II. *Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik;*
von F. E. Neumann in Königsberg.

[Die in dieser Abhandlung enthaltenen theoretischen Resultate müssen auf Priorität resigniren, da ich in *Tom. X* der *Memoir. de l'Acad.* aus einer Inhalts-Angabe einer Abhandlung, welche Cauchy der Pariser Academie vorgelegt hat, ersehen habe, daß in dieser Abhandlung, außer anderen, dieselben Resultate bereits enthalten sind. Ich würde meine Abhandlung ganz unterdrückt haben, wenn ich nicht glaubte, daß die in ihr angewandte einfache, ich möchte sagen elementare Behandlung eines sehr schwierigen Problems auch dann noch von Interesse seyn wird, wenn die ohne Zweifel eine viel gelehrtere und allgemeinere Analyse desselben Problems enthaltende Abhandlung von Cauchy selbst im Druck erschienen seyn wird.]

§. I.

Fresnel hat in seiner Theorie der Diffraction des Lichtes (*Mémoire de l'Académie, An. 1821 et 1822*) auf dem Wege des Experiments bewiesen, daß die Bewegung, welche ein Theilchen eines Mediums, in welchem vibrirende Bewegungen stattfinden, zur Zeit t erhält, die Resultante aller derjenigen Bewegungen ist, welche nach diesem Theilchen geschickt werden von jedem zur Zeit $t - \alpha$ bewegten Theilchen des Mediums. Es ist dieß das Princip von Huyghens — wodurch dieser zuerst die Refraction und Reflexion des Lichtes in der Undulations-Theorie erklärte, — oder richtiger, wenn man will, das Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen angewandt auf die Wellenbewegung in einem elastischen Medium. In der Theorie der Diffraction hat Fresnel zugleich gelehrt die Resultante aller der Bewegungen zu finden, die nach einem Theilchen eines elastischen Mediums von einer beliebigen Anzahl und auf eine beliebige Weise ge-

liegenden Erschütterungspunkten gleicher Schwingungsdauer, d. h. von Theilchen, welche nach dem Gesetz der Pendelbewegungen um ihre Gleichgewichtslage mit gleicher Schwingungsdauer oscilliren, gesandt werden; diese Untersuchung bildet den wesentlichsten Inhalt der Theorie der Interferenz.

Fresnel hat ferner bewiesen, oder aus dem von ihm Bewiesenen folgt unmittelbar folgendes Theorem:

Wenn die verschiedenen Erschütterungspunkte, von welchen aus die *vibrirenden* Bewegungen in dem Medium sich fortpflanzen, auf einer stetigen Fläche liegen, so ist diejenige Fläche, auf welcher die *gleichzeitig* bewegten Theilchen des Mediums liegen (d. i. *die Wellenfläche*), die Enveloppe aller derjenigen Flächen, auf welchen die zu derselben Zeit bewegten Theilchen liegen würden, wenn jeder der Erschütterungspunkte nur einzeln vorhanden gewesen wäre, d. h. *die resultirende Wellenfläche ist die Enveloppe der Wellenflächen jedes einzelnen Erschütterungspunktes*. Dieses Theorem setzt eine gleiche Schwingungsdauer für alle Erschütterungspunkte voraus, es gilt aber, sey es daß die gegebenen Erschütterungspunkte ihre Schwingungen gleichzeitig anfangen, oder daß der Anfang der Schwingung in jedem Erschütterungspunkte irgend ein stetiges Gesetz der Zeit befolgt; im letzteren Fall kann man statt der gegebenen Fläche, worauf die sich nicht in derselben Phase befindlichen Erschütterungspunkte liegen, immer eine andere construiren, worauf man sie sich als im Zustande der gleichzeitig anfangenden Schwingung liegend denken kann.

Mittelst dieses Theorems ist die allgemeine Untersuchung über die Wellenbewegung in einem elastischen Medium zurückgeführt auf die Untersuchung des sehr einfachen Falls der Wellenbewegung, die von einem Erschütterungspunkte aus in dem Medium erregt wird. Die allgemeine Theorie der Refraction und Reflexion des Lichtes, welche in Beziehung auf die Richtung des gebroche

nen und reflectirten Strahls allein von der Lage der Wellenfläche in jedem der beiden an einander gränzenden Medien abhängt, ist mittelst dieses Theorems reducirt auf die Untersuchung der *Wellenfläche von einem Erschütterungspunkte aus* in jedem der beiden Medien.

Die Wellenfläche, hervorgebracht von *einem* Erschütterungspunkte, soll, dem Gebrauch gemäß, schlechtbin die Wellenfläche heißen. Die Wellenfläche in nicht krystallinischen homogenen Medien ist eine Kugelfläche, d. h. jeder Impuls, der dem Medium von dem Erschütterungspunkte mitgetheilt wird, pflanzt sich nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort; diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist in den Krystall-Medien nach den verschiedenen Richtungen verschieden — und daher kann die Wellenfläche hier nicht mehr eine Kugelfläche seyn.

Diese Form der Wellenfläche ist es, zufolge des Gesagten, welche aus den Gleichungen der Mechanik für die vibrirenden Bewegungen in elastischen krystallinischen Medien gesucht werden muß, wenn das Problem der Refraction und Reflexion des Lichtes gelöst werden soll. Aber das Problem der Refraction und Reflexion auf diese sehr einfache Frage nach der Gestalt der Wellenfläche reducirt, bietet für die Analysis noch große Schwierigkeit, weil die Beantwortung dieser Frage von Differential-Gleichungen mit vier unabhängigen Veränderlichen abhängt.

Eine sehr scharfsinnige geometrische Bemerkung von Fresnel in seiner Theorie der doppelten Strahlenbrechung vermindert indess diese Schwierigkeit auf das Aeußerste; dieser zufolge braucht man nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu kennen von ebenen unbegrenzten Wellenflächen in den verschiedenen Lagen, um daraus mittelst der Theorie der Enveloppen die Gestalt der Wellenfläche herzuleiten. Wenn alle Theile, welche auf einer unbegrenzten Ebene liegen, gleichzeitig ihre Schwingungen anfangen und beenden, in derselben Rich-

tung und mit derselben Geschwindigkeit diese ausführen, so ist die Bewegung, ihrer Richtung und Intensität nach, welche irgend ein Theilchen des unbegrenzten Mediums erhält, offenbar nur eine Function der Entfernung dieses Theilchen von der Ebene, auf welcher die Erschütterungspunkte liegen, und von der Zeit, oder, um dasselbe anders auszudrücken, die von den auf der Ebene liegenden Erschütterungspunkten resultirende Wellenfläche ist wiederum eine Ebene. Diese Ebene ist aber eine Envelope aller der Wellenflächen, die von jedem der auf der gegebenen Ebene liegenden Erschütterungspunkte aus sich gebildet haben würden, wenn er allein vorhanden gewesen wäre — sie ist also die Tangentialebene aller dieser Wellenflächen. — Dieser Satz ist wahr, welches auch die Lage der Ebene der Erschütterungspunkte im Medium sey. Denkt man sich diese Ebene um denselben Punkt A in beliebige Lagen gedreht — die jedesmal resultirende Wellenfläche sämmtlicher Erschütterungspunkte ist nothwendig immer die Tangentialebene an der Wellenfläche des Erschütterungspunktes A , der allen diesen Erschütterungsebenen gemeinschaftlich ist. Es hat keine Schwierigkeiten, aus den bekannten Lagen der Tangentialebenen einer Fläche diese selbst zu finden. Das Problem der Wellenfläche um einen Erschütterungspunkt reducirt sich also auf das Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von ebenen unbegrenzten Wellenflächen, die eine beliebige Lage haben. Diefes ist die einfachste Frage für die analytische Behandlung der Gleichungen, welche die Theorie der vibrirenden Bewegungen in einem elastischen Medium enthalten, weil in diesem Falle die Differential-Gleichungen, von welchen die Beantwortung der Frage abhängt, nur zwei unabhängige Veränderliche enthalten.

§. 2.

Feste Körper unterscheiden sich von flüssigen und gasförmigen Medien in Hinsicht der inneren Beweglich-

keit und Verschiebbarkeit ihrer Theilchen erst dann, wenn die Bewegung oder Verschiebung ihrer Theilchen so groß ist, daß eine neue Gleichgewichtslage eintritt; so lange die Verschiebungen kleiner sind als die Sphäre des stabilen Gewichts, fällt der Unterschied zwischen Festen, Flüssigen und Gasförmigen weg. Für diese Arten von Bewegungen gelten also dieselben Gleichungen, welches auch der Cohäsionszustand des Mediums ist. Es ist mehr als wahrscheinlich, daß zu dieser Art innerer Bewegungen diejenigen gerechnet werden müssen, worin, nach der Undulationstheorie, das Licht besteht. Für die Lichtundulation ist demnach ein Unterschied der Cohäsionszustände nicht vorhanden, wie dieß z. B. für die Schallschwingungen der Fall ist, sondern es gelten für jene Undulationen nur die Gleichungen, welche sich auf die innere vibrirende Bewegung eines festen Mediums beziehen, da diejenigen für vibrirende Bewegungen in flüssigen Medien, die hydrodynamischen Gleichungen, wesentlich die Verrückung der vibrirenden Theilchen größer als die Sphäre des stabilen Gleichgewichts voraussetzen. (*Confer. Fresnel, Ann. de Ch. T. XVII.*)

Navier (*Mém. de l'Acad. An. 1821*) hat zuerst die Gleichungen für die kleinen Bewegungen in festen elastischen Medien aufgestellt; zum Grunde liegt diesen Gleichungen die Voraussetzung, daß die durch irgend eine Verrückung der Theile des Mediums hervorgerufenen elastischen Kräfte, durch welche das verrückte Theilchen in seine Gleichgewichtslage zurückgezogen wird, resultiren von den anziehenden und abstoßenden Kräften der umgebenden Theilchen. Die Wirkung jedes dieser umgebenden Theilchen auf das verrückte ist proportional der Größe, um welche sich ihre Entfernung verändert hat, und proportional einer Function ihrer Entfernung selbst, von der Beschaffenheit, daß sie gleich Null wird, wenn diese Entfernung einen irgend merklichen Werth erhält; wenn $f(\varrho)$ eine solche Function der Entfernung ϱ zweier Theilchen

vorstellt, $\Delta \rho$ die Veränderung dieser Entfernung, so ist $\Delta \rho f(\rho)$ die Wirkung, welche diese zwei Theilchen auf einander ausüben. Diese Voraussetzung, worauf die Gleichungen von Navier beruhen, gilt nur bei unkrystallinischen Medien; bei krystallinischen Medien muß man noch eine neue Hypothese hinzufügen, nämlich, daß die gegenseitige Wirkung zweier Theilchen zugleich eine Function ist der Winkel, die die Richtung der Entfernung mit gewissen in der krystallinischen Structur gegebenen Linien bildet. Es sey F diese Function, so ist also die gegenseitige Wirkung zweier Theilchen $F \cdot f(\rho) \Delta \rho$.

