Ueber ein Verfahren, die Ergebnisse mehrfacher Beobachtungen eines Dreiecksnetzes mit einander zu verbinden.

Von Dr. L. Krüger.

Unter der Annahme, dass für ein Dreiecksnetz oder einen Theil desselben zweifache, zu verschiedenen Zeiten erfolgte Bestimmungen vorliegen, bei denen aber die Unsicherheiten in Betreff der Identität der Dreieckspunkte wesentlich grösser sind, als die, welche ihnen in Folge der Netzbeobachtungen anhaften, hat Herr Prof. Helmert in der Längengradmessung^{*)}, 1. Kap. § 21, S. 47 und f., ein besonderes Verfahren, die Resultate der Messungen zu verbinden, benutzt. Dasselbst ist auch ein von mir herrührendes Formelsystem für diesen Fall mitgetheilt, das im Folgenden etwas ausführlicher behandelt und auf m Beobachtungsreihen ausgedehnt werden soll. Es folgt alsdann noch eine andere Ableitung.

1.

Die verschiedenen Beobachtungen mögen die m Figuren 1. 2. 3. . . . n , 1'. 2'. 3'. . . . n' , 1''. 2''. 3''. . . . n'' , u. s. w. ergeben haben, welche in beliebige, aber einander nahe Lagen gebracht seien. Die rechtwinkligen Coordinaten der zusammen-

gehörigen Punkte $i, i', i'', \dots$ seien der Reihe nach $x_i, y_i; x_i + \xi_i', y_i + \eta_i'; x_i + \xi_i'', y_i + \eta_i''$; u. s. w.

Wenn die Lagen der Punkte $i, i', i'', \dots$ gegen einander bekannt wären, so würden die plausibelsten Werthe $(x_i + \xi_i, y_i + \eta_i)$ für die Lage des Dreieckspunktes dadurch bestimmt sein, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen $\rho_i^{(p)}$ — dieselben als Fehler betrachtet — von den Punkten $i, i', i'', \dots$ ein Minimum wird. Diese Bedingung erfüllt aber der Schwerpunkt der Punkte $i, i', i'', \dots, i^{(m-1)}$.

Setzt man in

$$\sum_p (\rho_i^{(p)})^2 = \sum_p \left((\xi_i^{(p)} - \xi_i)^2 + (\eta_i^{(p)} - \eta_i)^2 \right)$$

$$\xi_i = \frac{1}{m} \sum_p \xi_i^{(p)}, \quad \eta_i = \frac{1}{m} \sum_p \eta_i^{(p)},$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \sum_p (\rho_i^{(p)})^2 &= \sum_p (\xi_i^{(p)})^2 + \sum_p (\eta_i^{(p)})^2 - \frac{1}{m} \left[\left(\sum_p \xi_i^{(p)} \right)^2 + \left(\sum_p \eta_i^{(p)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{r,q} \left((\xi_i^{(r)} - \xi_i^{(q)})^2 + (\eta_i^{(r)} - \eta_i^{(q)})^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei $\xi^{(0)} = 0 = \eta^{(0)}$ ist.

Die Figuren 1. 2. 3. . . . , 1'. 2'. 3'. . . . , 1''. 2''. 3''. . . . , u. s. w. wird man nun so aneinander fügen, dass

$$\sum_p (\rho_i^{(p)})^2$$

über alle Punkte $i = 1, 2, 3, \dots$ genommen, seinen kleinsten Werth erhält; dies ist aber nach Gleichung (1) der Fall, wenn die Summe der Quadrate aller möglichen Entfernungen zwischen den gleichnamigen Punkten, nämlich

$$\sum_i \sum_{r,q} \left((\xi_i^{(r)} - \xi_i^{(q)})^2 + (\eta_i^{(r)} - \eta_i^{(q)})^2 \right) \quad (2)$$

ein Minimum wird.

Hierbei sind noch die zwischen den ξ und η bestehenden Bedingungsgleichungen zu berücksichtigen.

Die Entfernungen entsprechender Punkte

$$(i.k), (i'.k'), (i''.k''), \dots$$

seien

$$s_{i,k}, (s_{i,k} + \sigma_{i,k}') (1 - \mu'), (s_{i,k} + \sigma_{i,k}'') (1 - \mu''), \dots,$$

wo $\mu', \mu'', \dots$ die Aenderungen des Maassstabes der 2., 3., . . . Figur bedeuten. Die Einführung der μ bezweckt, die Figuren einander möglichst nahe zu bringen, und etwaige systematische Unterschiede in den Seitenlängen erkennen zu lassen.

Es wird vorausgesetzt, dass die ξ, η, σ und $s\mu$ kleine Grössen erster Ordnung sind, deren Potenzen und Producte man vernachlässigen kann.

^{*)} Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. 1. Heft. Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen, herausgegeben von F. R. Helmert. Berlin 1893. Veröffentlichung des Königl. Geodätischen Instituts und Centralbureaus der Internationalen Erdmessung.

Die Lage der Seite $(i'.k')$ zur Seite $(i.k)$ wird wie folgt erhalten, wobei es in Folge der Annahmen genügt, die Figuren als ebene anzusehen. Aus

$$s_{i,k}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2$$

ergibt sich:

$$(\xi_k' - \xi_i') \cos a_{i,k} + (\eta_k' - \eta_i') \sin a_{i,k} + s_{i,k} \mu' = \sigma_{i,k}'. \quad (3)$$

Ebenso hat man für die Lage der Seite $(i''.k'')$ zur Seite $(i.k)$:

$$(\xi_k'' - \xi_i'') \cos a_{i,k} + (\eta_k'' - \eta_i'') \sin a_{i,k} + s_{i,k} \mu'' = \sigma_{i,k}'', \quad (4)$$

und für den Uebergang von der Seite $(i'.k')$ zur Seite $(i''.k'')$:

$$\begin{aligned} &[(\xi_k'' - \xi_k') - (\xi_i'' - \xi_i')] \cos a_{i,k}' + [(\eta_k'' - \eta_k') - (\eta_i'' - \eta_i')] \sin a_{i,k}' \\ &+ (s_{i,k} + \sigma_{i,k}') (1 - \mu') (\mu'' - \mu') = \sigma_{i,k}'' - \sigma_{i,k}' \end{aligned} \quad (5)$$

wo $a_{i,k}'$ das Azimut der Seite $(i'.k')$ ist.

In Folge der gemachten Voraussetzung ist die Gleichung (5) gleich der Differenz der beiden vorigen, (3) und (4). Man braucht daher nur die Bedingungsgleichungen von der Form

$$(\xi_k^{(r)} - \xi_i^{(r)}) \cos a_{i,k} + (\eta_k^{(r)} - \eta_i^{(r)}) \sin a_{i,k} + s_{i,k} \mu^{(r)} = \sigma_{i,k}^{(r)}$$

zu berücksichtigen, wenn der Ausdruck (1) zum Minimum gemacht wird.

2.

