5. Über die Anwendung der mechanischen Prinzipie auf reibende Bewegungen

(mit einem Anhang über den „Energieumsatz in der Mechanik“);

von Zemplén Gyöző.¹⁾

Die allgemeinen Prinzipie der Mechanik werden meistens unter der beschränkenden Annahme zur Beschreibung mechanischer Erscheinungen angewandt, daß die Bedingungen des Systems nur dessen Koordinaten und die Zeit, nicht aber die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der ersteren enthalten. In dem folgenden versuche ich zu zeigen, wie man durch geeignete Einführung dieser Differentialquotienten in die Bedingungsgleichungen zu einer Theorie der Reibung gelangt, welche als konsequenter Weiterbau der Mechanik der Systeme mit reibungslosen Verbindungen angesehen werden kann.

Zur Beschreibung der mechanischen Erscheinungen bedienen wir uns in erster Reihe der sogenannten *freien* Kräfte, deren Definition durch Newtons Axiomen gegeben wird, zu welchen als eine charakteristische Eigenschaft der freien Kräfte ihre *Unabhängigkeit* voneinander (das Prinzip des Parallelogramms) hinzugefügt werden kann. Reichen die eingeführten freien Kräfte zur Beschreibung der Bewegung eines Systems aus, so nennen wir das System ein *freies* System, und seine Bewegung wird durch folgende Differentialgleichungen dargestellt:

$$(1) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i = 0, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - Y_i = 0, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - Z_i = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo m_i die Masse des i^{ten} Massenpunktes, x_i, y_i, z_i seine Koordinaten zur Zeit t , X_i, Y_i, Z_i (gegebene Funktionen der Ko-

1) Mitgeteilt der mathematisch-physikalischen Gesellschaft zu Budapest in der Sitzung vom 19. März 1903, in ungarischer Sprache im *Mathematikai és Fizikai Lapok* 12. p. 128—135, 162—187. 1903 erschienen.

ordinaten und der Zeit) die Komponenten der auf den Massenpunkt m_i einwirkenden freien Kräfte bedeuten; n ist die Anzahl der Massenpunkte des Systems.

Oft gelingt es aber nicht, die Bewegung durch Einführung freier Kräfte allein zu beschreiben; man sieht nämlich, daß die Bewegung des Systems außer den eingeführten freien Kräften auch durch gewisse sogenannte *Verbindungen* beeinflusst wird, welche sich aus der Beobachtung der Bewegung ergeben. Um die Differentialgleichungen der Bewegung aufzustellen, werden gewöhnlich bezüglich der Abweichung der tatsächlichen Bewegung von derjenigen, welche sich abspielen würde, falls die Verbindungen nicht vorhanden wären, neue Hypothesen, neue *Prinzipie* in die Mechanik eingeführt.

Die bis jetzt in der Mechanik gebräuchlichen Prinzipie lassen sich ihrer analytischen Ausdrucksform entsprechend in zwei Gruppen einteilen:

I. Gruppe

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} D = \sum_{i=1}^n \{ (m_i x_i'' - X_i) \delta x_i + (m_i y_i'' - Y_i) \delta y_i \\ + (m_i z_i'' - Z_i) \delta z_i \} = 0 \end{aligned} \right.$$

bei allen Werten der Variationen δx_i , δy_i , δz_i , welche den Bedingungen des Systems entsprechen, bei allen sogenannten *virtuellen* Verschiebungen.

II. Gruppe.

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} G = \sum_{i=1}^n \{ (m_i x_i'' - X_i) \delta x_i'' + (m_i y_i'' - Y_i) \delta y_i'' \\ + (m_i z_i'' - Z_i) \delta z_i'' \} = 0 \end{aligned} \right.$$

bei allen Werten der Variationen $\delta x_i''$, $\delta y_i''$, $\delta z_i''$, welche den Bedingungen des Systems entsprechen.

Zur ersten Gruppe gehört das d'Alembertsche und das Hamiltonsche Prinzip, zur zweiten das Gauss'sche Prinzip.

Gewöhnlich werden diese Prinzipie in einer anderen analytischen Form aufgeschrieben, indem man neben dem Gleichheitszeichen in den Relationen (I) und (II) auch ein Ungleichheitszeichen gestattet. Diese Form der Prinzipie ist aber mit der hier angegebenen wesentlich identisch.

