas grösseren und einer kleineren Geschwindigkeit auf einen Mittelwerth von v reducirten Ablenkungen, die der Intensität proportional sind. — Der Nullwerth von φ war durch Schätzung bestimmt worden; negative Werthe konnten nicht zur Beobachtung kommen.

Nr. 2. $v = 671,5$. — $W = 3,07$ S.-E.

φ	v	J (unreducirt)	J (reducirt)
0,00°	668,1	147,7	167,3
3,75	676,6	220,1	211,8
7,50	675,3	231,4	225,2
11,25	672,2	249,5	248,4
15,00	669,2	241,8	245,3
18,75	669,4	248,5	251,8
22,50	672,3	221,3	220,0
26,25	669,0	208,2	212,3
30,00	669,4	177,4	180,8

Nr. 4. $v = 1720,5$. — $W = 7,75$ S.-E.

11,25°	1730,5	797,8	792,6
15,00	1729,2	837,8	833,3
18,75	1726,7	850,8	847,6
22,50	1742,1	849,0 (?)	837,8 (?)
26,25	1708,2	842,5	848,9
30,00	1685,6	823,8	841,9
33,75	1726,2	831,3	828,4
37,50	1716,9	814,0	815,9

Solche Beobachtungsreihen wurden noch mehrere ausgeführt (freilich meist nur in der Nähe des vermuthlichen Maximums), und aus ihnen das Maximum $\varphi_{\max}$ graphisch interpolirt.

Eine Abhängigkeit des Winkels $\varphi_{\max}$ vom Widerstand bei gleicher Tourenzahl liess sich nicht genau erkennen;

vorausgesetzt, dass die todten Touren überschritten waren, zeigten die Versuche bei gleichem v und variablem W keine bemerkenswerthen Differenzen. Die folgende Tabelle zeigt deshalb auch nur die Abhängigkeit des Winkels $\varphi_{\max}$ von v .

$v = 495,3$	$671,5$	$1254,0$	$1720,5$
$\varphi_{\max} = 15^\circ$	$16,5^\circ$	$19,0^\circ$	$22,5^\circ$

Das Verhalten des Winkels $\varphi_{\max}$ in Bezug auf v wird hiernach durch eine Gerade gut dargestellt.

Durch diese wenigen Beobachtungen ist selbstverständlich die Untersuchung über den behandelten Gegenstand keineswegs abgeschlossen; die zuletzt mitgetheilten experimentellen Resultate sind nur als das Ergebniss von Vorversuchen zu betrachten, wie sie denn in der That nur als Hilfsbeobachtungen dienen sollten. Vielleicht finde ich später einmal Gelegenheit, mich mit der experimentellen Seite der Untersuchungen dieser Arbeit eingehender zu beschäftigen.

Hildesheim, September 1884.

IX. *Ein Beitrag zur Mechanik der Explosionen; von E. Mach und J. Wentzel.*

(Aus dem 92. Bde. der Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth., vom 16. Juli 1885; mitgetheilt von den Herren Verf.).

(Hierzu Taf. VI Fig. 11–21.)

1. Im Laufe der letzten Jahre wurden im hiesigen Institute bei verschiedenen Gelegenheiten Beobachtungen über Vorkommnisse bei Explosionen gemacht, welche uns zum Theil interessant genug erschienen, um einige besondere Versuche zum Studium dieser Erscheinungen anzustellen.

Es ist bekannt, dass manche Explosivkörper, wie Dynamit, sich durch auffallende Eigenthümlichkeiten auszeichnen. Eine explodirende Dynamitpatrone bringt z. B. eine andere, in einiger Entfernung durch Influenz¹⁾ zur Explosion, ein

1) Wir haben derartige Influenzversuche mit kleinen Knallsilberpatronen ausgeführt, welche an beiden Enden einer verkorkten Messing-