Abstände x_{n+1} vom Schwerpunkt des Gesamtsystems stehen soll. Sämmtliche Gleichungen (A) erhalten hierdurch ein neues unendlich kleines mit m_{n+1} multiplicirtes Glied, und die Grössen $K, x_1, x_2, \dots, x_n$ werden unendlich kleine Incremente $dK, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ annehmen. Ausserdem wird zu den Gleichungen (A) eine neue für den Werth $-(K + dK)x_{n+1}$ hinzutreten. Indem wir nur die ersten Potenzen der unendlich kleinen Grössen beibehalten, können wir die Gleichungen als linear in Bezug auf die Unbekannten $dK, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ betrachten, welche offenbar reelle Coefficienten haben, da letztere nur von den reellen Anfangswerthen $K, x_1, x_2, \dots, x_n$ abhängen. Hiernach können sich für $dK, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ offenbar nur reelle Werthe ergeben, so dass auch die Gesamtwerte der Unbekannten $K + dK, x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n$ reelle Functionen der gegebenen Grösse x_{n+1} sind.

Man kann nun der Masse m_{n+1} ein unendlich kleines Increment geben, ohne ihre Abscisse x_{n+1} in Bezug auf den Schwerpunkt des neuen Gesamtsystems zu ändern. Eine der vorigen gleiche Schlussweise zeigt alsdann, dass die Unbekannten sich nur um reelle Incremente ändern. So wird man durch allmähliche Vermehrung für m_{n+1} schliesslich einen beliebigen endlichen Werth erlangen, während die Unbekannten stetig reelle Werthe durchlaufen. Man beachte, dass bei dieser allmählichen Umformung des Systems niemals zwei Punkte einander unendlich nahe kommen können, denn alsdann würden unendlich grosse Anziehungen entstehen, die nicht dem Abstände vom Schwerpunkte proportional sein können. Daraus folgt auch, dass sich die ursprüngliche Reihenfolge der Punkte nicht ändern kann.

Nun haben unter Annahme des Newton'schen Anziehungsgesetzes im Falle von drei Massenpunkten die Unbekannten reelle Werthe (Méc. cél. Livre X, Chap. VI), folglich auch nach dem soeben Bewiesenen im Falle von vier

Berlin 1891 Januar 7.

Massenproducten, u. s. w., d. h. allgemein im Falle von n Massenpunkten.

Man kann also stets n sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze anziehende Massenpunkte in gegebener Reihenfolge $m_1, m_2, \dots, m_n$ so auf einer geraden Linie anordnen, dass die auf jeden Punkt wirkende Anziehungsresultante dem Abstände vom Schwerpunkte des ganzen Systems proportional ist. Im Ganzen sind bei verschiedenen Reihenfolgen $\frac{1}{2}n!$ solche Anordnungen möglich.

Nimmt man nun an, dass alle Punkte parallele, jedoch beliebig gegen die gerade Linie geneigte Geschwindigkeiten besitzen, welche den Abständen vom Schwerpunkte proportional sind, so beschreiben die Punkte ähnliche in derselben Ebene gelegene Bahnen um den Schwerpunkt, bleiben also unter Beibehaltung der Verhältnisse ihrer gegenseitigen Abstände stets auf einer durch den Schwerpunkt gehenden und um diesen sich drehenden geraden Linie.

Es lässt sich auch leicht entscheiden, von welcher Art die von den Punkten beschriebenen Bahnen sind. Durch Auflösung der Gleichungen (A) erhält man offenbar alle Abscissen durch eine einzige ausgedrückt, also

$$x_1 = a_1 x_n, \quad x_2 = a_2 x_n, \quad \dots, \quad x_{n-1} = a_{n-1} x_n.$$

Da nun in der Natur

$$\varphi(\Delta) = \frac{k^2}{\Delta^2},$$

so hat K jedenfalls die Form

$$K = \frac{c}{x_n^3}.$$

Auf den Punkt m_n wirkt also die beschleunigende Kraft $\frac{c}{x_n^3}$, so dass der Punkt m_n einen Kegelschnitt beschreibt.

Die anderen Punkte beschreiben ähnliche Kegelschnitte.

Die Behandlung der mit Leichtigkeit integrablen Fälle, in denen n Punkte von gleicher Masse in den Ecken eines regulären n -Ecks stehen, hat kein besonderes Interesse.

R. Lehmann-Filhés.

Einige nachträgliche Bemerkungen zu dem Artikel

„Ueber die Bahnen der Planetenmonde in Bezug auf die Sonne“. (Astr. Nachr. Nr. 3007).

Von Prof. Dr. G. D. E. Weyer in Kiel.