Die Relationen, welche die *Verbindungen* des Systems ausdrücken, können nämlich entweder Gleichungen oder Gleichungen

und Ungleichungen sein. Sind lauter Gleichungen vorhanden, so kann offenbar auch im Ausdrucke der Prinzipie nur das Gleichheitszeichen gelten. Sind aber Relationen etwa der Form

$$\Phi \leq 0$$

vorhanden, so kann bekanntlich¹⁾ die Bewegung in solche Abschnitte eingeteilt werden, innerhalb welchen entweder nur die Relation

$$\Phi = 0$$

berücksichtigt werden muß, oder die durch

$$\Phi \leq 0$$

ausgedrückte Verbindung überhaupt nicht in Betracht kommt. Es können daher die durch Gleichungen und Ungleichungen ausgedrückten Bedingungen immer auf Gleichungen zurückgeführt werden, dann aber ist die analytische Form der Prinzipie

$$D = 0, \quad G = 0.$$

Wollen wir die Prinzipie zur Beschreibung *reibender* Bewegungen verwenden, so werden zu den vorhandenen Verbindungen des Systems andere Bedingungen über die Abweichung der tatsächlichen Bewegung von der reibungslosen treten, welche aber *nur* durch Gleichungen ausgedrückt werden können, sonst ist die Reibung nur *qualitativ*, nicht aber *quantitativ* bestimmt und man erhält keine eindeutige Beschreibung der Bewegung. Es treten also wiederum einige *Gleichungen* zu den bereits vorhandenen Bedingungsgleichungen, so daß die Prinzipie nur in der Form

$$D = 0, \quad G = 0$$

benutzt werden können.

Es ist klar, daß die Gruppe I zur Beschreibung reibender Bewegungen nicht angewendet werden kann, denn falls lauter *feste* (von der Zeit unabhängige) Verbindungen vorhanden sind, kommen unter den virtuellen Verschiebungen auch die während eines Zeitelementes tatsächlich stattfindenden Verrückungen

1) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, I. Teil, § 74. p. 237. 1897.

des Systems vor und die Gleichung (I) geht in die Gleichung der lebendigen Kraft über, welche aber bei reibenden Bewegungen selbstverständlich ihre Gültigkeit verliert.

Deshalb habe ich versucht, auf Grund des Gauss'schen Prinzips die Bewegung reibender Systeme zu beschreiben, was in dem folgenden gezeigt werden soll.

Falls in den Bedingungsgleichungen auch die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Koordinaten vorkommen, wird es sehr bequem sein, die im Wesen zuerst von C. Neumann¹⁾ benutzte Methode, welche sich auch zur allgemeinen Untersuchung des Ostwald'schen Maximumprinzips nützlich erwies²⁾, auch hier anzuwenden. Die Methode besteht darin, daß man die Bewegung zuerst für einen kleinen, jedoch endlichen Zeitraum τ mit gewisser Annäherung beschreibt und im Endresultat zur Grenze $\lim \tau = 0$ übergeht. Die Methode hat den Vorteil, daß sowohl die Änderung der Koordinaten während der Zeit τ als auch die Beschleunigung der Massenpunkte zu Anfang des Zeitraumes τ durch die Geschwindigkeiten des Punktes zu Anfang und zu Ende des Zeitraumes τ angenähert ausgedrückt werden können und bei der Variation sämtlicher Ausdrücke nur die Geschwindigkeiten zu Ende des Zeitraumes τ variiert werden müssen.

Es seien nämlich die Koordinaten eines Punktes zur Zeit t mit x_i, y_i, z_i , zur Zeit $t + \tau$ mit $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$, ebenso die Geschwindigkeitskomponenten mit u_i, v_i, w_i bez. $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i$, dann ist mit gewisser Annäherung:

$$(1) \quad \bar{x}_i - x_i = \frac{\tau}{2} (u_i + \bar{u}_i) \text{ etc.}$$

und

$$(2) \quad x_i'' = \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen werden streng gültig, falls man beiderseits den Grenzübergang $\lim \tau = 0$ ausführt.

1) C. Neumann, Leipz. Ber. p. 184. 1892.

2) G. Zemplén, Ann. d. Phys. 10. p. 419. 1903.

Den Ausdruck des Zwanges findet man, wie folgt:

Wäre das System frei, dann wären z. B. die Koordinaten des i^{ten} Massenpunktes zur Zeit $t + \tau$ ξ_i , η_i , ζ_i , und angenähert

$$\begin{aligned}\xi_i - x_i &= u_i \tau + \frac{X_i}{m_i} \frac{\tau^2}{2}, & \eta_i - y_i &= v_i \tau + \frac{Y_i}{m_i} \frac{\tau^2}{2}, \\ \zeta_i - z_i &= w_i \tau + \frac{Z_i}{m_i} \frac{\tau^2}{2},\end{aligned}$$

daher mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\tau &= \sum_{i=1}^n m_i \{(\bar{x}_i - \xi_i)^2 + (\bar{y}_i - \eta_i)^2 + (\bar{z}_i - \zeta_i)^2\} \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \{(\bar{x}_i - x_i - (\xi_i - x_i))^2 + \dots\} \\ &= \frac{\tau^4}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ m_i \left[\frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{X_i}{m_i} \right]^2 + \left[\frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - \frac{Y_i}{m_i} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - \frac{Z_i}{m_i} \right]^2 \right\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_\tau$ ist hier angenähert der während der Zeit τ ausgeübte Zwang der Verbindungen. Das Gauss'sche Prinzip sagt nun folgendes:

Es seien in einem Augenblicke t die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems gegeben, dann sind die Geschwindigkeitskomponenten am Ende des kleinen Zeitraumes τ (zur Zeit $t + \tau$) durch die gegebenen freien Kräfte und Verbindungen so bestimmt, daß der Ausdruck $\mathcal{B}_\tau$ bei der tatsächlichen Bewegung kleiner ist als bei einer beliebigen anderen während desselben Zeitraumes τ mit denselben Anfangsbedingungen sich den Verbindungen entsprechend abspielenden Bewegung.

Der Ausdruck $\mathcal{B}_\tau$ ist daher bei konstantem x_i , y_i , z_i , u_i , v_i , w_i , t und τ zu variieren und seine Variation muß bei allen Werten von $\delta \bar{u}_i$, $\delta \bar{v}_i$, $\delta \bar{w}_i$ verschwinden, welche den Variationen der Bedingungsgleichungen genügen, es muß daher bei all diesen Werten der $\delta \bar{u}_i$ etc. sein

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathcal{B}_\tau &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(m_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - X_i \right) \delta \bar{u}_i + \left(m_i \frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - Y_i \right) \delta \bar{v}_i \right. \\ &\quad \left. + \left(m_i \frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - Z_i \right) \delta \bar{w}_i \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Man sieht sofort, daß, wenn man mit τ die Gleichung (3) dividiert und den Grenzübergang $\tau = 0$ ausführt, die Gleichung (3) in die Gleichung (II) übergeht; es ist nämlich

$$\lim_{\tau=0} \frac{\delta \bar{u}_i}{\tau} = \lim_{\tau=0} \delta \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} = \delta x_i'' \text{ etc.}$$

Wir wollen aber den Grenzübergang nur dann ausführen, als wir schon die Bedingungsgleichungen berücksichtigt und die Differentialgleichungen der Bewegung in erster Annäherung aufgestellt haben.

Wir teilen die Bedingungsgleichungen in zwei Gruppen: zur ersten Gruppe sollen die sogenannten *reibungslosen* Verbindungen gehören, zur zweiten die Reibungsbedingungen.

Die erste Gruppe sei daher:

$$(4) \quad \varphi_k(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, t) = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, r; \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die Funktionen φ_k die nach der Zeit genommenen Ableitungen der Koordinaten nicht enthalten.

Die Gleichungen (4) müssen auch zur Zeit $t + \tau$ bestehen, daher angenähert

$$\varphi_k(\dots, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \dots, t + \tau) = \varphi_k(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, t) \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right)_t (\bar{x}_i - x) + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \right)_t (\bar{y}_i - y) + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} \right)_t (\bar{z}_i - z) \right\} \\ + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right)_t \tau = (f_k)_t + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) (u_i + \bar{u}_i) + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \right) (v_i + \bar{v}_i) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} \right) (w_i + \bar{w}_i) \right\} + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right)_t \tau = 0.$$

Die Variationen der $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i$ müssen daher folgenden Gleichungen Genüge leisten:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \delta \bar{v}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} \delta \bar{w}_i \right) = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, r).$$

Wären nur die Bedingungen (4) vorhanden, so wären daher aus (3) und (5) die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$m_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - X_i - \sum_{k=1}^r \bar{\lambda}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0 \text{ etc.} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

und nach dem Grenzübergang $\tau = 0$:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_i x_i'' - X_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i} = 0, \\ m_i y_i'' - Y_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial y_i} = 0, \\ m_i z_i'' - Z_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial z_i} = 0, \\ q_k = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r), \end{array} \right.$$

wo $\lim_{\tau=0} \bar{\lambda}_k = \lambda_k$ gesetzt wurde.

Die tatsächliche Bewegung geschieht aber erfahrungsgemäß nicht diesem Gleichungssystem entsprechend, die Größe der Geschwindigkeit der Massenpunkte ist nämlich am Ende eines jeden kleinen Zeitraumes τ *kleiner* als bei einer Bewegung, welche sich mit denselben Anfangsbedingungen dem System (6) entsprechend während des Zeitraumes τ abspielen würde.