Alle krystallinische Structur, ausgenommen diejenige der hemiëdrischen Gestalten, ist von der Art, daß das Medium durch drei auf einander senkrechte Ebenen in jedem Punkte in acht gleiche, und in Beziehung auf jede der Ebenen symmetrisch gelegenen Theile getheilt wird. F ist eine Function der Winkel, welche die Richtung der Entfernung der beiden Theilchen, welche auf einander wirken, mit den Durchschnitten der drei senkrechten Ebenen bildet; diese Winkel seyen a, b, c . Die Function F muß der Art seyn, daß ihr Werth ungeändert bleibt, wenn diese Winkel sich in $180^\circ \pm a, 180^\circ \pm b, 180^\circ \pm c$ verwandeln, sie muß also eine Function der graden Potenzen der Sinusse oder Cosinusse dieser Winkel seyn. Dieß ist Alles, was man in Beziehung auf diese Function aus dem allgemeinen Begriff der krystallinischen Structur ableiten kann. Wie sich diese Function für die einzelnen Krystallabtheilungen specificirt, wird weiter unten bemerkt werden.

Mit Hülfe dieser neuen Hypothese für krystallinische Medien erhält man auf demselben Wege, auf welchem Navier die Gleichungen für nicht krystallinische Medien erhalten hat, die folgenden Gleichungen, worin die Theorie der vibrirenden Bewegungen in krystallinischen Medien enthalten ist.

Es seyen die Ordinaten-Axen parallel den Durch-

schnitten der drei erwähnten senkrechten Ebenen in jedem Krystall-Medium; es seyen x, y, z die Ordinaten irgend eines Theilchen des Medium in seinem natürlichen, ruhigen Zustand; $x+u, y+v, z+w$ seyen seine Coordinaten in dem verrückten Zustand, wo u, v, w , welche die Verrückung parallel den Coordinaten-Axen darstellen, Functionen von x, y, z sind. Es bedeutet t die Zeit und E die Dichtigkeit des Mediums, alsdann gilt für jeden Punkt im Inneren, wenn keine beschleunigenden Kräfte auf ihn wirken:

$$\begin{aligned}
 E \frac{d^2 u}{dt^2} &= D \frac{d^2 u}{dx^2} + A'' \frac{d^2 u}{dy^2} + A \frac{d^2 u}{dz^2} \\
 &\quad + 2 A'' \frac{d^2 v}{dx dy} + 2 A \frac{d^2 w}{dx dz} \\
 E \frac{d^2 v}{dt^2} &= A'' \frac{d^2 v}{dx^2} + C \frac{d^2 v}{dy^2} + A' \frac{d^2 v}{dz^2} \\
 &\quad + 2 A'' \frac{d^2 u}{dx dy} + 2 A' \frac{d^2 w}{dy dz} \quad (1) \\
 E \frac{d^2 w}{dt^2} &= A \frac{d^2 w}{dx^2} + A' \frac{d^2 w}{dy^2} + B \frac{d^2 w}{dz^2} \\
 &\quad + 2 A \frac{d^2 u}{dx dz} + 2 A' \frac{d^2 v}{dy dz}
 \end{aligned}$$

Wenn das Medium, in welchem die Bewegungen stattfinden, ein begrenztes ist, so giebt es noch Gleichungen, welchen die Functionen u, v, w an der Gränze des Mediums genügen müssen — die ich unterlasse anzugeben, da sie nicht gebraucht werden zu dem vorgesetzten Zweck, nämlich die Gesetze der Fortpflanzung der vibrierenden Bewegung in einem unbegrenzten Medium aufzufinden.

Die sechs Größen A, A', A'', B, C, D , sind Constante, und von der Natur des Medium abhängig. Wie diese durch Compression der krystallinischen Substanz in verschiedenen Richtungen und dadurch entstehenden Veränderungen in den Neigungen der Structur-Ebenen (Blätterdurchgänge etc.), oder künstlich geschnittenen Ebenen

können bestimmt werden, soll in einem andern Aufsatz gezeigt werden *). — Hier ist es aber nöthig, die theoretische Bedeutung dieser Constanten näher anzugeben, um daraus ihre relativen Werthe für die einzelnen Abtheilungen der krystallinischen Substanzen herzuleiten. Es bedeute dm das Differential der Oberfläche einer Kugel, die um einen Punkt des Medium mit dem Halbmesser r beschrieben ist; a, b, c seyen die Winkel, die irgend ein Radius dieser Kugel mit den drei Coordinaten-Axen bildet, F habe die oben angegebene Bedeutung; dann ist:

$$\begin{aligned} A &= p \int dm F \cos^2 a \cos^2 c & B &= p \int dm F \cos^2 b \cos^2 c \\ (II) \quad A_1 &= p \int dm F \cos^2 a \cos^2 c & C &= p \int dm F \cos^2 a \cos^2 b \\ A_{11} &= p \int dm F \cos^2 a \cos^2 b & D &= p \int dm F \cos^2 b \cos^2 c \end{aligned}$$

wo p eine von der Natur des Medium unabhängige, allein von der Natur der oben erwähnten Function $f(\rho)$ abhängige Gröfse ist. Die Integration ist in Beziehung auf die ganze Kugelfläche auszuführen.

Aus diesen Werthen der Constanten ergibt sich:

1) Für nicht krystallinische Medien, wo F constant ist, wenn $\frac{4}{3} p F \pi = L$ gesetzt wird:

$$A = A_1 = A_{11} = \frac{1}{3} B = \frac{1}{3} C = \frac{1}{3} D = L,$$

und die Gleichungen (I) reduciren sich auf die Navierschen Gleichungen.

2) Für krystallinische Substanzen vom regulären System ist F dieselbe Function von a , als von b und von c ; daher:

$$A = A_1 = A_{11} \text{ und } B = C = D.$$

*) Es ist nicht meine Meinung, daß die auf diese Weise gefundenen numerischen Werthe dieser Constanten, welche zusammenfallen mit denjenigen, welche sich aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Schallwellen ableiten lassen, identisch sind mit denjenigen, welche aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtwellen abgeleitet werden — wohl aber ist meine Meinung, daß zwischen den Werthen dieser Constanten, die auf diesen zweierlei Wegen erhalten werden, ein Zusammenhang stattfindet, wie er in den Erscheinungen der comprimierten unkrystallinischen durchsichtigen Substanzen angedeutet ist.

3) Für die Abtheilung der viergliedrigen Systeme ist F dieselbe Function von a und b ; daher:

$$A=A_1 \text{ und } C=D.$$

4) In den krystallinischen Medien, deren Krystallformen zur Abtheilung der sechsgliedrigen Systeme gehören, sind es drei in einer Ebene liegende, sich unter 60° schneidende Linien, und eine vierte gegen diese senkrechte Linie, auf welche die Symmetrie der Structur sich bezieht. F ist hier also näher bestimmt eine gleiche Function der Winkel, welche eine beliebige Richtung mit den drei in einer Ebene liegenden Axen: α , α_1 , α_2 bildet. Unser rechtwinkliges Coordinaten-System denken wir uns so gelegt, daß z und x zusammenfallen mit γ (d. i. die vierte auf jene drei senkrecht stehende Dimension) und α , so daß γ also den Winkel zwischen α_1 und α_2 halbirt; die Winkel, welche irgend eine Richtung mit den Axen α , α_1 , α_2 bildet, seyen a , a_1 , a_2 , und mit γ oder z bilde sie den Winkel c . Die beiden Winkel a und c sind dieselben, welche in den Ausdrücken II der Constanten vorkommen; der dort gebrauchte Winkel b aber muß durch a und a_1 bestimmt werden, es ist:

$$\sqrt{3} \cos b = \cos a_1 + \cos a_2 \\ \cos a_2 - \cos a_1 + \cos a = 0$$

und daher

$$\cos^2 b = \frac{2 \cos^2 a_2 + 2 \cos^2 a_1 - \cos^2 a}{3}$$

Da nun F eine gleiche Function von a , a_1 und a_2 ist, so erhält man, wenn in (II) statt $\cos^2 b$ sein Werth gesetzt wird:

$$A_1 = A, \quad C = D,$$

woraus ersichtlich wird, daß in der Fortpflanzung der vibrirenden Bewegungen in krystallinischen Substanzen von den sechsgliedrigen und viergliedrigen Systemen kein Unterschied stattfindet.

Die nähere Beschaffenheit der Function F in den hemiëdrischen Gestalten, namentlich in den merkwürdigen hemiëdrischen Gestalten des Quarzes, soll an einem

anderen Orte untersucht werden; ich bemerke hier nur, daß für Medien solcher hewiëdrischen Gestalten gar nicht mehr die Gleichungen (I) anwendbar sind, weil in Beziehung auf diese Medien die diesen Gleichungen zum Grund gelegte Supposition, nämlich die der symmetrischen Theilbarkeit des Mediums durch drei auf einander senkrechte Ebenen nicht mehr gilt.

§. 3.

Die Gleichungen (I) enthalten die Theorie der Wellenbewegung in einem unbegränzten Medium; die Aufgabe der Integration besteht in diesem Fall darin, drei Functionen u , v , w von x , y , z , t zu finden, welche dem System der Gleichungen (I) genügen, und von der Art sind, daß für einen bestimmten Zeitmoment, z. B. für $t=0$, sowohl u , v , w gleich sind den gegebenen Functionen U , V , W , als auch $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ gleich sind den gegebenen Functionen U' , V' , W' ; es bedeuten U , V , W und U' , V' , W' die anfänglichen gegebenen Verrückungen und Geschwindigkeiten in den Richtungen der drei Coordinaten-Axen. — Die Functionen, welche diese drei Bedingungen erfüllen, enthalten die vollständige Lösung des vorliegenden Problems.