Es sei zunächst die Lage zweier Figuren gegen einander zu bestimmen. Diese seien 1.2.3... mit den Coordinaten und Seiten $x_i, y_i; s_{i,k}$ und 1'.2'.3'... mit den Coordinaten und Seiten

$$x_i + \xi_i, \quad y_i + \eta_i, \quad s_{i,k} + \sigma_{i,k} - s_{i,k} \mu.$$

Dann ist $\Sigma(\xi^2 + \eta^2)$ in Bezug auf die ξ, η und die Unbekannte μ zum Minimum zu machen, während die Gleichungen

$$(\xi_k - \xi_i) \cos a_{i,k} + (\eta_k - \eta_i) \sin a_{i,k} + s_{i,k} \mu = \sigma_{i,k} \quad (1)$$

bestehen bleiben. (Vergl. Helmert, Ausgleichsrechnung, S. 215). Sind die Figuren n -Ecke, so giebt es, entsprechend der Anzahl der zu ihrer Festlegung nöthigen Seiten, $(2n-3)$ solche, von einander unabhängige Gleichungen. Die Figuren mögen nun im Hinblick auf eine später zu behandelnde Anwendung aus 3 aneinander stossenden Dreiecken 1.2.3,

2.3.4, 3.4.5 und den entsprechenden bestehen. Für jede Seite erhält man eine Bedingungsgleichung, im Ganzen also 7. Wird die zu jeder Gleichung gehörende Correlate entsprechend $s_{i,k}$ mit $k_{i,k}$ bezeichnet, so geben die Ableitungen nach ξ und η :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -k_{1,2} \cos a_{1,2} - k_{1,3} \cos a_{1,3} \\ \xi_2 &= +k_{1,2} \cos a_{1,2} - k_{2,3} \cos a_{2,3} - k_{2,4} \cos a_{2,4} \\ \xi_3 &= +k_{1,3} \cos a_{1,3} + k_{2,3} \cos a_{2,3} - k_{3,4} \cos a_{3,4} - k_{3,5} \cos a_{3,5} \\ \xi_4 &= +k_{2,4} \cos a_{2,4} + k_{3,4} \cos a_{3,4} - k_{4,5} \cos a_{4,5} \\ \xi_5 &= +k_{3,5} \cos a_{3,5} + k_{4,5} \cos a_{4,5} \\ \eta_1 &= -k_{1,2} \sin a_{1,2} - k_{1,3} \sin a_{1,3} \\ \eta_2 &= +k_{1,2} \sin a_{1,2} - k_{2,3} \sin a_{2,3} - k_{2,4} \sin a_{2,4} \\ \eta_3 &= +k_{1,3} \sin a_{1,3} + k_{2,3} \sin a_{2,3} - k_{3,4} \sin a_{3,4} - k_{3,5} \sin a_{3,5} \\ \eta_4 &= +k_{2,4} \sin a_{2,4} + k_{3,4} \sin a_{3,4} - k_{4,5} \sin a_{4,5} \\ \eta_5 &= +k_{3,5} \sin a_{3,5} + k_{4,5} \sin a_{4,5} \end{aligned} \quad (2)$$

und die Ableitung nach μ :

$$0 = s_{1,2} k_{1,2} + s_{1,3} k_{1,3} + s_{2,3} k_{2,3} + s_{2,4} k_{2,4} + s_{3,4} k_{3,4} + s_{3,5} k_{3,5} + s_{4,5} k_{4,5}. \quad (3)$$

Es ist leicht ersichtlich, wie diese Gleichungen weiter zu bilden sind, wenn noch mehrere Dreiecke vorhanden sind.

Multipliziert man die Gleichungen (2) der Reihe nach mit ξ_i , η_i und addirt sie sodann, so erhält man in Folge der Bedingungsgleichungen (1) und der Gleichung (3) die bekannte Formel

$$\Sigma(\xi^2 + \eta^2) = \Sigma k_{i,k} \sigma_{i,k}. \quad (4)$$

Aus (2) folgt ferner:

$$\Sigma \xi = 0 \text{ und } \Sigma \eta = 0 \quad (5)$$

oder auch:

$$\Sigma(x + \xi) - \Sigma x = 0 = \Sigma(y + \eta) - \Sigma y.$$

Da

$$(x_k - x_i) \sin a_{i,k} - (y_k - y_i) \cos a_{i,k} = 0$$

und

$$(x_k - x_i) \cos a_{i,k} + (y_k - y_i) \sin a_{i,k} = s_{i,k},$$

so hat man weiter aus (2):

$$\Sigma(y \xi - x \eta) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x &= g \cos f, & x + \xi &= [g(1 - \mu) + \gamma] \cos(f + \varphi + \delta) \\ y &= g \sin f, & y + \eta &= [g(1 - \mu) + \gamma] \sin(f + \varphi + \delta), \end{aligned}$$

mithin

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (-g\mu + \gamma) \cos f - g \sin f \cdot (\varphi + \delta) \\ \eta &= (-g\mu + \gamma) \sin f + g \cos f \cdot (\varphi + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mit diesen Werthen gehen aber (6) und (7) über in:

$$\Sigma g^2 (\varphi + \delta) = 0$$

und

$$\Sigma g (-g\mu + \gamma) = 0,$$

woraus

$$\delta = -\frac{\Sigma g^2 \cdot \varphi}{\Sigma g^2}, \quad \mu = \frac{\Sigma g \cdot \gamma}{\Sigma g^2}. \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{\Sigma (-x_0 \eta_0 + y_0 \xi_0)}{\Sigma (x_0^2 + y_0^2)}, & \mu &= \frac{\Sigma (x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0)}{\Sigma (x_0^2 + y_0^2)} \\ \xi &= \xi_0 - y_0 \delta - x_0 \mu \\ \eta &= \eta_0 + x_0 \delta - y_0 \mu, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

worin also ξ_0 , η_0 die Koordinatenunterschiede bedeuten, wenn beide Figuren beliebig, aber mit ihren Schwerpunkten zusammengelegt sind. Fällt der Schwerpunkt der zweiten Figur noch nicht mit dem der ersten zusammen, so lässt sich dies erreichen, indem man die zweite Figur parallel den Koordinatenachsen um δ_x und δ_y verschiebt. Sind in diesem Falle die Koordinatenunterschiede ξ^* , η^* , so ist

$$\xi^* + \delta_x = \xi_0, \quad \eta^* + \delta_y = \eta_0. \quad (10^*)$$

δ_x und δ_y bestimmen sich aus den Gleichungen

und mit Hilfe von (3):

$$\Sigma(x \xi + y \eta) = 0. \quad (7)$$

Die Gleichungen (5) werden erfüllt, wenn beide Figuren mit den Schwerpunkten ihrer Eckpunkte zusammengelegt werden und nun der Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt gelegt wird, denn alsdann ist

$$\Sigma(x + \xi) = 0 = \Sigma x$$

und

$$\Sigma(y + \eta) = 0 = \Sigma y.$$

Sind also von vornherein beide Figuren mit den Schwerpunkten aufeinander gelegt, so braucht man die eine Figur nur noch um den Schwerpunkt zu drehen, um in die Minimumlage zu kommen.