1) Die nöthigen Data bezüglich der geocentrischen Winkelbewegung des Mondes und der Sonne bei der betreffenden Untersuchung der linearen Mondbewegung um die Sonne, konnten schon durch die Beobachtungsergebnisse aus dem Alterthum als bekannt angesehen werden. Auch in Hinsicht der Entfernung des Mondes von der Erde würde das von Ptolemaeus erhaltene Resultat dabei für den vorhandenen Zweck genügt haben.

2) Wegen der erforderlichen Annahme über die Entfernung der Sonne von der Erde, bemerkte Kepler (Epit. Astron. Copern. Lib. VI, pag. 885, Edit. Francof. 1635), dass die Sonnenparallaxe den Betrag von einer Minute nicht überschreiten werde. Es ist auch zu vermuthen, dass

Kepler bei seiner Figur der Mondbahn um die Sonne (De mot. stellae Martis, Cap. 37, pag. 312, Edit. Frisch) diesen extremen oder doch keinen viel kleineren Werth der Sonnenparallaxe benutzt haben wird, und dann ist auch diese Figur mit ihren Inflexionspunkten noch ganz richtig, wie die Nachrechnung ergibt, welche die vorhandenen Inflexionen bei 121° und 239° als Winkel zwischen den Richtungen Sonne-Erde und Erde-Mond anzeigt. Es ist sogar in der kleinen Figur (nur ein beiläufiges Anhängsel zur Fig. 88) eine besondere Sorgfalt zu erkennen, mit welcher die obere und untere Bahnhälfte von einander verschieden gezeichnet sind.

3) Die spätere Wiederholung ähnlicher Figuren für

die Mondbahn, entweder mit Inflexionen oder als Epicykloiden, selbst in unserer Zeit, wo die Sonnenparallaxe längst in ihrem kleinen Werthe bekannt ist, kann freilich nicht mehr als richtig gelten, aber noch zu Newton's Zeit, wenigstens im Jahre 1687, würde eine solche Figur nicht unbegründet erscheinen. Denn wenn Newton (Philos. nat. princ. math. pag. 413 und 415) damals als ersten Versuch einer Bestimmung der Erdmasse, dieselbe zu 1 : 28700 mit Hülfe einer Sonnenparallaxe von 20" berechnete, so würde dies auch noch einer Mondbahn (um die Sonne) mit Inflexionen entsprechen, welche bei 164° 25' und 195° 35', also schon ziemlich nahe bei der Conjunction eintreten. Soll die Inflexion nur bei der Conjunction selbst erfolgen, also ohne Zeichenwechsel bei dem Uebergange durch 180° stattfinden, so ergibt sich 19° 14' für die Sonnenparallaxe als Grenzwert, innerhalb welchem überhaupt keine Inflexion der Mondbahn mehr vorkommen kann.

4) Schjellerup (pag. 169) hat bezüglich dieser Inflexion den Grenzwert für die Mondentfernung von der Erde berechnet, und gefunden, dass der Mond weniger als 1 : 595.83 Sonnenweiten von der Erde entfernt sein müsste, damit eine Inflexion zu Stande käme. Er bediente sich dabei der Mondentfernung 1 : 398.811, entsprechend der Encke'schen Sonnenparallaxe 8" 58, womit die Nachrechnung auch nahe übereinstimmend das Resultat 1 : 596.3 ergibt; dagegen würde mit der neueren Sonnenparallaxe 8" 85 die Entfernung 1 : 386.68 und jener Grenzwert auf 1 : 568.7 kommen.

5) Wenn hiernach erst für Monde, die weniger als 1 : 568.7 von der Erde entfernt wären, die Inflexionen in ihrer Bahn um die Sonne beginnen, so kann es bei fortgesetzter Annäherung doch nicht (wie für die innern Jupiters- und Saturnsatelliten) zu Doppelpunkten der Bahnen während eines Umlaufs kommen, indem dafür die Masse der Erde zu gering und ihre Bewegung um die Sonne zu schnell ist. Selbst ein Satellit der Erde, welcher sich frei in der Nähe ihrer Oberfläche um die Erde bewegte, würde in der Conjunction mit der Sonne noch nicht die lineare Geschwindigkeit der Erde erreichen, und daher auch seine Bahn um die Sonne nur mit Inflexionen beschreiben.