Die anfänglichen Verrückungen und Geschwindigkeiten seyen von der Art, daß alle Theilchen, welche auf einer bestimmten gegebenen Ebene liegen, eine gleiche anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit haben, und daß diese für alle andere Theilchen im anfänglichen Zustand nur eine Function der Entfernung von der gegebenen Ebene seyen — alsdann ist für sich klar, daß auch für jeden folgenden Zeitmoment die Verrückungen und Geschwindigkeiten nur eine Function der Zeit und der Entfernung von der gegebenen Ebene seyn können, d. h. daß u , v , w nur Functionen von ρ und t seyn können, wenn t die Zeit und ρ die Entfernung irgend eines Punktes von dieser Ebene bedeuten.

Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten in die gegebene Ebene, nennen, wie gesagt, ϱ die Entfernung eines Punktes von ihr, nennen α , β , γ die Cosinusse der drei Winkel, welche ϱ mit den Coordinaten x, y, z bildet, so daß $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $x = \alpha\varrho$, $y = \beta\varrho$, $z = \gamma\varrho$ und $\varrho = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ist; es ist also daun:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u}{d\varrho^2} \alpha^2, \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^2 u}{d\varrho^2} \beta^2, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{d^2 u}{d\varrho^2} \gamma^2 \text{ etc. etc.}$$

Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (I) in folgende:

$$\begin{aligned} E \frac{d^2 u}{dt^2} &= (D\alpha^2 + A_{\alpha}\beta^2 + A\gamma^2) \frac{d^2 u}{d\varrho^2} \\ &\quad + 2A_{\alpha}\alpha\beta \frac{d^2 v}{d\varrho^2} + 2A\alpha\gamma \frac{d^2 w}{d\varrho^2} \\ E \frac{d^2 v}{dt^2} &= 2A_{\alpha}\alpha\beta \frac{d^2 u}{d\varrho^2} + (A_{\alpha}\alpha^2 + C\beta^2 + A\gamma^2) \frac{d^2 v}{d\varrho^2} \\ &\quad + 2A_{\beta}\beta\gamma \frac{d^2 w}{d\varrho^2} \\ E \frac{d^2 w}{dt^2} &= 2A\alpha\gamma \frac{d^2 u}{d\varrho^2} + 2A_{\beta}\beta\gamma \frac{d^2 v}{d\varrho^2} \\ &\quad + (A\alpha^2 + A_{\beta}\beta^2 + B\gamma^2) \frac{d^2 w}{d\varrho^2} \end{aligned} \quad (III)$$

Das Integral dieser Gleichungen läßt sich unter endlicher Form erhalten. Man setze:

$$u = M\varphi(\varrho - mt)$$

$$v = N\varphi(\varrho - mt)$$

$$w = P\varphi(\varrho - mt),$$

wo φ eine willkürliche Function von $(\varrho - mt)$ bedeutet. Werden diese Werthe von u, v, w in (III) gesetzt, so erhält man als Bedingungsgleichungen, denen m, M, N, P genügen müssen:

$$\begin{aligned} EMm^2 &= (D\alpha^2 + A_{\alpha}\beta^2 + A\gamma^2) M + 2A_{\alpha}\alpha\beta N \\ &\quad + A\alpha\gamma P \\ ENm^2 &= 2A_{\alpha}\alpha\beta M + (A_{\alpha}\alpha^2 + C\beta^2 + A\gamma^2) N \\ &\quad + 2A_{\beta}\beta\gamma P \\ EPm^2 &= 2A\alpha\gamma P + 2A_{\beta}\beta\gamma N \\ &\quad + (A\alpha^2 + A_{\beta}\beta^2 + B\gamma^2) P \end{aligned} \quad (IV)$$

Durch Elimination von MNP aus diesen Gleichungen erhält man zur Bestimmung von m folgende Gleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} (D\alpha^2 + A''\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2) \\ (A''\alpha^2 + C\beta^2 + A_1\gamma^2 - Em^2) \\ (A\alpha^2 + A_1\beta^2 + B\gamma^2 - Em^2) \\ -4(D\alpha^2 + A''\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2)A_1^2\beta^2\gamma^2 \\ -4(A''\alpha^2 + C\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2)A_1^2\alpha^2\gamma^2 \\ -4(A\alpha^2 + A_1\beta^2 + B\gamma^2 - Em^2)A''^2\alpha^2\beta^2 \\ +16AA_1A''\alpha^2\beta^2\gamma^2 \end{array} \right\} = 0 \quad (V)$$

Aus der Gleichung (V) ersieht man, daß m^2 von einer cubischen Gleichung abhängt, also drei Werthe hat; daß folglich m sechs Werthe hat, von denen die eine Hälfte von der anderen sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet; es seyen diese Wurzeln von (V): $\pm m'$, $\pm m''$, $\pm m'''$. Aus (IV) bestimmen sich N und P durch M und m^2 , so daß $N = \nu M$ und $P = \omega M$ wird, wo ν und ω abhängen von m^2 . Man erhält also für N und P dreierlei Werthe, entsprechend den dreierlei Werthen von m^2 ; der Werth von M bleibt willkürlich. Wir haben also:

$$\begin{array}{ll} N = \nu_1 M_1 & P = \omega_1 M_1 \\ N = \nu'' M'' & P = \omega'' M'' \\ N = \nu''' M''' & P = \omega''' M''' \end{array} \quad (VI)$$

wo ν_1 , ω_1 , ν'' , ω'' , ν''' , ω''' entsprechen den m_1^2 , m''^2 und m'''^2 .

Die willkürliche Function φ kann für jedes m eine andere seyn, so daß wir für u , ν , ω sechs verschiedene particuläre Werthe erhalten, welche den Gleichungen (III) genügen, nämlich:

$$\begin{array}{lll} u = M_1 \varphi_1(\varrho - m_1 t) & \nu = \nu_1 M_1 \varphi_1(\varrho - m_1 t) & \omega = \omega_1 M_1 \varphi_1(\varrho - m_1 t) \\ u = M_1 \psi_1(\varrho + m_1 t) & \nu = \nu_1 M_1 \psi_1(\varrho + m_1 t) & \omega = \omega_1 M_1 \psi_1(\varrho + m_1 t) \\ u = M'' \varphi''(\varrho - m'' t) & \nu = \nu'' M'' \varphi''(\varrho - m'' t) & \omega = \omega'' M'' \varphi''(\varrho - m'' t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

wo φ_1 , φ'' , φ''' , ψ_1 , ψ'' , ψ''' sechs verschiedene willkürliche Functionen bedeuten. Die Summe dieser particulären

ren Werthe von u , von v , und von w wird das vollständige Integral der Gleichung (III) seyn. Setzen wir:

$$\begin{aligned}\varphi_i(\varrho - m_i t) + \psi_i(\varrho + m_i t) &= S_i \\ \varphi_u(\varrho - m_u t) + \psi_u(\varrho + m_u t) &= S_u \\ \varphi_m(\varrho - m_m t) + \psi_m(\varrho + m_m t) &= S_m\end{aligned}\quad (\text{VII})$$

so haben wir also als vollständiges Integral von (III):

$$\begin{aligned}u &= M_i S_i + M_u S_u + M_m S_m \\ v &= v_i M_i S_i + v_u M_u S_u + v_m M_m S_m \\ w &= w_i M_i S_i + w_u M_u S_u + w_m M_m S_m.\end{aligned}\quad (\text{VIII})$$

Dies ist in der That das vollständige Integral, denn es genügt den Gleichungen (III), und enthält sechs willkürliche Functionen, welche so bestimmt werden können, daß dadurch der Anfangszustand dargestellt werden kann, d. h. daß für $t=0$, $u=U$, $v=V$, $w=W$ und $\frac{du}{dt}=U$, $\frac{dv}{dt}=V$, $\frac{dw}{dt}=W$, wird.

Bezeichnen wir mit (S_i) den Werth von S_i für $t=0$, d. h. setzen wir:

$$(S_i) = \varphi_i(\varrho) + \psi_i(\varrho) \quad (\text{VIII a.})$$

und bedeuten (S_u) , (S_m) dasselbe für S_u und S_m ; bezeichnen wir ferner mit $\left(\frac{dS_i}{dt}\right)$ den Werth von $\frac{dS_i}{dt}$ für $t=0$, oder, was dasselbe ist, da

$$\frac{d \cdot \varphi_i(\varrho - m_i t)}{dt} = -m_i \frac{d \cdot \varphi_i(\varrho - m_i t)}{d\varrho}$$

ist, und

$$\frac{d \cdot \psi_i(\varrho + m_i t)}{dt} = m_i \frac{d \cdot \psi_i(\varrho + m_i t)}{d\varrho}$$

setzen wir:

$$\left(\frac{dS_i}{dt}\right) = m_i \left(\frac{d\psi_i(\varrho)}{d\varrho} - \frac{d\varphi_i(\varrho)}{d\varrho}\right) \quad (\text{IX})$$

und geben wir $\left(\frac{dS_i}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dS_m}{dt}\right)$ dieselbe Bedeutung in Beziehung auf ψ_u , φ_u und ψ_m , φ_m , so erhalten wir zur Bestimmung von (S_i) . . . und $\left(\frac{dS_i}{dt}\right)$. . . folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} U &= M_i(S_i) + M_u(S_u) + M_{uu}(S_{uu}) \\ V &= v_i M_i(S_i) + v_u M_u(S_u) + v_{uu} M_{uu}(S_{uu}) \\ W &= \omega_i M_i(S_i) + \omega_u M_u(S_u) + \omega_{uu} M_{uu}(S_{uu}) \end{aligned} \quad (X)$$

$$\begin{aligned} U_i &= M_i\left(\frac{dS_i}{dt}\right) + M_u\left(\frac{dS_u}{dt}\right) + M_{uu}\left(\frac{dS_{uu}}{dt}\right) \\ V_i &= v_i M_i\left(\frac{dS_i}{dt}\right) + v_u M_u\left(\frac{dS_u}{dt}\right) + v_{uu} M_{uu}\left(\frac{dS_{uu}}{dt}\right) \\ W_i &= \omega_i M_i\left(\frac{dS_i}{dt}\right) + \omega_u M_u\left(\frac{dS_u}{dt}\right) + \omega_{uu} M_{uu}\left(\frac{dS_{uu}}{dt}\right) \end{aligned} \quad (XI)$$