Um zu den Differentialgleichungen der Bewegung zu gelangen, werden wir voraussetzen, daß *die der Reibung zugeschriebene Abweichung der tatsächlichen Bewegung von der durch das System (6) bestimmten auch dem Gauss'schen Prinzip des kleinsten Zwanges entspricht.*

Es seien wiederum gegeben die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems zur Zeit t , u_i , $\bar{v}_i$, $\bar{w}_i$ die Werte der Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t + \tau$, falls die Bewegung nach dem System (6) erfolgen würde, $\bar{U}_i$, $\bar{V}_i$, $\bar{W}_i$ die tatsächlichen Geschwindigkeiten des Systems zur Zeit $t + \tau$. Wir fragen nun, welchen Bedingungen müssen die $\bar{U}_i$, $\bar{V}_i$, $\bar{W}_i$ Genüge leisten, damit der aus der Abweichung von der reibungslosen Bewegung (6) resultierende Zwang bei der tatsächlichen Bewegung kleiner sei als bei irgend einer in derselben Zeit τ mit denselben Anfangsbedingungen den Bedingungsgleichungen (4) und den Reibungsbedingungen entsprechend sich abspielenden Bewegung?

Den Ausdruck dieses Zwanges Z_i berechnen wir auch zuerst angenähert.

Es sollen mit $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ die Koordinaten jener Punkte bezeichnet werden, in welchen das System sich zur Zeit $t + \tau$ befinden würde, falls die Bewegung dem System (6) entsprechend erfolge, mit $\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{z}}_i$ die Koordinaten bei der tatsächlichen Bewegung zur Zeit $t + \tau$, dann ist der Zwang:

$$Z_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \{ (\bar{\bar{x}}_i - \bar{x}_i)^2 + (\bar{\bar{y}}_i - \bar{y}_i)^2 + (\bar{\bar{z}}_i - \bar{z}_i)^2 \},$$

es ist aber angenähert:

$$\bar{\bar{x}}_i - \bar{x}_i = \frac{\tau}{2} (u_i + \bar{u}_i),$$

und aus den Gleichungen (6) ebenfalls angenähert:

$$\bar{x}_i - x_i = u_i \tau + \frac{\tau^2}{2 m_i} \left(X_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \right).$$

daher

$$Z_\tau = \frac{\tau^4}{4} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(m_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - X_i - L_i \right)^2 + \left(m_i \frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - Y_i - M_i \right)^2 + \left(m_i \frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - Z_i - N_i \right)^2 \right\},$$

wo zur Abkürzung:

$$L_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i}, \quad M_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial y_i}, \quad N_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial z_i}.$$

Z_τ soll bei konstantem $x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t, \tau$ ein Minimum werden, es muß daher die Gleichung:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta Z'_\tau &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left(m_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{\tau} - X_i - L_i \right) \delta \bar{u}_i \right. \\ &\quad + \left(m_i \frac{\bar{v}_i - v_i}{\tau} - Y_i - M_i \right) \delta \bar{v}_i \\ &\quad \left. + \left(m_i \frac{\bar{w}_i - w_i}{\tau} - Z_i - N_i \right) \delta \bar{w}_i \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

bei allen Werten der Variationen $\delta \bar{u}_i, \delta \bar{v}_i, \delta \bar{w}_i$ bestehen, welche den Variationen der Bedingungsgleichungen Genüge leisten.

Die erste Gruppe der Bedingungsgleichungen liefert wieder:

$$(5') \quad \delta F_k = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \delta \bar{U}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \delta \bar{V}_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} \delta \bar{W}_i \right\} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Es sollen nun die *Reibungsbedingungen* aufgestellt und berücksichtigt werden.

Erfahrungsgemäß ist die Größe der Geschwindigkeit zur Zeit $t + \tau$ immer *kleiner* als bei einer Bewegung, welche, mit denselben Anfangsbedingungen zur Zeit t , laut System (4) in demselben Zeitraum τ erfolgen würde. Der entstehende Verlust an Geschwindigkeit wird einer allgemeinen Ursache, der sogenannten *Reibung und Widerstand des Mediums* zugeschrieben. Bewegt sich ein Punkt auf einer vorgeschriebenen Fläche oder Kurve, so bezieht sich dieser Verlust erfahrungsgemäß nur auf die zur Fläche oder Kurve *relative* Geschwindigkeit des Punktes. Bezeichnen wir also mit $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$ die Geschwindigkeitskomponenten der Fläche oder Kurve im Augenblick $t + \tau$ in ihrem Punkte $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ und zu derselben Zeit in ihrem Punkte $\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{z}}_i$ mit $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$, dann können wir für jeden Punkt des Systems eine Reibungsbedingung der Form aufstellen:

$$(8) \quad \begin{cases} (\bar{u}_i - \bar{\alpha}_i)^2 + (\bar{v}_i - \bar{\beta}_i)^2 + (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i)^2 \\ - (\bar{U}_i - \bar{A}_i)^2 - (\bar{V}_i - \bar{B}_i)^2 - (\bar{W}_i - \bar{C}_i)^2 = \Psi_i \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

wo Ψ_i eine immer positive Funktion der Koordinaten x_i, y_i, z_i , der Zeit t , des Zeitraumes τ und der Geschwindigkeitskomponenten u_i, v_i, w_i und $\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i$. eventuell irgend anderer Parameter (Koordinaten eines anderen Punktes, Temperatur des Systems etc.) ist.