Es seien nun in Bezug auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt als Anfangspunkt g , f die Polarcordinaten der Punkte 1, 2, 3... und $g(1 - \mu) + \gamma$, $f + \varphi$ die Polarcordinaten der Punkte 1', 2', 3', ...; γ und φ wieder als kleine Grössen gegen g und f vorausgesetzt. Durch eine Drehung der zweiten Figur um den Winkel δ werde die Minimumlage herbeigeführt. Dann ist also jetzt zu setzen:

Wird nun von den Polarcordinaten wieder zu rechtwinkligen Coordinaten, die jetzt mit

$$(x_0, y_0) \text{ und } (x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0)$$

bezeichnet werden mögen, übergegangen, so ist

$$g^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad g \cdot \gamma = x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0$$

$$f = \arctan \frac{y_0}{x_0}, \quad \varphi = \frac{x_0 \eta_0 - y_0 \xi_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

und daher

$$\Sigma(x_0 + \xi^*) + n \cdot \delta_x = 0, \quad \Sigma(y_0 + \eta^*) + n \cdot \delta_y = 0$$

zu

$$\delta_x = -\frac{\Sigma \xi^*}{n} \text{ und } \delta_y = -\frac{\Sigma \eta^*}{n}. \quad (10^{**})$$

Die Gleichungen (10), (10*), (10**) sind von Herrn Prof. Helmert gegeben.

Wenn andererseits die Ausdrücke für die ξ und η , Gleichung (2), in die Bedingungsgleichungen, (1), eingesetzt werden, so ergeben sich zur Bestimmung der Correlaten die nachfolgenden Normalgleichungen:

(10)

$$\begin{aligned}
& 2k_{1,2} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) k_{1,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) k_{2,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) k_{2,4} + s_{1,2} \mu = \sigma_{1,2} \\
& \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) k_{1,2} + 2k_{1,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{2,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{3,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{3,5} + s_{1,3} \mu = \sigma_{1,3} \\
& \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) k_{1,2} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{1,3} + 2k_{2,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 3 \cdot 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) k_{2,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{3,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{3,5} + s_{2,3} \mu = \sigma_{2,3} \\
& \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) k_{1,2} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 3 \cdot 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) k_{2,3} + 2k_{2,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) k_{3,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) k_{4,5} + s_{2,4} \mu = \sigma_{2,4} \\
& \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{1,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{2,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) k_{2,4} + 2k_{3,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 4 \cdot 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{3,5} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 3 \cdot 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) k_{4,5} + s_{3,4} \mu = \sigma_{3,4} \\
& \cos \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{1,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{2,3} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 4 \cdot 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) k_{3,4} + 2k_{3,5} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 3 \cdot 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right) k_{4,5} + s_{3,5} \mu = \sigma_{3,5} \\
& \cos \left(\begin{smallmatrix} 2 \cdot 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) k_{2,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 3 \cdot 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) k_{3,4} + \cos \left(\begin{smallmatrix} 3 \cdot 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right) k_{3,5} + 2k_{4,5} + s_{4,5} \mu = \sigma_{4,5} \\
& s_{1,2} k_{1,2} + s_{1,3} k_{1,3} + s_{2,3} k_{2,3} + s_{2,4} k_{2,4} + s_{3,4} k_{3,4} + s_{3,5} k_{3,5} + s_{4,5} k_{4,5} = 0
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, wie die Normalgleichungen fortzusetzen sind, wenn noch weitere Dreiecke vorhanden sind. Sind aus den Gleichungen (10) die k gewonnen, wozu eine dreistellige Rechnung völlig genügt, so geben die Gleichungen (2) die ξ und η . Die k sind übrigens von der Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängig. Wird der Abstand der

zusammengehörigen Punkte i und i' durch e_i und dessen Azimut durch ϑ_i bezeichnet, so ist endlich:

$$e_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2, \quad \tan \vartheta_i = \frac{\eta_i}{\xi_i}.$$

Zur Controlle der Rechnung dienen die Gleichungen:

$$e_k \cos(a_{i,k} - \vartheta_k) - e_i \cos(a_{i,k} - \vartheta_i) = \sigma_{i,k} - s_{i,k} \mu.$$

Für den Fall, dass die beiden Figuren nur aus je einem Dreieck bestehen, lassen sich für die k einfache Ausdrücke angeben. Setzt man

$$2r\mu = \nu,$$

wo r den Radius des dem Dreieck 1.2.3 umgeschriebenen Kreises bedeutet, so lauten alsdann die Normalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
& 2k_{1,2} + \cos(1)k_{1,3} + \cos(2)k_{2,3} + \sin(3)\nu = \sigma_{1,2} \\
& \cos(1)k_{1,2} + 2k_{1,3} + \cos(3)k_{2,3} + \sin(2)\nu = \sigma_{1,3} \\
& \cos(2)k_{1,2} + \cos(3)k_{1,3} + 2k_{2,3} + \sin(1)\nu = \sigma_{2,3} \\
& \sin(3)k_{1,2} + \sin(2)k_{1,3} + \sin(1)k_{2,3} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Mit Hülfe der folgenden Multiplikatoren:

$$\begin{aligned}
& +1, -\cos(1), -\cos(2), +\sin(3); \quad -\cos(1), +1, -\cos(3), +\sin(2); \\
& -\cos(2), -\cos(3), +1, +\sin(1); \quad +\sin(3), +\sin(2), +\sin(1), -3,
\end{aligned}$$

erhält man hieraus, wenn

$$\sin^2(1) + \sin^2(2) + \sin^2(3) = D \quad (12)$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned}
D \cdot k_{1,2} &= \sigma_{1,2} - \sigma_{1,3} \cos(1) - \sigma_{2,3} \cos(2) \\
D \cdot k_{1,3} &= -\sigma_{1,2} \cos(1) + \sigma_{1,3} - \sigma_{2,3} \cos(3) \\
D \cdot k_{2,3} &= -\sigma_{1,2} \cos(2) - \sigma_{2,3} \cos(3) + \sigma_{2,3} \\
D \cdot \nu &= \sigma_{1,2} \sin(3) + \sigma_{1,3} \sin(2) + \sigma_{2,3} \sin(1)
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die rechte Seite dieser Gleichungen kann man noch umformen. Aus

$$s_{1,2} = s_{1,3} \cos(1) + s_{2,3} \cos(2)$$

$$\sum s_{i..k} k_{i..k'} = 0, \quad \sum s_{i..k} k_{i..k''} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad \sum s_{i..k} k_{i..k}^{(m-1)} = 0. \quad (4)$$

Wenn nun

[illegible]

gesetzt wird, so folgt aus den Gleichungen (3)

$$\left. \begin{aligned} \xi_i' &= -\sum x_{i,x'} \cos a_{i,x} & \eta_i' &= -\sum x_{i,x'} \sin a_{i,x} \\ \xi_i'' &= -\sum x_{i,x''} \cos a_{i,x} & \eta_i'' &= -\sum x_{i,x''} \sin a_{i,x} \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \xi_i^{(m-1)} &= -\sum x_{i,x^{(m-1)}} \cos a_{i,x} & \eta_i^{(m-1)} &= -\sum x_{i,x^{(m-1)}} \sin a_{i,x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Aus den Gleichungen (4) aber lässt sich ableiten

$$\sum s_{i, k} x_{i, k'} = 0, \quad \sum s_{i, k} x_{i, k''} = 0, \quad \dots \quad \sum s_{i, k} x_{i, k}^{(m-1)} = 0. \quad (6)$$

Führt man die Werthe (5) für ξ und η in die Bedingungsgleichungen (2) ein, so erhält man zur Bestimmung jedes Correlatensystems $x_{i.k}^{(r)}$ ein Normalgleichungssystem von der unter 2., Gleichung (10), gegebenen Form, also für jede Seite $i.k$:

$$\left. \begin{aligned} \sum x_{i,x}^{(r)} \cos \binom{k \cdot x}{i} + \sum x_{k,y}^{(r)} \cos \binom{i \cdot y}{k} + s_{i,k} \ell^{(r)} &= g_{i,k}^{(r)} \\ \sum s_{i,k} x_{i,x}^{(r)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und ausser diesen Gleichungen :

Mit x sind hierin wieder die Punkte bezeichnet, nach denen von i aus Verbindungslinien und mit y die Punkte, nach denen von k aus Verbindungslinien gehen.