Aus (X) bestimmt man die drei Unbekannten $M_i(S_i)$, $M_u(S_u)$, $M_{uu}(S_{uu})$ durch U , V , W , $v_i \dots \omega_i \dots$ und aus (XII) die drei Unbekannten $M_i\left(\frac{dS_i}{dt}\right)$, $M_u\left(\frac{dS_u}{dt}\right)$, $M_{uu}\left(\frac{dS_{uu}}{dt}\right)$ durch U_i, V_i, W_i , $v_i \dots \omega_i \dots$, indem man diese Gleichungen vom ersten Grade auflöst. Nun hat man nach (VIII a.) und (IX):

$$\begin{aligned} (S') &= \psi_i \varrho + \varphi' \varrho \\ \frac{1}{m_i} \left(\frac{dS_i}{dt} \right) &= \frac{d\psi_i \varrho}{d\varrho} - \frac{d\varphi' \varrho}{d\varrho} \end{aligned}$$

oder statt der letzteren:

$$\frac{1}{m_i} \int \frac{dS_i}{dt} d\varrho = \psi_i \varrho - \varphi' \varrho.$$

Man hat also:

$$\begin{aligned} \psi_i \varrho &= \frac{1}{2} (S_i) + \frac{1}{2m_i} \int \left(\frac{dS_i}{dt} \right) d\varrho \\ \varphi' \varrho &= \frac{1}{2} (S_i) - \frac{1}{2m_i} \int \left(\frac{dS_i}{dt} \right) d\varrho, \end{aligned}$$

wodurch die willkürlichen Functionen ψ_i und φ' vollständig durch (S_i) und $\left(\frac{dS_i}{dt}\right)$ bestimmt sind; auf dieselbe Weise sind $\varphi_{ii}(\varrho)$, $\psi_{uu}(\varrho)$ und $\varphi_{uu}(\varrho)$, $\psi_{uu}(\varrho)$ durch S_{uu} , $\left(\frac{dS_{uu}}{dt}\right)$ und S_{uu} , $\left(\frac{dS_{uu}}{dt}\right)$ bestimmt. Wenn in den gefundenen Functionen $\varphi, \psi_i \dots$ statt ϱ respective gesetzt wird

$(\rho - m, t)$ und $(\rho + m, t)$. . . , diese dann in (VII) in den Werth von S_i . . . substituirt, diese so bestimmten Werthe von S_i . . . in (VIII) gesetzt werden, so hat man die vollständige Lösung des vorgelegten Problems.

§. 4.

Der anfängliche Zustand des Mediums sey von der Art, dafs nur diejenigen Theilchen, welche auf der Ebene, deren Normale mit den Coordinaten-Axen Winkel bildet, deren Cosinusse α , β , γ sind, und die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, eine Verrückung erlitten haben und eine Geschwindigkeit besitzen. Alsdann sind u , v , w gleich Null für alle Werthe von ρ , ausgenommen für $\rho = 0$; es werden also auch $(S) \dots \left(\frac{dS}{dt} \right) \dots$

und deshalb auch $\varphi, \rho \dots \psi, \rho \dots$ für alle Werthe von ρ , ausgenommen für $\rho = 0$, verschwinden; daher können $\varphi(x - m, t) \dots \psi(x + m, t) \dots$ nur Werthe haben, wenn die unter dem Function-Zeichen stehende Gröfsen $= 0$ sind. Also $\varphi(\rho - m, t)$ hat nur einen Werth, wenn $\rho - m, t = 0$, $\psi(\rho + m, t)$ nur einen Werth, wenn $\rho + m, t = 0$ u. s. w.

Zu irgend einer Zeit werden also die in dem Medium ursprünglich erregten in der gegebenen Ebene liegenden Verrückungen und Geschwindigkeiten der Theilchen sich auf sechs von einander verschiedenen Ebenen befinden, die parallel mit der ursprünglichen Ebene sind, und deren Entfernung von ihr sind:

$$\rho = \pm m, t$$

$$\rho = \pm m'', t$$

$$\rho = \pm m''', t.$$

Man sieht also wie die ursprünglichen in *einer* Ebene gelegenen Verrückungen und Impulse in dem Medium sechs Wellenebenen erregen, von denen drei sich vorwärts und drei sich rückwärts bewegen; die drei auf derselben Seite liegenden Wellenebenen schreiten fort mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten m , m'' , m''' . — Die
Ver-

Verrückungen in (VIII) u , v , w zerfallen demnach für die drei auf der positiven Seite fortschreitenden Wellenebenen in:

Erste Wellenebene.	Zweite Wellenebene.
$u = M_i \varphi_i (\varrho - m_i t)$	$u = M_u \varphi_u (\varrho - m_u t)$
$v = v_i M_i \varphi_i (\varrho - m_i t)$	$v = v_u M_u \varphi_u (\varrho - m_u t)$
$w = w_i M_i \varphi_i (\varrho - m_i t)$	$w = w_u M_u \varphi_u (\varrho - m_u t)$

Dritte Wellenebene.	
$u = M_{iii} \varphi_{iii} (\varrho - m_{iii} t)$	
$v = v_{iii} M_{iii} \varphi_{iii} (\varrho - m_{iii} t)$	(XII)
$w = w_{iii} M_{iii} \varphi_{iii} (\varrho - m_{iii} t)$	

Die Richtung der Verrückungen in der ersten Wellenebene bildet mit den drei Ordinaten-Axen x , y , z Winkel, deren Cosinusse:

$$\frac{1}{\sqrt{1+v_i^2+w_i^2}} \quad \frac{v_i}{\sqrt{1+v_i^2+w_i^2}} \quad \frac{w_i}{\sqrt{1+v_i^2+w_i^2}} \quad (\text{XIII})$$

Die Cosinusse der Verrückungen in der zweiten Wellenebene und in der dritten erhält man durch Vertauschung von v_i mit v_u und v_{iii} und von w_i mit w_u und w_{iii} .

Es bleibt noch die Discussion der cubischen Gleichung (V), durch welche die dreierlei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $m_i m_u m_{iii}$ bestimmt werden, und die nähere Untersuchung der Größen v_i , v_u , v_{iii} , w_i , w_u , w_{iii} .

§. 5.

In dem dreiaxigen Ellipsoid, dessen Gleichung:
 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 1$ (a)
 ist, sollen die drei Hauptaxen ihrer Lage und Größe nach bestimmt werden. Verwandelt man die rechtwinkligen Coordinaten in Polar-Coordinationen, nennt den Radius-vector R , die Cosinusse der Winkel, welche derselbe mit den drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen bildet: p , q , r , so daß also $x = Rp$, $y = Rq$, $z = Rr$ und $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ ist, so verwandelt sich die Gleichung des Ellipsoids in folgende:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq + 2Epr + 2Fqr = \frac{1}{R^2} \quad (b)$$

Den drei Hauptaxen entsprechen die größten und kleinsten Werthe von $\frac{1}{R^2}$, man hat also:

$$Ap + Dq + Er + (Ep + Fq + Cr) \frac{dr}{dp} = 0$$

$$Dp + Bq + Fr + (Ep + Fq + Cr) \frac{dr}{dq} = 0$$

$$p + r \frac{dr}{dp} = 0$$

$$q + r \frac{dr}{dq} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man durch Elimination von $\frac{dr}{dp}$ und $\frac{dr}{dq}$:

$$(Ap + Dq + Er)r - (Ep + Fq + Cr)p = 0 \quad (c)$$

$$(Dp + Bq + Fr)r - (Ep + Fq + Cr)q = 0$$

Die Gleichung (b) läßt sich in folgende Form bringen:

$$(Ap + Dq + Er)p + (Dp + Bq + Fr)q + (Ep + Fq + Cr)r = \frac{1}{R^2} \quad (d)$$

Durch die Combination von (c) und (d) erhält man:

$$Ap + Dq + Er = \frac{p}{R^2}$$

$$Dp + Bq + Fr = \frac{q}{R^2} \quad (e)$$

$$Ep + Fq + Cr = \frac{r}{R^2}$$

aus welcher $\frac{q}{p}$, $\frac{r}{p}$ und $\frac{1}{R^2}$ zu finden ist.

Vergleicht man die Gleichungen (c) mit dem System von Gleichungen (IV), wodurch m^2 , $\frac{N}{M}$, $\frac{P}{M}$ bestimmt wird, so sieht man ihre vollkommene Aehnlichkeit, und

schließt daraus, daß

$$\sqrt{\frac{1}{m_i^2 E}}, \sqrt{\frac{1}{m_u^2 E}}, \sqrt{\frac{1}{m_m^2 E}}$$

nichts anderes sind, als die drei Haupttaxen eines Ellipsoids, und daß

$$\frac{M_i}{\sqrt{M_i^2 + N_i^2 + P_i^2}}, \frac{N_i}{\sqrt{M_i^2 + N_i^2 + P_i^2}}, \\ \frac{P_i}{\sqrt{M_i^2 + N_i^2 + P_i^2}} \dots$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_i^2 + \omega_i^2 + 1}}, \frac{\nu_i}{\sqrt{\nu_i^2 + \omega_i^2 + 1}}, \frac{\omega_i}{\sqrt{\nu_i^2 + \omega_i^2 + 1}} \dots$$

die Cosinusse der Winkel sind, welche die Haupttaxen jenes Ellipsoids mit den drei Coordinaten-Axen bilden.

Die Gleichung jenes Ellipsoids findet man:

$$\left. \begin{aligned} (D\alpha^2 + A_u\beta^2 + A\gamma^2)x^2 \\ + (A_u\alpha^2 + C\beta^2 + A_i\gamma^2)y^2 \\ + (A\alpha^2 + A_i\beta^2 + B\gamma^2)z^2 \\ + 4A_u\alpha\beta xy + 4A\alpha\gamma xz + 4A_i\beta\gamma yz \end{aligned} \right\} = 1 \quad (\text{XIV})$$

Wir sind also zu dem merkwürdigen Theorem gekommen, daß die in einer Ebene gelegenen ursprünglichen Verrückungen in einem krystallinischen Medium immer dreierlei mit verschiedener Geschwindigkeit gleichförmig fortschreitende Wellenebenen erregen, in welchen, welches auch die Richtung der ursprünglichen Verrückungen war, im Allgemeinen die Bewegungen in drei auf einander senkrechten Richtungen stattfinden, nämlich parallel den drei Axen des Ellipsoids (XIV).