6) Andererseits würde für alle Erdsatelliten, die weiter als 1 : 568.7 von der Erde entfernt wären, die Eigentümlichkeit bleiben, dass ihre Bahnen um die Sonne stets die concave Seite der Sonne zuwenden. Diese Bahnen können sich auch bis zu einer gewissen Grenze immer mehr der Form eines Kreises nähern, in dessen Centrum sich die Krümmungsmittelpunkte nahezu vereinigen, während die Sonne selbst eine excentrische Lage in diesem Kreise einnehmen würde. Speciell ergibt sich für den Fall, wenn unser Mond $3\frac{1}{2}$ mal so weit als gegenwärtig von der Erde entfernt wäre (genauer 3.54838), wodurch ihm; zufolge des Kepler'schen Gesetzes, eine siderische Umlaufszeit von einem

halben Jahre zukäme, also das Verhältniss $\frac{\mu'}{\mu} = M = 2$ und $\frac{a}{a'} = R = 108.967$ würde, dass alsdann der grösste

Krümmungsradius 109.004 in den Syzygien, und der kleinste 108.948 in den Quadraturen beträgt. Die Linie der Syzygien wäre dann das Doppelte von 108.967 als kleine Axe der ovalen Bahn, deren grosse Axe das Doppelte von

109.183 wäre, so dass die ganze Mondbahn um die Sonne sehr wenig von einer Kreisbahn verschieden sein würde. Die Sonne aber hätte dabei eine excentrische Lage und zwar in der kleinen Axe des Ovals, indem der Sonnenort um das Stück a' (der Mondentfernung von der Erde) vom Mittelpunkt der Bahn, nach der Seite der Conjunction hin, entfernt läge. Für die einzelnen Krümmungsradien $\left(\frac{\rho}{a'}\right)$ ergibt sich bei einer solchen Mondbahn nach den früheren Bezeichnungen Folgendes, wodurch die sehr angenäherte Kreisform der Bahn ersichtlich ist.

Resultat für $\frac{\mu'}{\mu} = M = 2$ und somit $\frac{a}{a'} = R = 108.967$

$\mu' t - \mu t$	$\frac{\rho}{a'}$	$\mu' t - \mu t$
0° 0'	109.002	360° 0'
22 30	108.995	337 30
45 0	108.977	315 0
67 30	108.957	292 30
90 0	108.948	270 0
112 30	108.956	247 30
135 0	108.975	225 0
157 30	108.996	202 30
180 0	109.005	180 0

7) Zu den angeführten wenigen Schriften, wo die Form der Mondbahn um die Sonne besprochen und richtig angegeben ist, gehört auch das »Kleine Lehrbuch der astronomischen Geographie« von E. Wetzel, Berlin 1877, pag. 90, mit sehr guten Erläuterungen und Abbildungen; ferner die neue Ausgabe von Littrow's »Wunder des Himmels« von Prof. E. Weiss, Berlin 1886, pag. 911; auch kürzlich eine Darstellung mit Figuren von Dr. F. Koerber in der Zeitschrift »Himmel und Erde«, herausgeg. v. d. Ges. Urania, Redact. Dr. M. W. Meyer, Heft 5, Berlin 1891 pag. 228.

Aber auf der andern Seite hat sich bei weiterer Vergleichung leider auch die Zahl der Schriften gemehrt, wo namhafte Autoren entweder bei dem ältesten, für seine Zeit (mit 1' Sonnenparallaxe) richtigen Kepler'schen Mondbahnenentwurf mit Inflexionspunkten, als »schlangenförmig fortlaufende Linien« stehen geblieben sind*), oder (nach Mädler) der Mondbahn die Form einer Epicykloide mit Rückkehrpunkten oder Spitzen gegeben haben**), so dass solche irrigen Angaben, nicht nur in populären Schriften, allem Anscheine nach noch lange fortauern werden und auch zu weiteren Irrthümern Anlass geben können. So lesen wir in der unten zuletzt angeführten Schrift pag. 223: »Wellenförmige d. h. verkürzte Epi-Curven, beschreibt auch der Mond um die Sonne, trotz der 100000 geogr. Meilen, die die irdische Mondbahn zum Durchmesser hat. Die verkürzte Epi-Elliptocykloide V_k in Fig. 12 giebt eine annähernde

*) Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Von Prof. C. Neumann, Leipzig 1870, pag. 26.

**) Ueber das Verhältniss zwischen Geometrie, Mechanik und Kinematik. Von Prof. F. Reuleaux, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 34, Berlin 1890, pag. 223.

Vorstellung von der Mondbahn, abgesehen davon, dass die Erdbahn eine weit weniger gedrückte Ellipse ist, als die in der Figur dargestellte. Die weichen Ausbiegungen, die man die Evectionen der Mondbahn nennt, erkannte schon Ptolemaeus. — Also auch das noch! Ausserdem zeigt die

Figur, worauf hier verwiesen wird, weder eine verkürzte noch verlängerte, sondern eine einfache Epicykloide mit Spitzen, wie bei Mädler, dessen übereilter Entwurf der Mondbahn um die Sonne doch wohl hauptsächlich Schuld an dem langlebigen Vorurtheil darüber ist.