Die $\alpha_{i,k'}$, $\alpha_{i,k''}$, $\alpha_{i,k'''}$, . . . und damit auch die (ξ', η') ; (ξ'', η'') ; (ξ''', η''') ; . . . sind demnach von einander unabhängig. In der That erhält man für $\xi_i^{(r)}$ und $\eta_i^{(r)}$ genau dieselben Werthe wie aus (5) und (7), wenn nur

$$\sum_i \left((\xi_i^{(r)})^2 + (\eta_i^{(r)})^2 \right)$$

zum Minimum gemacht wird und die Bedingungsgleichungen

$$(\xi_k^{(r)} - \xi_i^{(r)}) \cos a_{i,k} + (\eta_k^{(r)} - \eta_i^{(r)}) \sin a_{i,k} + s_{i,k} u^{(r)} = \sigma_{i,k}^{(r)}$$

berücksichtigt werden. Durch $\xi_i^{(r)}$ und $\eta_i^{(r)}$ ist aber die Lage der Figur $1^{(r)}, 2^{(r)}, \dots, n^{(r)}$ gegen die willkürlich ausgewählte Figur $1, 2, \dots, n$ festgelegt.

Hieraus folgt: die Lage irgend zweier der m Figuren zu einander wird (in Folge der gemachten Voraussetzungen) dadurch bestimmt, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen ihrer gleichnamigen Punkte zum Minimum wird.

4.

Es soll nun noch ein anderes Verfahren zur Verbindung zweier Figuren entwickelt werden. Die Figur

1'. 2'. 3' . . . sei in irgend eine, aber der Figur 1. 2. 3. . . nahe Lage gebracht. Von einem beliebigen Punkte der Figur 1. 2. 3. . . , etwa dem Punkte 1 aus, denke man sich sämtliche Verbindungslinien nach den anderen Punkten gezogen. Wie bisher werden die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes k mit x_k, y_k , die des Punktes k' mit $x_k + \xi_k, y_k + \eta_k$, und die Länge und das Azimut der Verbindungslinie (1. k), bezw. (1'. k') mit $s_{1.k}$ und $\alpha_{1.k}$, bezw. mit $(s_{1.k} + \sigma_{1.k})(1 - \mu)$ und $\alpha_{1.k} + \alpha_{1.k}$ bezeichnet. Ferner seien $w_{2.k}$ und $w_{2.k} + \omega_{2.k}$ die Winkel, welche die Verbindungslinien (1. 2) und (1. k) und die Verbindungslinien (1'. 2') und (1'. k') mit einander bilden.

Aus

$$x_k - x_1 = s_{1,k} \cos a_{1,k} \quad y_k - y_1 = s_{1,k} \sin a_{1,k}$$

folgt nun

$$\xi_k - \xi_1 = (s_{1,k} + \sigma_{1,k}) (1 - \mu) \cos (a_{1,k} + \alpha_{1,k}) - s_{1,k} \cos a_{1,k}$$

$$\eta_k - \eta_1 = (s_{1,k} + \sigma_{1,k}) (1 - \mu) \sin (a_{1,k} + \alpha_{1,k}) - s_{1,k} \sin a_{1,k}$$

und entwickelt:

$$\xi_k - \xi_1 = (\sigma_{1,k} - s_{1,k} \cdot \mu) \cos a_{1,k} - s_{1,k} \sin a_{1,k} \cdot \alpha_{1,k}$$

$$\eta_k - \eta_1 = (\sigma_{1,k} - s_{1,k} \cdot \mu) \sin a_{1,k} + s_{1,k} \cos a_{1,k} \cdot \alpha_{1,k}$$

oder da

$$\alpha_{1,k} = \alpha_{1,2} + \omega_{2,k}$$

ist,

$$\left. \begin{aligned} + s_{1,k} \sin a_{1,k} \cdot \omega_{2,k} - \sigma_{1,k} \cos a_{1,k} + \xi_k &= \xi_1 - s_{1,k} \sin a_{1,k} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,k} \cos a_{1,k} \cdot \mu \\ - s_{1,k} \cos a_{1,k} \cdot \omega_{2,k} - \sigma_{1,k} \sin a_{1,k} + \eta_k &= \eta_1 + s_{1,k} \cos a_{1,k} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,k} \sin a_{1,k} \cdot \mu \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da nun

$$\Sigma \xi^2 + \Sigma \eta^2$$

zum Minimum werden soll, so kann man die ξ und η als Fehler, die Gleichungen (1) aber als Fehlergleichungen ansehen. Jede Verbindungslinie (1.k) giebt 2 solche Fehlergleichungen.

Die Fehlergleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 \\ - \sigma_{1,2} \cos a_{1,2} + \xi_2 &= \xi_1 - s_{1,2} \sin a_{1,2} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,2} \cos a_{1,2} \cdot \mu \\ + s_{1,3} \sin a_{1,3} \cdot \omega_{2,3} - \sigma_{1,3} \cos a_{1,3} + \xi_3 &= \xi_1 - s_{1,3} \sin a_{1,3} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,3} \cos a_{1,3} \cdot \mu \\ &\dots \dots \dots \\ + s_{1,n} \sin a_{1,n} \cdot \omega_{2,n} - \sigma_{1,n} \cos a_{1,n} + \xi_n &= \xi_1 - s_{1,n} \sin a_{1,n} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,n} \cos a_{1,n} \cdot \mu \\ \eta_1 &= \eta_1 \\ - \sigma_{1,2} \sin a_{1,2} + \eta_2 &= \eta_1 + s_{1,2} \cos a_{1,2} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,2} \sin a_{1,2} \cdot \mu \\ - s_{1,3} \cos a_{1,3} \cdot \omega_{2,3} - \sigma_{1,3} \sin a_{1,3} + \eta_3 &= \eta_1 + s_{1,3} \cos a_{1,3} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,3} \sin a_{1,3} \cdot \mu \\ &\dots \dots \dots \\ - s_{1,n} \cos a_{1,n} \cdot \omega_{2,n} - \sigma_{1,n} \sin a_{1,n} + \eta_n &= \eta_1 + s_{1,n} \cos a_{1,n} \cdot \alpha_{1,2} - s_{1,n} \sin a_{1,n} \cdot \mu \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wenn es in dem Dreiecksnetz keinen Punkt giebt, von welchem aus sämtliche Verbindungslinien nach den übrigen Punkten vorhanden sind, so kann man für einige Punkte die Fehlergleichungen nicht direct ansetzen. Fehlt z. B. die Verbindungslinie (1.i), kann man aber von 1 nach i mittelst der Verbindungslinien (1.h) und (h.i) gelangen, so hat man zunächst

$$\begin{aligned} \xi_i - \xi_h &= (-s_{h,i} \cdot \mu + \sigma_{h,i}) \cos a_{h,i} - s_{h,i} \sin a_{h,i} \cdot \alpha_{h,i} \\ \eta_i - \eta_h &= (-s_{h,i} \cdot \mu + \sigma_{h,i}) \sin a_{h,i} + s_{h,i} \cos a_{h,i} \cdot \alpha_{h,i} \end{aligned}$$