Wegen der Rechtwinklichkeit der drei Richtungen, die durch $\nu_i, \omega_i; \nu_u, \omega_u; \text{ und } \nu_m, \omega_m$ bestimmt worden ist

$$1 + \nu_i \nu_u + \omega_i \omega_u = 0$$

$$1 + \nu_i \nu_m + \omega_i \omega_m = 0$$

$$1 + \nu_u \nu_m + \omega_u \omega_m = 0$$

und daher erhält man aus (X):

$$\begin{aligned}
 (1 + \nu_i^2 + \omega_i^2) M_i(S_i) &= U + \nu_i V + \omega_i W \\
 (1 + \nu_{ii}^2 + \omega_{ii}^2) M_{ii}(S_{ii}) &= U + \nu_{ii} V + \omega_{ii} W \\
 (1 + \nu_{iii}^2 + \omega_{iii}^2) M_{iii}(S_{iii}) &= U + \nu_{iii} V + \omega_{iii} W
 \end{aligned}$$

und eben so aus (XI) die Werthe für $\left(\frac{dS_i}{dt}\right) \dots$ wenn U, V, W vertauscht werden mit U_i, V_i, W_i . Es sind also $\sqrt{1 + \nu_i^2 + \omega_i^2} M_i(S_i), \sqrt{1 + \nu_{ii}^2 + \omega_{ii}^2} M_{ii}(S_{ii}) \dots$ die Componenten der ursprünglichen Verrückungen nach den drei Axen des Ellipsoids (XIV) parallel welchen Axen alle Verrückungen in den erregten Wellenebenen stattfinden, und $\sqrt{1 + \nu_i^2 + \omega_i^2} M_i\left(\frac{dS_i}{dt}\right) \dots$ die Componenten der ursprünglichen Geschwindigkeiten nach denselben Axen.

Wenn das Medium, in welchem die vibrirende Bewegung erregt ist, ein unkrystallinisches wäre, wo also $A = A_i = A_{ii} = \frac{1}{3} B = \frac{1}{3} C = \frac{1}{3} D$ ist, so verwandelt sich das Ellipsoid (XIV) in $x^2 + y^2 + z^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \frac{1}{A}$.

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoids, dessen eine Hauptaxe zusammenfällt mit der Normale der Wellenebenen, dessen beide andere Axen unter sich gleich sind und parallel der Wellenebene liegen. Die Gröfse der einen Axe ist $\sqrt{\frac{1}{3A}}$, die der beiden gleichen Axen ist

$$\sqrt{\frac{1}{A}}.$$

Hieraus schließt man, dafs in einer der erregten Wellen die Bewegung senkrecht auf der Wellenfläche stattfindet, und dafs deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{3A}{E}}$ ist; in den beiden anderen Wellenebenen sind die Verrückungen der Theilchen parallel mit der Wellenebene. Beide haben dieselbe Fortpflanzungsgeschwin-

digkeit, nämlich $\sqrt{\frac{A}{E}}$, bilden also nur eine Welle.

Die Richtung der beiden gleichen Axen in der Wellenebene bleibt unbestimmt, woraus man schließt, daß die Bewegung in dieser Welle als in zwei beliebigen rechtwinkligen, in der Wellenebene liegenden Richtungen geschehend betrachtet werden kann. Dieses Resultat: daß in unkrystallinischen Medien von der Natur fester Körper, außer einem Wellensystem, dessen Schwingungen senkrecht auf der Wellenebene geschehen, noch ein zweites, wo die Theilchen parallel mit der Wellenebene schwingen, erregt werden, ist zuerst von Poisson aus den Gleichungen der Mechanik abgeleitet. (*Mém. de l'Académie, T. X.*)

Wenn die Erregungsebene, d. i. die anfängliche Wellenebene, parallel einer der Coordinatenebenen ist, d. i. senkrecht auf einer der Krystallaxen steht, so fallen die Axen des Ellipsoids (XIV) zusammen mit den drei rechtwinkligen Krystallaxen. Es sey:

1) die Welle senkrecht auf z , alsdann ist $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$, und die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bz^2 = 1.$$

Die drei Axen dieses Ellipsoids sind $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der dreierlei

erregten Wellenebenen also $\sqrt{\frac{A}{E}}$, $\sqrt{\frac{A}{E}}$, $\sqrt{\frac{B}{E}}$, und die Richtung der Bewegung in diesen drei Wellenebenen geschieht respective parallel den drei Axen x , y , z .

2) Die Wellen seyen senkrecht auf y , d. h. $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\beta=1$; die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$Ax^2 + Cy^2 + Az^2 = 1.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen, deren Bewegungen parallel den Axen x , y , z , sind respective:

$$\sqrt{\frac{A''}{E}}, \sqrt{\frac{C}{E}}, \sqrt{\frac{A'}{E}}.$$

3) Die Wellenebene stehe senkrecht auf x , d. h. $\beta=0$, $\gamma=0$, $\alpha=1$, so wird die Gleichung

$$Dx^2 + A''y^2 + Az^2 = 1.$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen, in welchen die Theile sich parallel x , y , z bewegen, sind respective:

$$\sqrt{\frac{D}{E}}, \sqrt{\frac{A''}{E}}, \sqrt{\frac{A}{E}}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem Verhalten der Wellensysteme in doppeltbrechenden zweiaxigen Krystallen, so sieht man leicht, daß man einen polarisirten Strahl nur denjenigen zu nennen braucht, in welchem die Schwingungen in *einer* durch den Strahl gelegten Ebene senkrecht auf den Strahl stattfinden, und die Polarisationsebene diese durch den Strahl gelegte Ebene — um zwischen den beiden Strahlen, in welche der Krystall den einfallenden theilt, oder vielmehr zwischen den beiden ihnen entsprechenden Wellenebenen und denjenigen der eben gefundenen, in welchen die Schwingungen in der Wellenebene ausgeführt werden, die vollkommenste Gleichheit zu finden: was die dritte der gefundenen Wellenebenen betrifft, in welcher die Schwingungen senkrecht auf der Wellenebene stattfinden, so kennen wir nichts, was ihr in der Lichtundulation entspricht. In der That, behält man die Bezeichnung der drei Krystallaxen mit x , y , z bei, so weiß man, daß der in der Richtung von z sich bewegende Strahl zerfällt in zwei Strahlen, die polarisirt sind parallel mit x und y , und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit respective seyen a und a_1 ; der parallel mit y sich bewegende Strahl zerfällt in zwei nach x und z polarisirte Strahlen mit den respectiven Fortpflanzungsgeschwindigkeiten a_1 , a , und endlich der mit x parallel sich bewegende Strahl zerfällt in zwei nach y und z polarisirte Strahlen mit den Fortpflan-

zungsgeschwindigkeiten α und α'' . Man braucht nur die Buchstaben α , α' , α'' mit $\sqrt{\frac{A}{E}}$, $\sqrt{\frac{A'}{E}}$, $\sqrt{\frac{A''}{E}}$ zu vertauschen, um in diesem experimentalen Resultat nur den Ausdruck des eben gefundenen theoretischen Resultats zu haben.

Nennt man bei einem optisch zweiaxigen Krystall die Ebene, welche durch zwei der krystallinischen Axen (oder durch zwei Elasticitätsaxen, nach Fresnel) gelegt ist, einen Hauptschnitt, so weiß man, daß, so lange die beiden zusammengehörigen Strahlen sich in demselben Hauptschnitt befinden, der eine Strahl, welches auch seine Richtung sey in diesem Hauptschnitt, immer dieselbe Geschwindigkeit hat. Dieser Strahl ist so polarisirt, daß seine Polarisationsebene zusammenfällt mit dem Hauptschnitt; der andere Strahl ist senkrecht auf dem Hauptschnitt polarisirt, und seine Geschwindigkeit kann dargestellt werden durch die gegen ihn senkrecht stehenden, in 1 dividirten Radiusvectors einer Ellipse, die in diesem Hauptschnitt so construirt ist, daß ihre Hauptaxen der Richtung nach zusammenfallen mit den Axen des Krystalles, und ihre Längen respective ausdrücken diejenigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche der Strahl hat, wenn er sich senkrecht gegen diese Axen des Krystalles bewegt. Wir wollen untersuchen, ob mit diesem empirischen Gesetz die aufgestellte Theorie gleichfalls in Uebereinstimmung sich findet. Setzen wir $\alpha=0$, um diejenigen Wellenebenen zu untersuchen, die senkrecht gegen den Hauptschnitt durch z und y gehen, so verwandelt die Gleichung (V) sich in das Product zweier Factoren, und zerfällt also:

$$\begin{aligned} 1) & A''\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2 = 0 \\ 2) & (C\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2)(A''\beta^2 + B\gamma^2 - Em^2) \\ & \quad - 4A''^2\gamma^2\beta^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) entspricht einer nach x polarisirten Welle, und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist der in 1 dividirte Radiusvector einer Ellipse, die ganz auf die-

selbe Weise construirt ist, wie bei dem nach x polarisirten Lichtstrahl.

Die Gleichung (2) muß für eine zweite nach dem Hauptschnitt polarisirte Welle eine constante Geschwindigkeit geben, wenn die Analogie dieser Wellen mit den beiden Lichtstrahlen vollständig seyn soll.

Untersucht man die Bedingungen, unter welchen die Gleichung (2) sich in ein Product von der Form

$$(\mu\beta^2 + \nu\gamma^2 - Em^2)(\mu_i\beta^2 + \nu_i\gamma^2 - Em^2)$$

verwandelt, so findet man:

$$\begin{aligned} \mu &= A_i & \mu_i &= B \\ \nu &= A_i & \nu_i &= C \\ (B - A_i)(C - A_i) &= 4A_i^2 \end{aligned} \quad (XV)$$

woraus man sieht, daß die Constanten BCA_i eine Bedingungs Gleichung (XV) erfüllen müssen, wenn sich (2) in zwei Factoren der angenommenen Form zerlegen lassen soll. Alsdann hat man aber:

$$\begin{aligned} 3) \quad A_i - Em^2 &= 0 \\ 4) \quad B\beta^2 + C\gamma^2 - Em^2 &= 0. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Bedingung (XV) erfüllt ist, erhält also in der That die nach dem Hauptschnitt polarisirte Welle eine constante Geschwindigkeit, welches auch ihre Neigung gegen z oder y sey. Die Analogie mit dem Verhalten der beiden Lichtstrahlen in dem Hauptschnitt yz ist also vollständig, und eben so vollständig ist sie in den anderen beiden Hauptschnitten, wenn man zu der Bedingungs Gleichung (XV) noch die analogen hinzufügt:

$$\begin{aligned} (B - A)(D - A) &= 4A^2 \\ (C - A_u)(D - A_u) &= 4A_u^2 \end{aligned} \quad (XVI)$$

§. 6.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß für das durch die cubische Gleichung (V) gegebene Gesetz der Geschwindigkeiten einer Wellenebene, die eine beliebige Lage gegen die Axen des krystallinischen Mediums besitzt, die Fresnel'sche Construction an seiner Elasticitätsfläche

eine erste Annäherung ist. Diese Construction drückt jenes in (V) enthaltene Gesetz genau aus, bis auf die ersten Potenzen der Excentricitäten der Ellipsen, welche wir im vorhergehenden §. für das Gesetz der Geschwindigkeiten in den Wellen, welche auf einem Hauptschnitt senkrecht stehen, gefunden haben. Diese Excentricitäten sind bei allen optisch untersuchten Krystallen nur kleine Größen. Diese Congruenz des in (V) enthaltenen Gesetzes mit der Fresnel'schen Construction findet nur unter den Bedingungen, welche durch (XV) und (XVI) ausgedrückt sind, statt.