Bestimmung der Parallaxe von β Orionis.

In Nr. 166 des »Observatory« (Sept. 1890) hat Dr. Gill eine Mittheilung über die Bestimmung der Parallaxe von β Orionis gemacht, wonach dieselbe im Vergleich mit zwei Vergleichsternen achter Grösse den Werth -0.17 hat und sich somit das auffallende Resultat ergeben würde, dass ein Stern erster Grösse sich in grösserer Entfernung von uns befindet als Sterne von bedeutend geringerer Helligkeit. Man findet an genannter Stelle die Resultate der Abstandsmessungen:

	Von Stern a	Von Stern b
	Factor von π	Factor von π
1888 März	2959.672 -0.88	3283.137 $+0.87$
1888 October	561 $+0.88$	691 -0.87
1889 März	673 -0.88	115 $+0.86$

und daraus Parallaxe von β Orionis in Bezug auf Stern $a = -0.064$, auf Stern $b = -0.325$

und aus beiden Bestimmungen mit Rücksicht auf die Gewichte $\pi = -0.167$.

Zur Prüfung der von Dr. Gill bestimmten Parallaxe habe ich dieselben Beobachtungen am Heliometer der Göttinger Sternwarte wiederholt und den Abstand zwischen β Orionis und den beiden Vergleichsternen im Herbst 1890 an 5 und im Frühjahr 1891 an 6 Abenden je zweimal gemessen. Da β Orionis 8 Grad südlicher Declination hat, also in Göttingen erheblich niedriger als am Cap steht und auch die Witterung störend dazwischen trat, so ist es mir nicht gelungen, die Beobachtungen enge um die beiden Epochen des grössten Parallaxenfactors 0.88, nämlich Ende September und Ende März zu legen, sondern im Herbst fielen dieselben hauptsächlich in die Mitte des Octobers und im Frühjahr zwischen Febr. 24 und März 23, jedoch sind die Factoren im Mittel immer noch gross genug.

Das Ergebniss meiner Beobachtungen ist nun folgendes:

	Stern a	Stern b
	Factor	Factor
1890 Herbst	2959.93 ± 0.062 $+0.81$	3283.41 ± 0.093 -0.81
1891 Frühjahr	71 ± 0.060 -0.82	37 ± 0.044 $+0.81$
mithin	$+0.22 \pm 0.086 = 1.63 \pi$	$-0.04 \pm 0.103 = 1.62 \pi$

und daraus Parallaxe von β Orionis im Vergleich mit Stern $a = +0.135 \pm 0.053$, mit Stern $b = -0.025 \pm 0.064$

und aus beiden Reihen $\pi = +0.055 \pm 0.041$.

Während also Dr. Gill bei Stern a einen geringeren, bei b dagegen den erheblichen Unterschied von mehr als einer halben Secunde zwischen den Frühljahrs- und Herbstbeobachtungen gefunden hat, gestaltet sich die Sache nach meinen Beobachtungen gerade umgekehrt und wenn man aus diesen Messungen eine Parallaxe ableiten will, deren Betrag nicht durch die Unsicherheit in den Beobachtungen verdeckt wird, so könnte nur die aus Stern a folgende Bestimmung in Betracht kommen, die einen positiven Werth liefert. Im Mittel aus beiden Reihen erhalte ich dagegen einen kleinen positiven Werth, der seinen aus der inneren Uebereinstimmung der Abendresultate während derselben Jahreszeit berechneten wahrscheinlichen Fehler nur um ein Geringes übertagt.

Ich betrachte übrigens diese Mittheilung nur als eine

Göttingen 1891 April 9.

vorläufige, da ich beabsichtige, die Beobachtungen im Herbst noch weiter fortzusetzen.

Wenn man etwa eine Erklärung für die Unterschiede zwischen den am Cap und in Göttingen erhaltenen Resultaten darin suchen will, dass die Jahreszeiten einander entgegengesetzt sind und deshalb der Wärmeeinfluss auf den Messapparat die Ursache sein könnte, so ist in Bezug auf die Göttinger Messungen zu bemerken, dass die Temperaturen während der beiden Beobachtungsreihen im Mittel sehr nahe dieselben waren und überdiess die Instrumental-Constanten des jetzt seit $2\frac{1}{4}$ Jahren im Gebrauch befindlichen Heliometers so genau untersucht und in Rechnung gebracht sind, dass in dieser Hinsicht die Beobachtungsergebnisse als einwurfsfrei betrachtet werden müssen.

Wilhelm Schur.