Bezeichnet $h_{1,i}$ die Differenz der Winkel $1'.h'.i'$ und $1.h.i$, so ist

$$\alpha_{h,i} = \alpha_{1,2} + \omega_{2,h} + h_{1,i},$$

also

$$\left. \begin{aligned} s_{h,i} \sin a_{h,i} (\omega_{2,h} + h_{1,i}) - \sigma_{h,i} \cos a_{h,i} + \xi_i &= \xi_h - s_{h,i} \sin a_{h,i} \cdot \alpha_{1,2} - s_{h,i} \cos a_{h,i} \cdot \mu \\ - s_{h,i} \cos a_{h,i} (\omega_{2,h} + h_{1,i}) - \sigma_{h,i} \sin a_{h,i} + \eta_i &= \eta_h + s_{h,i} \cos a_{h,i} \cdot \alpha_{1,2} - s_{h,i} \sin a_{h,i} \cdot \mu \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hierzu die Fehlergleichungen für ξ_h und η_h addirt, giebt aber ξ_i und η_i auf ξ_1 bzw. η_1 bezogen.

Aus den Fehlergleichungen (2) erhält man 4 Normalgleichungen zur Bestimmung der Koordinatenunterschiede der Punkte 1' und 1, des Winkels, welchen $1'.2'$ mit 1.2 bildet und der Aenderung μ des Maassstabes. Durch die Coordinaten eines Punktes und das Azimut einer Seite ist aber eine Figur festgelegt.

Die Normalgleichungen sind:

$$\left. \begin{aligned} n \xi_1 & - [s \sin a] \alpha_{1,2} - [s \cos a] \mu = - [\sigma \cos a] + [s \sin a \cdot \omega] \\ n \eta_1 & + [s \cos a] \alpha_{1,2} - [s \sin a] \mu = - [\sigma \sin a] - [s \cos a \cdot \omega] \\ - [s \sin a] \xi_1 + [s \cos a] \eta_1 + [s^2] \alpha_{1,2} & = - [s^2 \cdot \omega] \\ - [s \cos a] \xi_1 - [s \sin a] \eta_1 + [s^2] \mu & = + [s \sigma] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hierin bedeutet [...] eine Summe, die sich auf den Punkt 1 bezieht.

Die vorstehenden Gleichungen sind nichts anderes als die unter 2. gegebenen Gleichungen (5), (6) und (7). Sie erhalten eine einfachere Gestalt, wenn man setzt:

$$\left. \begin{aligned} [s \cos a] &= -n x_0', & [\sigma \cos a - s \sin a \cdot \alpha'] &= -n \xi_0', \\ [s \sin a] &= -n y_0', & [\sigma \sin a + s \cos a \cdot \alpha'] &= -n \eta_0', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo $\alpha_{1,i}$ den Winkel bedeutet, welchen 1.i und 1'.i' bei der willkürlich angenommenen Lage der beiden Figuren mit einander bilden; $\alpha_{1,i}' = \alpha_{1,2}' + \omega_{2,i}$. Dividirt man die Normalgleichungen zuvor noch durch n , so gehen sie über in:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 & + y_0' \alpha_{1,2} + x_0' \mu = \xi_0' + y_0' \alpha_{1,2}' \\ \eta_1 & - x_0' \alpha_{1,2} + y_0' \mu = \eta_0' - x_0' \alpha_{1,2}' \\ y_0' \xi_1 - x_0' \eta_1 + \frac{1}{n} [s^2] \alpha_{1,2} & = - \frac{1}{n} [s^2 \omega] \\ x_0' \xi_1 + y_0' \eta_1 + \frac{1}{n} [s^2] \mu & = + \frac{1}{n} [s \sigma] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\frac{1}{n} [s \sigma] - (x_0' \xi_0' + y_0' \eta_0')}{\frac{1}{n} [s^2] - (x_0'^2 + y_0'^2)} \\ \alpha_{1,2} &= \alpha_{1,2}' - \frac{\frac{1}{n} [s^2 \alpha'] - (x_0' \eta_0' - y_0' \xi_0')}{\frac{1}{n} [s^2] - (x_0'^2 + y_0'^2)} \\ \eta_1 &= \eta_0' + x_0' (\alpha_{1,2} - \alpha_{1,2}') - y_0' \mu \\ \xi_1 &= \xi_0' - y_0' (\alpha_{1,2} - \alpha_{1,2}') - x_0' \mu \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Es dürfte aber am bequemsten sein, gleich mit den Fehlergleichungen zu rechnen.

Die Ausdrücke für μ und $\alpha_{1,2}$ kann man noch umwandeln. Aus

$$s_{h,i}^2 = (x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2$$

und den Differentialformeln

$$s_{h,i} \sigma_{h,i} = (x_i - x_h) (\xi_i - \xi_h) + (y_i - y_h) (\eta_i - \eta_h)$$

$$s_{h,i}^2 \alpha_{h,i} = (x_i - x_h) (\eta_i - \eta_h) - (y_i - y_h) (\xi_i - \xi_h)$$

erhält man für den Punkt 1 als Ausgang, wenn zugleich der Anfangspunkt des Coordinatensystems $(x_0 y_0)$ in den Schwerpunkt gelegt wird:

$$\Sigma s_{1,i}^2 = \Sigma (x_0^2 + y_0^2) + n (x_0'^2 + y_0'^2)$$

$$\Sigma s_{1,i} \sigma_{1,i} = \Sigma (x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0) + n (x_0' \xi_0' + y_0' \eta_0')$$

$$\Sigma s_{1,i}^2 \alpha_{1,i}' = \Sigma (x_0 \eta_0 - y_0 \xi_0) + n (x_0' \eta_0' - y_0' \xi_0').$$