Die Funktion Ψ_i muß auf Grund der Erfahrung so bestimmt werden, daß die tatsächlichen Bewegungen durch die mit Rücksicht auf die Bedingungen (8) aufgestellten Differentialgleichungen befriedigend beschrieben werden können, die Zahl der in derselben enthaltenen Variablen kann aber mit Rücksicht darauf, daß τ ein kleiner Zeitraum ist, bedeutend vermindert werden. Es ist nämlich angenähert:

$$\Psi_i(x_i, y_i, z_i, u_i, \bar{U}_i, v_i, \bar{V}_i, w_i, \bar{W}_i, \tau, t) = (\Psi_i)_{t=0} + \left[\frac{d \Psi_i}{d t} \right]_{t=0} \tau.$$

Es ist aber $(\Psi_i)_{\tau=0}$ der Verlust an Geschwindigkeit während des Zeitraumes $\tau = 0$ auch Null, und $[d\Psi_i/dt]_{\tau=0}$ erhält nunmehr bloß die Variablen $x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t$.

Die Reibungsbedingung für einen Punkt lautet daher:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} R_i &= (\bar{u}_i - \bar{\alpha}_i)^2 + (\bar{v}_i - \bar{\beta}_i)^2 + (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i)^2 \\ &\quad - (\bar{U}_i - \bar{A}_i)^2 - (\bar{V}_i - \bar{B}_i)^2 - (\bar{W}_i - \bar{I}_i)^2 \\ &\quad - \Phi_i(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t) \tau, \end{aligned} \right.$$

wo Φ_i abermals eine bei sämtlichen Werten ihrer Variablen positive Funktion bedeutet, und aus (4) angenähert:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i + \frac{1}{m_i} (X_i + L_i) \tau, \\ \bar{v}_i &= v_i + \frac{1}{m_i} (Y_i + L_i) \tau, \\ \bar{w}_i &= w_i + \frac{1}{m_i} (Z_i + L_i) \tau. \end{aligned} \right.$$

Man erhält ebenfalls angenähert, wenn die Geschwindigkeitskomponenten der vorgeschriebenen Fläche oder Kurve im Punkte x_i, y, z_i zur Zeit t mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ bezeichnet werden:

$$\bar{A}_i = \alpha_i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} (\bar{x}_i - x_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} (\bar{y}_i - y_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} (\bar{z}_i - z_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \tau,$$

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} (\bar{x}_i - x_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} (\bar{y}_i - y_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} (\bar{z}_i - z_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \tau,$$

also:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{A}_i &= \alpha_i + \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} (u_i + \bar{U}_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} (v_i + \bar{V}_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} (w_i + \bar{W}_i) + 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right] \frac{\tau}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= \alpha_i + \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} (u_i + \bar{u}_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} (v_i + \bar{v}_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} (w_i + \bar{w}_i) + 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right] \frac{\tau}{2}, \end{aligned} \right.$$

etc.

Bildet man die Variation des Ausdruckes R_i , so muß man dabei die Gleichungen (10), (11) und (12) berücksichtigen, woraus hervorgeht, daß $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i$ von $\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i$ unabhängig sind, während $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{I}_i$ als durch die Gleichungen (1) definierte Funktionen der $\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i$ betrachtet werden müssen.

Es ergibt sich also:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \delta R_i &= \left\{ (\bar{U}_i - \bar{A}_i) \left(1 - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \frac{\tau}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[(\bar{V}_i - \bar{B}_i) \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} + (\bar{W}_i - \bar{F}_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} \right] \frac{\tau}{2} \right\} \delta \bar{U}_i \\ &\quad + \left\{ (\bar{V}_i - \bar{B}_i) \left(1 - \frac{\partial \beta_i}{\partial y_i} \frac{\tau}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[(\bar{U}_i - \bar{A}_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} + (\bar{W}_i - \bar{F}_i) \frac{\partial \gamma_i}{\partial y_i} \right] \frac{\tau}{2} \right\} \delta \bar{V}_i \\ &\quad + \left\{ (\bar{W}_i - \bar{F}_i) \left(1 - \frac{\partial \gamma_i}{\partial z_i} \frac{\tau}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[(\bar{U}_i - \bar{A}_i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} + (\bar{V}_i - \bar{B}_i) \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \right] \frac{\tau}{2} \right\} \delta \bar{W}_i = 0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