Was diese Bedingungsgleichungen betrifft, so mag man darüber noch folgende Reflexionen sich gefallen lassen. Der Widerstand, womit die krystallinischen Substanzen der Zusammendrückung oder Verschiebung in sich widerstehen, ist im Allgemeinen sehr viel größer als der Unterschied in diesem Widerstand nach den verschiedenen Richtungen; man kann sich deshalb die Function F in (II) als aus einem constanten Gliede C , und einem von $\cos^2 a$, $\cos^2 b$, $\cos^2 c$ abhängigen F_i vorstellen, wo F_i sehr viel kleiner als C ist. Es sey also $F = C + F_i$, alsdann verwandeln sich die Gleichungen (II), wenn $p C \frac{4}{3} \pi = L$ gesetzt wird, in:

$$\begin{aligned} A &= L + p f d m F_i \cos^2 a \cos^2 c & B &= 3L + p f d m F_i \cos^4 c \\ A_i &= L + p f d m F_i \cos^2 b \cos^2 c & C &= 3L + p f d m F_i \cos^2 b \\ A_{ii} &= L + p f d m F_i \cos^2 a \cos^2 b & D &= 3L + p f d m F_i \cos^4 a \end{aligned}$$

wo die Werthe der Integrale kleine Größen gegen L sind. Denken wir uns nun F_i entwickelt nach den Potenzen von $\cos^2 a$. . . , berücksichtigen nur die ersten Potenzen, so daß:

$$F_i = m \cos^2 a + n \cos^2 b + p \cos^2 c \quad (A)$$

ist, wo also m , n , p kleine Größen gegen L sind, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A &= L + \lambda(m + \frac{1}{3}n + p) & B &= 3L + \lambda(m + n + 5p) \\ A_i &= L + \lambda(\frac{1}{3}m + n + p) & C &= 3L + \lambda(m + 5n + p) \\ A_{ii} &= L + \lambda(m + n + \frac{1}{3}p) & D &= 3L + \lambda(5m + n + p) \end{aligned} \quad (B)$$

wenn $\lambda = \frac{4}{3} p \pi$ gesetzt wird.

Die angenommene Form von F_i kann, wie bemerkt, als eine Annäherung angesehen werden an die wahren Werthe von F_i ; F_i würde genau diese Form haben, wenn wir statt eines krystallinischen Mediums uns ein Medium dächten, welches sich in dem Zustande linearer Verdichtungen und Verdünnungen befände, in welchem sich z. B. ein rechtwinkliges Glasparallelepipedon befindet, wenn dasselbe in drei auf einander rechtwinkligen Richtungen durch dreierlei auf seine Seitenebenen wirkende Druckkräfte comprimirt ist.

Setzt man diese Werthe von $A \dots B \dots$ in die Bedingungsgleichungen (XV) und (XVI), so findet man diese erfüllt bis auf die Quadrate der Unterschiede von m, n, p , d. h. erfüllt bis auf das Quadrat der Excentricitäten der Ellipsen, wodurch nach dem vorhergehenden §. die Geschwindigkeiten der auf einem Hauptschnitt senkrecht stehenden Wellenebenen dargestellt werden.

Setzt man in den Bedingungsgleichungen (XV) und (XVI):

$$\begin{aligned} C - A_i &= c & A_i - A &= A_{ii} \\ B - A &= b & A - A_{ii} &= A_i \\ D - A_{ii} &= d & A_{ii} - A_i &= d = -d_i - d_{ii}, \end{aligned}$$

so verwandeln sich diese in:

$$\begin{aligned} (d_{ii} + b)e &= 4A_i^2 \\ (d_i + d)b &= 4A^2 \\ (d + e)d &= 4A_{ii}^2 \end{aligned} \quad (a)$$

Aus dem Product der Gleichungen (a), wenn die zweiten Potenzen von d, d_i, d_{ii} vernachlässigt werden, erhält man:

$$bcd = 8AA_iA_{ii} \quad (b)$$

oder:

$$(C - A_i)(B - A)(D - A_{ii}) = 8AA_iA_{ii} \quad (\text{XVII})$$

und auf eine ganz ähnliche Weise ergibt sich:

$$(B - A_i)(D - A)(C - A_{ii}) = 8AA_iA_{ii} \quad (\text{XVIII})$$

Mittelst der Gleichung (b) lassen sich die Gleichungen (a) bei Vernachlässigung der Glieder, die von $d^2 \dots$

abhängen, leicht auflösen, und substituirt man statt b , c , d , A . . . ihre Werthe, so findet man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}B &= A + A_i - A_u \text{ und } A = \frac{B+D}{6} \\ \frac{1}{3}C &= A_i + A_u - A \quad - \quad A_i = \frac{B+C}{6} \\ \frac{1}{3}D &= A_u + A_i - A \quad - \quad A_u = \frac{c+D}{6}\end{aligned} \quad (\text{XIX})$$

§. 7.

Die Gleichung (V), welche das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener, unbegrenzter Wellen darstellt, ist von der Form:

$$\mu^6 - M\mu^4 + N\mu^2 - P = 0,$$

wo $\mu^2 = Em^2$ gesetzt ist. Die Coëfficienten M , N , P haben folgende Werthe:

$$\begin{aligned}M &= A + A_i + A_u + (D - A_i)\alpha^2 + (C - A)\beta^2 \\ &\quad + (B - A_u)\gamma^2 \\ N &= A - A_u + A_i D \alpha^2 + (A A_u + A C)\beta^2 \\ &\quad + (A A_i + A_u B)\gamma^2 \\ + D(A + A_u - A_i)\alpha^4 + C(A_i + A_u - A)\beta^4 \\ &\quad + B(A + A_i - A_u)\gamma^4 \\ + (DB - 3A^2)\alpha^2\gamma^2 + (CD - 3A_u^2)\alpha^2\beta^2 \\ &\quad + (CB - 3A_i^2)\beta^2\gamma^2 \\ P &= (D\alpha^4 + c\beta^4 + B\gamma^4)(A A_u \alpha^2 + A_i A_u \beta^2 + A A_i \gamma^2) \\ &\quad + (BC - 3A_i)(A\gamma^2 + A_u \beta^2)\beta^2\gamma^2 \\ &\quad + (BD - 3A)(A_i \gamma^2 + A_u \alpha^2)\alpha^2\gamma^2 \\ &\quad + (CD - 3A_u)(A_i \beta^2 + A \alpha^2)\alpha^2\beta^2 \\ &\quad + [BCD - 3(BA_u + CA^2 + DA_i^2) + 18AA_i A_u]\alpha^2\beta^2\gamma^2\end{aligned}$$

Diese Werthe verwandeln sich, mit Hülfe der im vorhergehenden §. angenommenen Relationen zwischen A , A_i und A_u und B , C , D , in:

$$\begin{aligned}M &= D\alpha^2 + c\beta^2 + B\gamma^2 + (A + A_u)\alpha^2 + (A_i + A_u)\beta^2 \\ &\quad + (A + A_i)\gamma^2 \\ N &= A A_u \alpha^2 + A_i A_u \beta^2 + A A_i \gamma^2 \\ &\quad + (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2)[(A + A_u)\alpha^2 + (A_i + A_u)\beta^2 + \\ &\quad \quad \quad (A + A_i)\gamma^2] \\ P &= (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2)(A A_u \alpha^2 + A_i A_u \beta^2 + A A_i \gamma^2)\end{aligned}$$

Werden diese Werthe von M , N , P in die cubische Gleichung:

$$\mu^6 - M\mu^4 + N\mu^2 - P = 0$$

substituirt, so bemerkt man leicht, dafs sie sich in ein Product zweier Factoren verwandelt, so dafs sie in folgende zwei Gleichungen zerfällt:

$$\mu^2 - (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2) = 0 \quad (\text{XX})$$

und

$$\mu^4 - [(A + A_{\alpha})\alpha^2 + (A_i + A_{\alpha})\beta^2 + (A + A_i)\gamma^2]\mu^2 + A A_{\alpha}\alpha^2 + A_i A_{\alpha}\beta^2 + A A_i\gamma^2 = 0 \quad (\text{XXI})$$

Letztere Gleichung läfst sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{\alpha^2}{\mu^2 - A_i} + \frac{\beta^2}{\mu^2 - A} + \frac{\gamma^2}{\mu^2 - A_{\alpha}} = 0 \quad (\text{XXII})$$

Diese Gleichung (XXII) läfst sich durch folgende geometrische Construction auflösen: Man construire eine Fläche, deren Radiusvector ϱ so bestimmt ist, dafs:

$$\varrho^2 = A_i a^2 + A b^2 + A_{\alpha} c^2 \quad (\text{XXIII})$$

wo a , b , c die Cosinusse der Winkel sind, welche ϱ mit den drei Axen des krystallinischen Mediums x , y , z bildet; man schneide diese Fläche mit einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebene, deren Normale mit denselben Axen Winkel bildet, deren Cosinusse sind: α , β , γ ; der grösste und kleinste Halbmesser dieses Schnittes stellt die Wurzeln der Gleichung (XXII) dar. Die Gleichung der schneidenden Ebene ist:

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (1)$$

Es sey irgend ein Radiusvector der Fläche $x = p z$, $y = q z$, so dafs in (XXIII) ist:

$$a = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad b = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Es liege dieser Radiusvector zugleich in der schneidenden Ebene, alsdann verwandeln sich die Gleichungen (XXIII) und (1) in:

$$\varrho^2 (1 + p^2 + q^2) = A_i p^2 + A q^2 + A_{\alpha} \quad (2)$$

$$0 = \alpha p + \beta q + \gamma \quad (3)$$

Es soll q in Beziehung auf p oder q ein Maximum oder Minimum seyn; man hat also:

$$0 = (q^2 - A_1)p + (q^2 - A)q \frac{dq}{dp}$$

$$0 = \alpha + \beta \frac{dq}{dp}$$

und durch Elimination von $\frac{dq}{dp}$:

$$0 = \beta(q^2 - A_1)p - \alpha(q^2 - A)q \quad (4)$$

Aus (4) und (3) erhält man:

$$p = \frac{-\alpha\gamma(q^2 - A)}{\alpha^2(q^2 - A) + \beta^2(q^2 - A_1)}$$

$$q = \frac{-\beta\gamma(q^2 - A_1)}{\alpha^2(q^2 - A) + \beta^2(q^2 - A_1)}$$

und werden diese Werthe in (2) gesetzt, so geht nach gehöriger Reduction hervor:

$$\frac{\alpha^2}{q^2 - A_1} + \frac{\beta^2}{q^2 - A} + \frac{\gamma^2}{q^2 - A''} = 0 \quad (5)$$

Diese Gleichung (5) congruirt mit der Gleichung (XXII), wenn statt q^2 gesetzt wird μ^2 , wodurch also die Richtigkeit der geometrischen Construction erwiesen ist. Die Fläche (XXIII) ist aber die *Fresnel'sche* Elasticitätsfläche, und die eben bewiesene Construction der Wurzeln der Gleichung (XXII) ist identisch mit derjenigen, welche *Fresnel* gegeben hat, um die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung der beiden ebenen Lichtwellen in einer beliebigen Lage in einem doppeltbrechenden zweiaxigen Medium zu finden.