Bildet man diese Ausdrücke für sämtliche Punkte und addirt sie sodann, so findet man weiter:

$$\Sigma s_{h,i}^2 = n \Sigma (x_0^2 + y_0^2)$$

$$\Sigma s_{h,i} \sigma_{h,i} = n \Sigma (x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0)$$

$$\Sigma s_{h,i}^2 \alpha_{h,i}' = n \Sigma (x_0 \eta_0 - y_0 \xi_0).$$

Mit den vorstehenden Werthen wird

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\Sigma (x_0 \xi_0 + y_0 \eta_0)}{\Sigma (x_0^2 + y_0^2)} = \frac{\Sigma s_{h,i} \sigma_{h,i}}{\Sigma s_{h,i}^2} \\ \alpha_{1,2} - \alpha_{1,2}' &= \frac{\Sigma (-x_0 \eta_0 + y_0 \xi_0)}{\Sigma (x_0^2 + y_0^2)} = - \frac{\Sigma s_{h,i}^2 \alpha_{h,i}'}{\Sigma s_{h,i}^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die beiden Figuren 1.2.3... und 1'.2'.3'... sollen nun mit einem Punkte zusammengelegt und alsdann um diesen so gedreht werden, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen der übrigen gleichnamigen Punkte zum Minimum wird. Der beiden Figuren gemeinschaftliche Punkt sei der Punkt 1. Man hat dann in den Gleichungen (2)

$$\xi_1 = 0 \text{ und } \eta_1 = 0$$

zu setzen und erhält

$$\alpha_{1,2} = - \frac{[s^2 \omega]}{[s^2]} = \alpha_{1,2}' - \frac{[s^2 \alpha']}{[s^2]}, \quad (9)$$

$$\mu = \frac{[s \sigma]}{[s^2]}.$$

[...] bedeutet wie vorher eine Summe, die sich auf den Punkt 1 bezieht. Legt man durch den Punkt 1 ein rechtwinkliges Coordinatensystem $(x y)$, so ist aber:

$$[s^2] = \Sigma (x^2 + y^2)$$

$$[s. \sigma] = \Sigma (x \xi + y \eta)$$

$$[s^2. \alpha] = \Sigma (x \eta - y \xi).$$

und daher auch in diesem Falle:

$$\alpha_{1.2} - \alpha_{1.2}' = \frac{\Sigma (-x \eta + y \xi)}{\Sigma (x^2 + y^2)} \text{ und } \mu = \frac{\Sigma (x \xi + y \eta)}{\Sigma (x^2 + y^2)}. \quad (10)$$

5.

Von dem angegebenen Verfahren ist in der Längengradmessung auch dann Gebrauch gemacht worden, wenn vorauszusehen war, dass eine genaue Verkuppelung und Neuausgleichung mehrfacher Beobachtungen eines Netztheils einestheils ohne wesentliche Bedeutung für die Zwecke der Längengradmessung, anderntheils aber auch im Hinblick auf das zu erwartende Ergebniss zu zeitraubend gewesen wäre. Vergl. a. a. O. S. 48.

Mit Erlaubniss des Directors des Königl. Geodätischen Instituts, Herrn Prof. Helmert, theile ich hier die Anwendung des Verfahrens auf das Fünfeck Rauenberg-Müggelsberg-Colberg-Glienick-Eichberg mit, für welches zwei Bestimmungen, aus der Küstenvermessung und dem neuen Berliner Basisnetz*), vorliegen. Der Punkt Berlin, Marienthurm, der gleichfalls in beiden Netzen vorkommt, musste hierbei weggelassen werden, da die Lage desselben im Laufe der Jahre eine ziemlich beträchtliche Veränderung erfahren hat. Vergl. darüber Jahresbericht des Directors des Königl. Geodätischen Instituts für 1890/91, S. 10 oder

Neues Berliner Basisnetz, S. 86. Die gleichnamigen Punkte Ziethen und Golm beider Netze sind nicht identisch. Die hier in Betracht kommenden Messungen der Küstenvermessung sind in den Jahren 1845-46, die des neuen Berliner Basisnetzes 1885-87 angestellt worden.

Nach der Küstenvermessung, S. 362-364 und dem Basisnetz, S. 69-70 oder auch nach S. 86-87 hat man für das Fünfeck (s. Figur) die nachstehenden Werthe:

Nr.	Station	Küsten-Vermessung	Basisnetz	Küsten-Verm. minus Basisnetz	log s		Küsten-V. minus Basisnetz
					Küsten-Vermess.	Basisnetz	
2	Rauenberg	50° 34' 27".132	27".223	-0.091	4.2742240.0	2260.1	-20.1
3	Glienick	72 25 46.006	47.350	-1.344	4.3656056.8	6085.0	-28.2
1	Eichberg	56 59 47.788	46.354	+1.434	4.3099296.4	9296.1	+ 0.3
2	Rauenberg	75 55 17.067	16.397	+0.670	4.3752694.4	2678.6	+15.8
4	Müggelsberg	56 33 41.969	42.863	-0.894	4.3099296.4	9296.1	+ 0.3
3	Glienick	47 31 1.870	1.644	+0.226	4.2562640.8	2624.2	+16.6
4	Müggelsberg	79 16 39.349	38.325	+1.024	4.4815592.5	5569.6	+22.9
5	Colberg	50 17 8.110	8.236	-0.126	4.3752694.4	2678.6	+15.8
3	Glienick	50 26 13.944	14.843	-0.899	4.3762215.5	2212.7	+ 2.8

Hierzu ist zu bemerken, dass die Werthe, welche sich auf die gleichfalls in beiden Netzen vorkommende Richtung Eichberg-Müggelsberg beziehen, fortgelassen sind, da sie für die Festlegung des Fünfecks überflüssig sind.

Die Logarithmen der Seiten sind in beiden Netzen ohne die spätere Baeyer'sche Correction von +31.6 Einheiten der 7. Stelle geblieben, was für die Bestimmung der Lage der beiden Figuren zu einander bedeutungslos ist. Der Log. der Seite Müggelsberg-Colberg ist in der Küstenvermessung um 4.3 Einheiten der 7. Stelle kleiner als in

der Tabelle angegeben; der letztere Werth wurde angenommen, damit die Seiten mit den Winkeln im Einklang sind. Uebrigens liess sich in dem Fünfeck der Küstenvermessung die letzte Stelle der Log. der Seiten, welche nach S. 355 mit Logarithmen von 8 richtigen Decimalstellen, aus zehnstelligen Tafeln entnommen, abgeleitet sein sollen, weder mit 8- noch mit 7-stelligen Logarithmen, letztere mit Ansetzung der durch Interpolation erhaltenen 8. Stelle, genau herstellen.

Wenn nun die Festlegung der beiden Figuren gegen

*) Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie, ausgeführt von der trig. Abth. des Generalstabes. Herausgegeben von J. J. Baeyer. Berlin 1849. — Das Berliner Basisnetz 1885-1887, herausgegeben von Prof. Dr. A. Fischer. Berlin 1891. Veröffentlichung des Königl. Preuss. Geodätischen Instituts.

einander zuerst nach dem unter 2. gegebenen Verfahren erfolgen soll, so sind zunächst die Normalgleichungen (10) aufzustellen. Die constanten Glieder derselben sind die Differenzen der Seiten der Küstenvermessung und des neuen Berliner Basisnetzes, das letztere als Anfangsfigur vorausgesetzt; sie werden aus den logarithmischen Differenzen $\Delta \log s$ durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{s}{M} \cdot \Delta \log s, \quad (M = \text{Modul})$$

erhalten.