Die Bewegungsgleichungen des Systems ergeben sich durch die bekannte Methode der Multiplikatoren aus den Gleichungen:

$$(7) \quad \delta Z_r' = 0,$$

$$(5') \quad \delta F_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

$$(13) \quad \delta R_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

falls diese Gleichungen voneinander unabhängig sind. Es kann aber gezeigt werden, daß dies hier nicht der Fall ist, denn die aus (7) und (13) allein abgeleitete Bewegung befriedigt *identisch* die Gleichungen (5'), der Zwang bei der bloß aus (7) und (13) abgeleiteten Bewegung wird daher kleiner sein als bei irgend einer entsprechenden, das System (13) und (5') befriedigenden Bewegung. Das System (5') kann daher aus der Reihe der Bedingungsgleichungen einfach weggelassen werden.

Um dies zu beweisen, werden wir zuerst die Bewegungsgleichungen aus (7) und (13) allein ableiten.

Es folgt nach dem bekannten Verfahren:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} m_i \frac{\bar{U}_i - u_i}{\tau} - (X_i + L_i) + \mu_i (\bar{U}_i - \bar{A}_i - P_i \tau) &= 0, \\ m_i \frac{\bar{V}_i - v_i}{\tau} - (Y_i + M_i) + \mu_i (\bar{V}_i - \bar{B}_i - Q_i \tau) &= 0, \\ m_i \frac{\bar{W}_i - w_i}{\tau} - (Z_i + N_i) + \mu_i (\bar{W}_i - \bar{F}_i - R_i \tau) &= 0, \end{aligned} \right.$$

wo P_i , Q_i , R_i von τ unabhängige Funktionen sind, so daß

$$\lim_{\tau=0} P_i \tau = \lim_{\tau=0} Q_i \tau = \lim_{\tau=0} R_i \tau = 0.$$

Mit Hülfe der Gleichung (9) kann μ_i aus diesen Gleichungen berechnet werden; man erhält:

$$\begin{aligned}
 & - \{(\bar{U}_i - \bar{A}_i - P_i \tau)(\bar{U}_i - \bar{A}_i + u_i - \bar{a}_i) \\
 & + (\bar{V}_i - \bar{B}_i - Q_i \tau)(\bar{V}_i - \bar{B}_i + v_i - \bar{\beta}_i) \\
 & + (\bar{W}_i - \bar{F}_i - S_i \tau)(\bar{W}_i - \bar{F}_i + w_i - \bar{\gamma}_i)\} \mu_i \\
 & = (X_i + L_i)(u_i - \bar{a}_i - \bar{U}_i + \bar{A}_i) \\
 & + (Y_i + M_i)(v_i - \bar{\beta}_i - \bar{V}_i + \bar{B}_i) \\
 & + (Z_i + N_i)(w_i - \bar{\gamma}_i - \bar{W}_i + \bar{F}_i) \\
 & + \frac{m_i}{\tau} \{\bar{a}_i^2 + \bar{\beta}_i^2 + \bar{\gamma}_i^2 - \bar{A}_i^2 - \bar{B}_i^2 - \bar{F}_i^2 \\
 & \quad + u_i(\bar{A}_i - \bar{a}_i) + v_i(\bar{B}_i - \bar{\beta}_i) + w_i(\bar{F}_i - \bar{\gamma}_i) \\
 & + \bar{U}_i(\bar{A}_i - \bar{a}_i) + \bar{V}_i(\bar{B}_i - \bar{\beta}_i) + \bar{W}_i(\bar{F}_i - \bar{\gamma}_i)\} \\
 & \quad - m_i \Phi_i(x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t).
 \end{aligned}$$

Setzt man den daraus sich ergebenden Wert des μ_i in (14) und läßt τ zu Null konvergieren, dann erhält man, wegen

$$\lim_{\tau=0} \bar{U}_i = \lim_{\tau=0} \bar{u}_i = u_i = x_i,$$

$$\lim_{\tau=0} \bar{A}_i = \lim_{\tau=0} \bar{a}_i = \alpha_i,$$

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{U}_i - u_i}{\tau} = \frac{d u_i}{d t} = x_i'',$$

endlich wegen [(vgl. Gleichung (11) und (12)]

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau=0} \frac{\bar{A}_i - \alpha_i}{\tau} &= \frac{1}{2} \lim \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} (\bar{V}_i - \bar{u}_i) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} (\bar{V}_i - \bar{v}_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} (\bar{W}_i - \bar{w}_i) \right\} = 0 \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

folgendes System:

$$(A) \left\{ \begin{aligned}
 m_i x_i'' - X_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \frac{1}{2} m_i \Phi_i(x_i, y_i, z_i; x_i', y_i', z_i'; t) (x_i' - \alpha_i) &= 0, \\
 m_i y_i'' - Y_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \frac{1}{2} m_i \Phi_i(x_i, y_i, z_i; x_i', y_i', z_i'; t) (y_i' - \beta_i) &= 0, \\
 m_i z_i'' - Z_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} + \frac{1}{2} m_i \Phi_i(x_i, y_i, z_i; x_i', y_i', z_i'; t) (z_i' - \gamma_i) &= 0
 \end{aligned} \right.$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Diese Gleichungen bilden schon das gesuchte System der Bewegungsgleichungen, falls wir beweisen können, daß die durch (A) bestimmte Bewegung den reibungslosen Bedingungen

$$(4) \quad \varphi_k(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots; t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

entspricht. Dieser Beweis kann aber sehr einfach geführt werden.