§. 8.

Es bleibt noch übrig zu untersuchen, welches die Richtungen sind, parallel welchen die Schwingungen der Theilchen in den beiden Wellen, deren Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch (XXII), und in der Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch (XXI) gegeben ist, ausgeführt werden.

In der letzteren Welle (XXI) geschehen die Schwin-

gungen sehr nahe senkrecht auf der Wellenebene, in den beiden andern schwingen die Theilchen sehr nahe parallel mit der Wellenebene, und zwar so, daß die Richtung ihrer Schwingung nahe senkrecht steht auf demjenigen Radiusvector des Durchschnitts der Wellenebene und der Fläche (XXIII), durch welchen ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der Construction des vorhergehenden §. gegeben ist.

Behalten wir die Bezeichnung des vorigen §. bei, so bildet dieser Radiusvector mit den drei Axen der Coordinaten Winkel, deren Cosinusse:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

Die Normale der Wellenebene bildet mit denselben Axen Winkel, deren Cosinusse:

$$\alpha, \beta, \gamma.$$

Eine Linie, die gegen jenen Radiusvector und gegen diese Normale senkrecht steht, bilde mit den drei Axen Winkel, deren Cosinusse X, Y, Z seyen; alsdann hat man, um X, Y, Z zu bestimmen:

$$\begin{aligned} Xp + Yq + Z &= 0 \\ X\alpha + Y\beta + Z\gamma &= 0, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} X(\alpha - \gamma p) + (\beta - \gamma q) Y &= 0 \\ X(\alpha q - \beta p) - (\beta - \gamma q) Z &= 0, \end{aligned}$$

werden hierin substituirt die Werthe für p und q des vorigen §. in Verbindung mit (5), nämlich:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\varrho^2 - A_u}{\varrho^2 - A_i} \\ q &= \frac{\beta}{\gamma} \frac{\varrho^2 - A_u}{\varrho^2 - A_i} \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} X\alpha \frac{A_i - A_u}{\varrho^2 - A_i} + Y\beta \frac{A_i - A_u}{\varrho^2 - A_i} &= 0 \\ X\alpha \frac{A_i - A}{\varrho^2 - A_i} + Z\gamma \frac{A_u - A}{\varrho^2 - A_u} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (IV) zieht man durch Elimination von P und durch Elimination von N zur Bestimmung von M , N , P folgende Gleichungen, wenn $Em^2 = \mu^2$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} & [A_i \beta_j (D\alpha^2 + A_u \beta^2 + A\gamma^2 - \mu^2) - 2A_i A_u \alpha^2 \beta \gamma] M \\ &= [A\alpha\gamma(A_u \alpha^2 + C\beta^2 + A\gamma^2 - \mu^2) - 2A_i A_u \alpha \beta^2 \gamma] N \quad (A) \\ &= [A_u \alpha_i^2 (A\alpha^2 + A_i \beta^2 + B\gamma^2 - \mu^2) - 2A_i A \alpha \beta \gamma^2] P \end{aligned}$$

Setzt man statt B , C , D ihre Werthe aus (XIX), und statt μ^2 : $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\mu^2$, so erhält man aus der ersten dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} & [A_i \beta \gamma (\alpha^2 (A_u - \mu^2) + \beta^2 (A_u - \mu^2) + \gamma^2 (A - \mu^2)) \\ & \quad + (2A_u - 3A_i)(A_i - A)\alpha^2 \beta \gamma] M \\ &= [A\alpha\gamma (\alpha^2 (\alpha^2 (A_u - \mu^2) + \beta^2 (A_u - \mu^2) + \gamma^2 (A - \mu^2)) \\ & \quad - (2A_u - 3A)(A_i - A)\alpha \beta^2 \gamma] N \end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichung mit (XXII):

$$\begin{aligned} & \left[A_i \beta \gamma (A_u - \mu^2)(A - \mu^2) \left[\frac{\alpha^2 (A_i - A)}{(A - \mu^2)(A_i - \mu^2)} \right] \right. \\ & \quad \left. + (2A_u - 3A_i)(A_i - A)\alpha^2 \beta \gamma \right] M \\ &= \left[A\alpha\gamma (A_u - \mu^2)(A_i - \mu^2) \left[\frac{\beta^2 (A - A_i)}{(A - \mu^2)(A_i - \mu^2)} \right] \right. \\ & \quad \left. + (2A_u - 3A)(A - A_i)\alpha \beta^2 \gamma \right] N \end{aligned}$$

woraus durch Reduction:

$$\begin{aligned} 0 = & \left[A_i \alpha \frac{1}{A_i - \mu^2} + \frac{(2A_u - 3A_i)\alpha}{A_u - \mu^2} \right] M \\ & + \left[A\beta \frac{1}{A - \mu^2} + \frac{2A_u - 3A}{A_u - \mu^2} \right] N \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 0 = & A_i \alpha \frac{A_u - A_i}{A_i - \mu^2} \left(1 + \frac{2(A_u - \mu^2)}{A_i} \right) M \\ & + A\beta \frac{A_u - A}{A - \mu^2} \left(1 + \frac{2(A - \mu^2)}{A} \right) N \quad (XXIII) \end{aligned}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhält man:

$$\begin{aligned}
& [A_i \beta \gamma (\alpha^2 (A - \mu^2) + \beta^2 (A_u - \mu^2) + \gamma^2 (A - \mu^2)) \\
& \quad + (2A - 3A_i)(A_i - A_u) \alpha^2 \beta \gamma] M \\
= & [A_u \alpha \beta (\alpha^2 (A - \mu^2) + \beta^2 (A_i - \mu^2) + \gamma^2 (A - \mu^2)) \\
& \quad - (2A - 3A_u)(A_i - A_u) \alpha \beta \gamma^2] P
\end{aligned}$$

Durch Verbindung mit (XII) verwandelt diese sich in:

$$\begin{aligned}
& \left[A_i \beta \gamma (A - \mu^2)(A_u - \mu^2) \left(\frac{\alpha^2 (A_i - A_u)}{(A_i - \mu^2)(A_u - \mu^2)} \right) \right. \\
& \quad \left. + (2A - 3A_i)(A_i - A_u) \alpha^2 \beta \gamma \right] M \\
= & \left[A_u \alpha \beta (A - \mu^2)(A_i - \mu^2) \left(\frac{\gamma^2 (A_u - A_i)}{(A_u - \mu^2)(A_i - \mu^2)} \right) \right. \\
& \quad \left. + (2A - 3A_u)(A_u - A_i) \alpha \beta \gamma^2 \right] P
\end{aligned}$$

oder gehörig reducirt in:

$$\begin{aligned}
0 = & \left(A_i \alpha \frac{A - A_i}{A_i - \mu^2} + 2\alpha (A + A_i) \right) M \\
& + \left[A_u - \gamma \frac{A - A_u}{A_u - \mu^2} + 2\gamma (A - A_u) \right] P \quad \text{(XXIV)}
\end{aligned}$$

Vergleicht man die Gleichungen (XXIII) und (XXIV), wodurch $\frac{N}{M}$ und $\frac{P}{M}$ bestimmt sind, mit den Gleichungen

(b), wodurch $\frac{Y}{X}$ und $\frac{Z}{X}$ bestimmt sind, und erinnert sich, daß $\mu^2 = \rho^2$, so sieht man ein, daß der Unterschied der Größen $\frac{N}{M}$ und $\frac{P}{M}$ von $\frac{Y}{X}$ und $\frac{Z}{X}$ nur sehr klein ist, nämlich proportional dem Unterschiede der Größen A , A_i , A_u ; daß also sehr nahe die durch M , N , P bestimmte Richtung der Schwingung zusammenfällt mit der durch X , Y , Z bestimmten Richtung, d. i. sehr nahe senkrecht steht auf der Normale der Wellenebene und demjenigen Radiusvector des Durchschnitts der Wellenebene mit der Fläche (XXIII), wodurch ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit angegeben ist.

Nach §. 5 geschehen die Bewegungen in den dreierlei Wellenebenen immer in drei auf einander senkrechten

ten Richtungen, und deshalb und zufolge des eben Bewiesenen müssen die Bewegungen der Wellenebene, deren Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch (XX) gegeben ist, sehr nahe senkrecht auf die Wellenebene stattfinden.

§. 9.

Auf diese Weise sind also die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung, in sofern sich diese auf die Richtung der gebrochenen Strahlen beziehen, übereinstimmend mit denjenigen, die Fresnel aus seiner Theorie abgeleitet und der Erfahrung entsprechend gefunden hat, streng mit Hülfe der Mechanik deducirt aus den anziehenden und abstossenden Kräften, welche, der Verschiebung und Zusammendrückung der Medien sich widersetzend, nur in sehr kleiner Entfernung wirksam sind. Diejenigen theoretischen Betrachtungen, welche Fresnel zu diesen Gesetzen geführt haben, werden immer als das Bewunderungswürdigste und Scharfsinnigste seines eminenten Genies dastehen; aber ich glaube nicht, daß sie diejenige Evidenz in sich tragen, daß jede strengere theoretische Untersuchung dadurch überflüssig geworden wäre. Ich sage die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung sind im Vorhergehenden aus den Gleichungen (I) abgeleitet; in der That, man darf nur die Lichtwellen als *diejenigen* der drei im Vorhergehenden gefundenen Wellen, in welche sich die ursprüngliche Wellenebene im allgemeinsten Falle immer theilt, definiren, deren Schwingungen parallel der Wellenebene sind; aus dem Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser ebenen Wellen läßt sich die Gestalt der Wellenfläche ableiten, die entsteht, wenn von einem einzelnen Erschütterungspunkt sich nach allen Richtungen die Vibration fortpflanzt. Es ist dies ein Problem der Theorie der Enveloppen (Fresnel, Theorie der doppelten Strahlenbrechung), wie in §. I gesagt ist. Die Kenntniß dieser Wellenfläche führt auf die Gesetze der Geschwindigkeit, womit die Strahlen, d. i.