Die Normalgleichungen lauten, wenn noch für

$$10^5 \cdot \mu = \mu'$$

gesetzt wird:

$k_{1.2}$	$k_{1.3}$	$k_{2.3}$	$k_{2.4}$	$k_{3.4}$	$k_{3.5}$	$k_{4.5}$	μ'	σ
+2	+0.545	+0.635	-0.595	.	.	.	+0.232	= -0.151
+0.545	+2	+0.302	.	-0.499	-0.986	.	+0.188	= -0.087
+0.635	+0.302	+2	+0.243	+0.675	-0.138	.	+0.204	= +0.001
-0.595	.	+0.243	+2	+0.551	.	-0.717	+0.180	= +0.069
.	-0.499	+0.675	+0.551	+2	+0.637	+0.186	+0.237	= +0.086
.	-0.986	-0.138	.	+0.637	+2	+0.639	+0.303	= +0.160
.	.	-0.717	+0.186	+0.639	+2	+0.238	+0.238	= +0.015
+0.232	+0.188	+0.204	+0.180	+0.237	+0.303	+0.238	.	= 0

Hieraus ergeben sich für die Correlaten die nachstehenden Werthe:

	$\mu = 0$	$\mu = 0.081 \times 10^{-5}$
$k_{1.2} =$	-0.0988	-0.1074
$k_{1.3} =$	+0.0339	+0.0206
$k_{2.3} =$	+0.0309	+0.0289
$k_{2.4} =$	-0.0144	-0.0263
$k_{3.4} =$	+0.0147	+0.0114
$k_{3.5} =$	+0.1045	+0.0895
$k_{4.5} =$	-0.0324	-0.0412

Die Figur ist nun auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu beziehen. Die positive y -Axe desselben möge der Richtung 3.5 parallel sein, der positive Sinn der x -Axe ist dann dadurch bestimmt, dass dem Uebergange von ihr zur positiven y -Axe wachsende Azimute entsprechen. Es ist nun:

$$\begin{aligned} a_{1.2} &= 42^\circ 37' & a_{2.3} &= 172^\circ 3' & a_{3.4} &= 39^\circ 34' & a_{4.5} &= 140^\circ 17' \\ a_{1.3} &= 99^\circ 37' & a_{2.4} &= 96^\circ 7' & a_{3.5} &= 90^\circ 0' \end{aligned}$$

Nach den unter 2. gegebenen Gleichungen (3) ergibt sich hiermit für die Coordinatendifferenzen der Punkte der Küstenvermessung gegen die des neuen Berliner Basisnetzes:

$\mu = 0$		$\mu = 0.081 \times 10^{-5}$	
$\xi_1 = +0.0078$	$\eta_1 = +0.0033$	$\xi_1 = +0.0082$	$\eta_1 = +0.0052$
$\xi_2 = -0.044$	$\eta_2 = -0.057$	$\xi_2 = -0.053$	$\eta_2 = -0.051$
$\xi_3 = -0.048$	$\eta_3 = -0.076$	$\xi_3 = -0.041$	$\eta_3 = -0.072$
$\xi_4 = -0.012$	$\eta_4 = +0.016$	$\xi_4 = -0.020$	$\eta_4 = +0.007$
$\xi_5 = +0.025$	$\eta_5 = +0.084$	$\xi_5 = +0.032$	$\eta_5 = +0.063$
$\Sigma \xi = -0.001$	$\Sigma \eta = 0$	$\Sigma \xi = 0$	$\Sigma \eta = -0.001$
anstatt 0			anstatt 0

Für $\mu = 0$ ist die Summe der Quadrate der Entfernungen gleichnamiger Punkte $\Sigma(\xi^2 + \eta^2) = 0.0285$, für $\mu = 0.00000081$ dagegen $= 0.0271$ (aus $\Sigma k \sigma$ folgt 0.0285 bzw. 0.0273). Dem letzteren Werthe von μ , welcher die kleinsten Werthe für $\Sigma(\xi^2 + \eta^2)$ giebt, entspricht eine Verkleinerung der Log. der Seiten der Küstenvermessung um 3.5 Einheiten der 7. Stelle, wenn die des neuen Berliner Basisnetzes festgehalten werden.

Es soll nun auch das unter 4. gegebene Verfahren angewandt werden. Zu diesem Zwecke mögen beide Figuren mit der Seite Rauenberg-Müggelsberg und in dem Punkte Rauenberg aufeinander gelegt werden. Das Coordinatensystem werde wie vorher angenommen, also die positive y -Axe parallel der Richtung (3.5), die positive x -Axe senkrecht dazu nach Norden gerichtet. Die Ausgangsfigur sei wieder die durch das neue Berliner Basisnetz gegebene.

Es würde am bequemsten sein, die Fehlergleichungen in Bezug auf ξ_3 und η_3 als Unbekannte zu beziehen, da

von dem Punkte 3 sämtliche Verbindungslinien nach den übrigen Punkten vorhanden sind. Um jedoch die Rechnung auch gleich möglichst einfach für den Fall zu gestalten, dass die Coincidenz des Punktes Rauenberg beider Figuren erhalten bleibt, während die Summe der Quadrate der Entfernungen der übrigen gleichnamigen Punkte zum Minimum wird, wurden die Fehlergleichungen in Bezug auf den Punkt 2 als Anfangspunkt aufgestellt.

Nach den Gleichungen (2) und (3) unter 4. erhält man die folgenden Fehlergleichungen, wenn noch für $10^5 \cdot \mu$ wieder μ' geschrieben wird:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \xi_2 \\ -0.156 + \xi_1 &= \xi_2 + 0.0762 \alpha_{2.4} + 0.1708 \mu' \\ +0.010 + \xi_3 &= \xi_2 - 0.0137 \alpha_{2.4} + 0.2021 \mu' \\ +0.008 + \xi_4 &= \xi_2 - 0.0870 \alpha_{2.4} + 0.0193 \mu' \\ +0.010 + \xi_5 &= \xi_2 - 0.1607 \alpha_{2.4} + 0.2022 \mu' \\ \eta_2 &= \eta_2 \\ -0.053 + \eta_1 &= \eta_2 - 0.0828 \alpha_{2.4} + 0.1571 \mu' \\ +0.065 + \eta_3 &= \eta_2 - 0.0980 \alpha_{2.4} - 0.0283 \mu' \\ -0.070 + \eta_4 &= \eta_2 - 0.0093 \alpha_{2.4} - 0.1794 \mu' \\ -0.093 + \eta_5 &= \eta_2 - 0.0980 \alpha_{2.4} - 0.3314 \mu'\end{aligned}$$

Hierzu ist zu bemerken, dass die Widersprüche, welche sich für die constanten Werthe in den ξ und η auf den verschiedenen Wegen ergaben, ausgeglichen sind. Diese constanten Werthe stellen die Coordinatendifferenzen der beiden Figuren bei der angenommenen Lage dar.

Will man dieselben für irgend eine andere Lage haben, so hat man für ξ_2 , η_2 und $\alpha_{2.4}$ die entsprechenden Werthe einzuführen.