Folgt nämlich aus den Gleichungen (4), daß im Augenblicke t der Massenpunkt m_i gezwungen ist auf etwa m Flächen ($m \leq 3$) zu bleiben, dann muß offenbar die relative Geschwindigkeit des Punktes zur Normale dieser Flächen senkrecht stehen; bezeichnen wir die Richtungskosinus dieser Flächen mit

$$\varrho_m, \sigma_m, \tau_m,$$

dann müssen die Anfangsgeschwindigkeiten u_i, v_i, w_i zur Zeit t den Gleichungen

$$(15) \quad \varrho_m(u_i - \alpha_i) + \sigma_m(v_i - \beta_i) + \tau_m(w_i - \gamma_i) = 0 \quad (m = 1, 2, 3)$$

Genüge leisten.

Nehmen wir an, wir haben u_i, v_i, w_i dieser Forderung entsprechend gewählt und beweisen, daß, falls der weitere Verlauf der Bewegung dem System (A) gemäß erfolgt, die Gleichungen (4) auch in späteren Augenblicken immer befriedigt werden, da die aus dem System (4) entspringenden relativen Beschleunigungen auch senkrecht zu den Flächen stehen, auf welchen der Massenpunkt m_i seine Bewegung ausführen muß. Es ist nämlich

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varrho_m(x_i'' - \alpha_i') + \sigma_m(y_i'' - \beta_i') + \tau_m(z_i'' - \gamma_i') \\ &= \left[\frac{1}{m_i}(X_i + L_i) - \alpha_i' \right] \varrho_m + \left[\frac{1}{m_i}(Y_i + M_i) - \beta_i' \right] \sigma_m \\ & \quad + \left[\frac{1}{m_i}(Z_i + N_i) - \gamma_i' \right] \tau_m \\ & - \frac{\frac{1}{2} \Phi}{(x_i' - \alpha_i')^2 + (y_i' - \beta_i')^2 + (z_i' - \gamma_i')^2} (\varrho_m(x_i' - \alpha_i) + \sigma_m(y_i' - \beta_i) \\ & \quad + \tau_m(z_i' - \gamma_i)) = 0. \end{aligned} \right.$$

$\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$ bedeuten hier die Beschleunigungskomponenten der Fläche oder Kurve (eventuell des Punktes), welchen der Massenpunkt m_i während seiner Bewegung nicht verlassen darf. Obige Gleichung ist aber bei der Voraussetzung (15) immer befriedigt,

denn die relativen Beschleunigungskomponenten der nach dem System (6) vor sich gehenden Bewegung

$$\frac{1}{m_i}(X_i + L_i) - \alpha'_i, \quad \frac{1}{m_i}(Y_i + M_i) - \beta'_i, \quad \frac{1}{m_i}(Z_i + N_i) + \gamma'_i$$

sind eben durch die in denselben vorhandenen λ_k so bestimmt worden, daß die Gleichungen (4) in jedem Augenblicke befriedigt werden sollen, die zwei Teile der linken Seite in Gleichung (1) sind daher jede für sich gleich Null.

Wir haben daher folgendes allgemeine Problem gelöst:

Es sei irgend ein System von materiellen Punkten gegeben, auf welchen gegebene, von den Koordinaten und der Zeit abhängige äußere Kräfte wirken; zwischen den Punkten des Systems sollen gegebene, durch Gleichungen oder Gleichungen und Ungleichungen ausdrückbare Verbindungen bestehen; die Verbindungen können mit Reibung behaftet sein und die ganze Bewegung kann in einem widerstehenden Medium vor sich gehen. Wir fragen nach den Differentialgleichungen der Bewegung, vorausgesetzt, daß die Abweichung von der freien Bewegung dem Gauss'schen Prinzipie des kleinsten Zwanges entsprechend erfolgt. —

Das System (A) liefert die allgemeine Lösung dieses Problems, wo die λ_k so bestimmt werden müssen, daß die Bedingungsgleichungen (4) befriedigt sein sollen.