Radii vectores der Wellenfläche in verschiedenen Richtungen sich bewegen, die nicht identisch sind mit den Geschwindigkeiten, womit die Wellenebenen, die auf diesen Strahlen senkrecht stehen, sich fortpflanzen würden. Aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen in den verschiedenen Richtungen lassen sich die Richtungen derselben, sey es daß sie von einem zweiten Medium reflectirt oder gebrochen werden, finden — in beiden Fällen zeigt die Theorie der Interferenzen, in Verbindung mit dem Huyghen'schen Princip, daß die Richtung des reflectirten oder gebrochenen Strahls in irgend einem Punkt in einiger Entfernung von der reflectirenden oder brechenden Fläche diejenige Richtung ist, in welcher die vibrirenden Impulse zuerst nach diesem Punkt hingebraucht werden; die Bestimmung der Lage des reflectirten oder gebrochenen Strahls ist also ein Problem der Theorie der Maxima und Minima. Die particulären Fälle, wo das Medium zu einem viergliedrigen Krystallsystem gehört, oder aus der Abtheilung der sechsgliedrigen oder der regulären Systeme ist, lassen sich aus demjenigen, was für den allgemeinen Fall der zwei- und zweigliedrigen krystallinischen Medien entwickelt ist, leicht ableiten, wenn man Rücksicht nimmt auf die Relationen, die zwischen den Constanten, nach §. 2, für diese Fälle stattfinden. Es ergibt sich hieraus das vollkommen gleiche Verhalten in der Fortpflanzung der Wellen in den viergliedrigen und 6gliedrigen Systemen, wie es auch die Erfahrung bestätigt; es ergibt sich ferner, daß die Fortpflanzung der Wellen, und somit die Strahlenbrechung in den krystallinischen Medien vom regulären Krystallsystem sich genau so verhält, wie in den unkrystallinischen Medien, gleichfalls congruent mit der Erfahrung.

Die entwickelte Theorie erklärt nicht allein die Richtungen der doppelt gebrochenen oder doppelt reflectirten Strahlen; sie zeigt auch ihr Verhalten in Hinsicht der Polarisation.

Sie zeigt zuerst, dafs in einem Medium, welches die Natur der festen Körper hat, d. h. welches nicht allein der Zusammendrückung widersteht, sondern auch der Verschiebung in sich, immer Wellenflächen erregt werden, in welchen die Theilchen parallel mit diesen Wellenflächen ihre Schwingungen machen, während aus den hydrodynamischen Gleichungen, welche auf die Voraussetzung der freien Verschiebbarkeit basirt sind, nur Schwingungen senkrecht auf den Wellenflächen sich ergeben. Dieses Resultat ist hervorzuheben, da grofse Zweifel von einem berühmten Mathematiker, sich stützend auf diese hydrodynamische Gleichungen, erhoben wurden, als Fresnel zuerst, um das Verhalten des polarisirten Lichtes in den Interferenz-Erscheinungen zu erklären, *die Definition einer Lichtwelle aufstellte: dafs ihre Schwingungen parallel der Wellenfläche stattfänden.* Die Existenz solcher Wellen in Medien von der Natur fester Körper hat aber auch derselbe grofse Mathematiker zuerst theoretisch bewiesen (Poisson, *Mém. de l'Acad. T. X*).

Um die im Vorhergehenden entwickelte Theorie in Hinsicht der Polarisation der Wellen oder der Strahlen in vollkommener Uebereinstimmung mit den Biot'schen Gesetzen für diese Erscheinung zu finden, mufs man von der Polarisationsebene *die Definition* geben: *dafs sie die durch den Strahl und durch die Richtung der Schwingungen gelegte Ebene sey;* diese Definition vorausgesetzt, hat in den optisch einaxigen Krystallen der nach dem Hauptschnitt polarisirte Strahl immer eine constante Geschwindigkeit, welches auch seine Neigung gegen die Axe ist; bei den optisch zweiaxigen Krystallen hat der in einem der drei Hauptschnitte sich bewegende Strahl, dessen Polarisationsebene mit diesem Hauptschnitt zusammenfällt, immer dieselbe Geschwindigkeit, welches auch seine Richtung in diesem Hauptschnitt sey. Die Biot'sche Construction für die Lage der Polarisations-ebenen, wenn der Strahl nicht in einem der drei Haupt-

schnitte liegt, läßt sich aus der obigen Theorie ableiten (confr. Fresnel, Theorie der doppelten Strahlenbrechung).

Aber mit dieser Definition der Polarisationssebene hört die Uebereinstimmung der hier entwickelten Theorie mit der Fresnel'schen Theorie auf. *Bei Fresnel ist die Polarisationssebene diejenige durch den Strahl gelegte Ebene, gegen welche die Richtung der Schwingungen senkrecht steht.* Dieser Umstand ist nicht allein, weil er mit dem, was Fresnel gesagt hat, in Widerspruch steht, wichtig, er ist es auch in seinen Folgen. Die Fresnel'sche Definition der Polarisationssebene hat ihren Grund in seinem Theorem, wonach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller ebenen Wellenflächen, die eine Richtung gemeinschaftlich haben, dieselbe ist, wenn die Schwingungen nach dieser gemeinschaftlichen Richtung geschehen; oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Wellenfläche ist nur von der Richtung der Schwingungen abhängig. Nach vorstehender Theorie muß die in der Wellenebene senkrecht gegen die Richtung der Schwingung stehende Linie immer dieselbe Richtung haben, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebenen immer dieselbe seyn soll; dies ist eine strenge Folgerung aus den der Theorie zu Grunde liegenden Gleichungen (I). Den theoretischen Beweis, den Fresnel für sein Theorem gegeben hat, kann man, glaube ich, wenigstens nicht für vollkommen evident halten; der Beweis seines Theorems durch Erfahrung, worauf sich Fresnel bezieht (Theorie der doppelten Strahlenbrechung, Poggendorff's Annalen, Bd. XXIII S. 427), kann, glaube ich, mit demselben Recht für das Resultat unserer Theorie in Anspruch genommen werden. Es scheint nämlich durch directe Erfahrungen dieser directer Widerspruch nicht entschieden werden zu können, die Beobachtungen über die doppelte Strahlenbrechung sind eben so gut übereinstimmend mit der hier entwickelten

Theorie als mit der Fresnel'schen. Aber Fresnel hat seine Definition von der Polarisationssebene den theoretischen Untersuchungen über *Intensität* des reflectirten Lichtes, welches vor der Reflexion nach einer beliebigen Richtung polarisirt war, zum Grunde gelegt (Fresnel, über das Gesetz der Modification etc., Poggend. Annalen, Bd. XXII p. 90); die Formeln für die reflectirten Lichtmengen und für die Drehungen, welche die ursprünglichen Polarisationssebenen durch Reflexion erleiden, sind durch vielfache spätere Erfahrungen (Brewster; Poggend. Ann. Bd. XIX; und Seebeck, ebendasselbst, Bd. XXII) bestätigt, so daß ihre Richtigkeit als durch die Erfahrung erwiesen betrachtet werden kann. Für die theoretischen Betrachtungen aber, welche zu diesen Formeln geführt haben, ist es nicht mehr gleichgültig, welche der beiden in Rede stehenden Definitionen von der Polarisationssebene man annimmt; diese theoretischen Betrachtungen gründen sich wesentlich auf die Fresnel'sche Definition. Man muß annehmen, *entweder* daß eine strenge theoretische Untersuchung der Gesetze über die Quantität des reflectirten Lichtes auf den Grund der Gleichung (I) zu denselben Formeln führt, als diejenigen, welche Fresnel aus theoretischen Betrachtungen, die mit der Gleichung (I) in Widerspruch stehen, abgeleitet hat, *oder* daß die Gleichungen (I) nicht die Theorie der Lichtundulationen enthalten, *das heißt*, daß diese Art von Undulationen nicht, oder nicht allein hervorgebracht werden von denjenigen Kräften der Elasticität, die sich durch die Veränderung der relativen Entfernung der Theilchen entwickeln.

Unsere Theorie zeigt, daß im Allgemeinen, außer den beiden polarisirten Wellenebenen, noch eine dritte erregt wird, welche nur unter besonderen Bedingungen der ursprünglichen Verrückungen oder der ursprünglich erregten Geschwindigkeiten verschwinden kann, nämlich wenn diese von der Art sind, daß dadurch keine Ver-

dichtung oder Verdünnung des Mediums hervorgebracht ist. Die beiden Klassen von Wellen unterscheiden sich nämlich außer der Richtung, in welchen ihre Theilchen schwingen, noch darin, daß für die ersteren, die polarisirten, immer

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

ist, d. i. daß in ihnen keine Verdichtung und Verdünnung des Mediums stattfindet, nur Verschiebung des Mediums in sich; wogegen in der dritten Welle dieser Ausdruck einen endlichen der Geschwindigkeit nahe proportionalen Werth hat, wenn nicht im anfänglich erregten Zustand derselbe $= 0$ war, d. h. die Verrückung und die Geschwindigkeit von der Art, daß ihre Componente senkrecht auf der Wellenebene $= 0$ war.

Wenn obige Theorie der Natur entsprechend ist, so muß man annehmen, daß dieses dritte Wellensystem, wenn es nicht als Licht wahrgenommen werden kann, sich auf irgend eine andere Weise, als vorhanden, wird wahrnehmen lassen, sey es als strahlende Wärme, oder chemisch wirkend, oder als irgend ein anderes Agens. Wenn die Gesetze der Reflexion, d. h. die Modification, welche die Richtungen und Intensitäten der Schwingungen dadurch erleiden, aus obiger Theorie werden abgeleitet seyn, werden sich die einfachsten Wege, dieses dritte Wellensystem aufzusuchen, angeben lassen.