Aus den Fehlergleichungen folgen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}5 \quad \xi_2 & - 0.1852 \alpha_{2.4} + 0.5944 \mu' = -0.1280 \\ 5 \quad \eta_2 & - 0.2881 \alpha_{2.4} - 0.3820 \mu' = -0.1510 \\ -0.1852 \xi_2 & - 0.2881 \eta_2 + 0.0655 \alpha_{2.4} = -0.0065 \\ +0.5944 \xi_2 & - 0.3820 \eta_2 + 0.2788 \mu' = +0.0108\end{aligned}$$

deren Auflösung ergibt:

$$\mu' = +0.0811 \quad \alpha_{2.4} = -0.4738 \quad \eta_2 = -0.0513 \quad \xi_2 = -0.0528.$$

Wird in den Fehlergleichungen und damit auch in den Normalgleichungen $\mu = 0$ gesetzt, so findet man als Auflösung der letzteren:

$$\mu' = 0 \quad \alpha_{2.4} = -0.4738 \quad \eta_2 = -0.0575 \quad \xi_2 = -0.0432.$$

Mit diesen Werthen erhält man aus den Fehlergleichungen:

$\mu = 0$		$\mu = 0.081 \times 10^{-5}$	
$\xi_1 = +0.077$	$\eta_1 = +0.035$	$\xi_1 = +0.081$	$\eta_1 = +0.054$
$\xi_2 = -0.043$	$\eta_2 = -0.058$	$\xi_2 = -0.053$	$\eta_2 = -0.051$
$\xi_3 = -0.047$	$\eta_3 = -0.076$	$\xi_3 = -0.040$	$\eta_3 = -0.072$
$\xi_4 = -0.010$	$\eta_4 = +0.017$	$\xi_4 = -0.018$	$\eta_4 = +0.009$
$\xi_5 = +0.023$	$\eta_5 = +0.082$	$\xi_5 = +0.030$	$\eta_5 = +0.061$

in hinreichender Uebereinstimmung mit den vorher gefundenen Werthen.

Es soll nun noch die Lage der beiden Figuren zu einander bestimmt werden, wenn beiden Figuren der Punkt Rauenberg gemeinschaftlich bleibt, während die Summe der Quadrate der Entfernungen der übrigen gleichnamigen Punkte ein Minimum wird. Alsdann ist in den Fehlergleichungen $\xi_2 = 0$ und $\eta_2 = 0$ zu setzen. Die Normalgleichungen werden in diesem Falle:

$$\begin{aligned} 0.0655 \alpha_{2.4} &= -0.0065 & \text{woraus } \alpha_{2.4} &= -0.0992 \\ 0.2788 \mu' &= +0.0108, & \mu' &= +0.0387. \end{aligned}$$

Dem Werthe $\mu = 0.000003.9$ würde eine Verminderung der Logarithmen der Seiten der Küstenvermessung um 1.7 Einheiten der 7. Stelle entsprechen, wenn die des Berliner Basisnetzes unverändert bleiben.

Für die Coordinatendifferenzen der Punkte der Küstenvermessung und des neuen Berliner Basisnetzes ergeben sich mit den obigen Werthen für $\alpha_{2.4}$ und μ' :

$\mu = 0$		$\mu = 0.039 \times 10^{-5}$	
$\xi_1 = +0^m 148$	$\eta_1 = +0^m 061$	$\xi_1 = +0^m 155$	$\eta_1 = +0^m 067$
$\xi_2 = 0$	$\eta_2 = 0$	$\xi_2 = 0$	$\eta_2 = 0$
$\xi_3 = -0.009$	$\eta_3 = -0.055$	$\xi_3 = -0.001$	$\eta_3 = -0.056$
$\xi_4 = +0.001$	$\eta_4 = +0.071$	$\xi_4 = +0.001$	$\eta_4 = +0.064$
$\xi_5 = +0.006$	$\eta_5 = +0.103$	$\xi_5 = +0.014$	$\eta_5 = +0.090$

$$\Sigma(\xi^2 + \eta^2) \text{ ist für } \mu = 0: 0.0443, \text{ für } \mu = 0.000003.9: 0.0440.$$

An die mit $\mu = 0$ erhaltenen Lagen der beiden Fünfecke soll nun der Punkt Berlin, Marienthurm, vermittelst des Dreiecks Glienick–Rauenberg–Berlin angeschlossen werden.

	Küsten-Vermessung	Berliner Basisnetz	log s	
			Küstenvermess.	Basisnetz
Glienick	6° 5' 49".360	47".558	3.9092390.8	2215.9
Rauenberg	158 24 15.027	19.205	4.4489784.7	9742.7
Berlin	15 29 55.768	53.391	4.3099296.4	9296.1

Die Werthe der Küstenvermessung sind direct entnommen; von den Angaben unter »Berliner Basisnetz« wurden die Winkel auf Rauenberg und Glienick erhalten, indem die Stationsergebnisse, S. 49 und 58 a. a. O., an die festen Werthe der Netzausgleichung, S. 69, geschlossen wurden; der dritte Winkel und die Seiten sind errechnet.

	Richtung	Entfernung	Richtung	Entfernung
Rauenberg				
Eichberg	0° 0'	—	—	—
Rauenberg *	10 50	0 ^m 072	—	—
Eichberg				
Glienick	0 0	—	0° 0'	—
Eichberg *	284 50	0.085	282 47	0 ^m 160
Glienick				
Colberg	0 0	—	0 0	—
Glienick *	148 16	0.089	170 43	0.056

Es sei noch bemerkt, dass bei den Rechnungen für die Längengradmessung als Lage der Punkte jedoch nicht die Mitten der nach einer der beiden obigen Bedingungen erhaltenen Entfernungen gleichnamiger Punkte genommen wurden. Die Ergebnisse des neuen Berliner Basisnetzes und der Küstenvermessung sind vielmehr ungeändert bei-

Für die Lage des Punktes Berlin der Küstenvermessung in Bezug auf den gleichnamigen Punkt des Berliner Basisnetzes findet sich im ersten Falle:

$$\xi_{\text{Berlin}} = +0^m 234 \quad \eta_{\text{Berlin}} = +0^m 187$$

und im zweiten Falle (Festhaltung des Punktes Rauenberg):

$$\xi_{\text{Berlin}} = +0^m 273 \quad \eta_{\text{Berlin}} = +0^m 259.$$

Werden die durch das letztere Verfahren erhaltenen Coordinatenunterschiede zu Grunde gelegt, so erhält man zur Bestimmung der Lage des Fünfecks aus der Küstenvermessung zu dem des neuen Berliner Basisnetzes für $\mu = 0$ (also mit ungeänderten Seitenlogarithmen) die nachfolgenden Werthe, wenn einmal die Summe der Quadrate der Entfernungen gleichnamiger Punkte ein Minimum, das andere Mal hierbei an der Coincidenz der Punkte Rauenberg festgehalten wird. Die Punkte der Küstenvermessung sind durch * bezeichnet.

	Richtung	Entfernung	Richtung	Entfernung
Müggelsberg				
Rauenberg	0° 0'	—	0° 0'	—
Müggelsberg *	204 21	0 ^m 019	173 5	0 ^m 071
Colberg				
Müggelsberg	0 0	—	0 0	—
Colberg *	114 3	0.085	126 23	0.103
Berlin				
Rauenberg	0 0	—	0 0	—
Berlin *	205 0	0.300	209 51	0.376

behalten, und dementsprechend ist die geodätische Linie Rauenberg–Springberg vermittelst des in den ersten beiden Columnen angegebenen Lagenunterschiedes von dem Punkte Rauenberg der Küstenvermessung auf den Punkt Rauenberg im neuen Berliner Basisnetz reducirt worden.