Das System (A) ist ein allgemeines Schema, aus welchem durch geeignete Wahl der Funktion Φ_i sämtliche bis jetzt empirisch aufgestellte Gleichungen für mit Reibung und Widerstand verbundenen Bewegungen abgeleitet werden können.

Durch Einführung der Reibungsbedingungen (9) sind nämlich zur linken Seite des Systems (6) folgende neue Glieder getreten:

$$\begin{aligned} -A_i &= \frac{\frac{1}{2} m_i \Phi_i}{V_i^2} (x'_i - \alpha_i), & -B_i &= \frac{\frac{1}{2} m_i \Phi_i}{V_i^2} (y'_i - \beta_i), \\ -C_i &= \frac{\frac{1}{2} m_i \Phi_i}{V_i^2} (z'_i - \gamma_i), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$V_i^2 = (x'_i - \alpha_i)^2 + (y'_i - \beta_i)^2 + (z'_i - \gamma_i)^2.$$

A_i , B_i , C_i können als Komponenten einer Kraft angesehen werden, welche der relativen Geschwindigkeit des Punktes

immer entgegengesetzt wirkt, daher mit Recht Reibung und Widerstandskraft genannt werden kann.

Bezüglich dieser Kräfte sind von der Erfahrung ausgehend verschiedene Hypothesen aufgestellt worden; diese Hypothesen werden in der vorhandenen Theorie auf die Funktion Φ_i übertragen.

Wird z. B.

$$\Phi_i = k \cdot V_i^2$$

gesetzt, wo k eine Konstante bedeutet, so erhält man aus (A) ein System, welches zur Beschreibung eines mit reibungslosen Verbindungen behafteten Systems in einem widerstehenden Medium ziemlich geeignet ist. Ein spezieller Fall dieses Systems wird z. B. die Differentialgleichung der gedämpften harmonischen Schwingungen sein.

Sind die Verbindungen mit Reibung behaftet, so kann

$$\Phi_i = k_i (L_i^2 + M_i^2 + N_i^2)^{1/2} V_i^2,$$

gesetzt werden, wo k_i eine Konstante, oder auch eine experimentell zu bestimmende Funktion von x_i , y_i , z_i und t sein kann, Φ_i ist also mit der *Druckkraft* proportional und man erhält hieraus die bekannten Differentialgleichungen für die reibende Bewegung auf einer vorgeschriebenen Fläche oder Kurve in der Form, wie sie von Lagrange und Kirchhoff aufgestellt wurden, welche auch zu einer ziemlich befriedigenden Beschreibung der tatsächlichen Erscheinungen führen.

Es ist daher gelungen, auch die mit Reibung und Widerstand behafteten Bewegungen in den Rahmen der mechanischen Prinzipie aufzunehmen, was aber nur mit Hülfe der zweiten Gruppe derselben (mit dem Gauss'schen Prinzip des kleinsten Zwanges) geschehen konnte, wodurch dasselbe die übrigen in seiner Allgemeinheit übertrifft.

Anhang über den Energieumsatz in der Mechanik.

Es sei mir gestattet, ganz kurz einiges über die Untersuchung des *Ostwald'schen Maximumprinzips* des Hrn. Januschke¹⁾ zu bemerken.

1) H. Januschke, Ann. d. Phys. 11. p. 445. 1903.

Hr. Januschke setzt den *Energieumsatz* während des Zeitelementes dt gleich:¹⁾

$$P dr + \frac{1}{2} m v^2 \cos^2 \beta - \frac{1}{2} m v^2.$$

P ist hier die Größe der Zentralkraft, dr das Wegelement in ihrer Richtung, v die Geschwindigkeit des Punktes von der Masse m , β der Winkel zweier aufeinander folgender Bahnelemente.

Gewöhnlich versteht man unter Energieumsatz in einer Zeit dt die Energiemenge, welche während derselben Zeit von einer Energieart in eine andere umgewandelt wurde, also bei rein mechanischen Vorgängen die *Arbeit* der äußeren Kräfte *oder* die damit gleiche Änderung der lebendigen Kraft des Systems, oder auch etwa den Mittelwert aus beiden. Im vorliegenden Falle ist offenbar $P dr$ der Energieumsatz, oder auch

$$\frac{1}{2} m (\bar{v}^2 - v^2),$$

wo $\bar{v}$ die Größe der Geschwindigkeit am Ende des Zeitelementes dt bedeutet. Im Ausdrucke des Hrn. Januschke (welcher wahrscheinlich den *doppelten* Energieumsatz darstellen will, was aber selbstverständlich kein wesentlicher Fehler wäre) wird aber anstatt

$$\frac{1}{2} m (\bar{v}^2 - v^2) \\ \frac{1}{2} m v^2 \cos^2 \beta - \frac{1}{2} m v^2$$

gesetzt, es ist also dieser Ausdruck nach Hrn. Januschke der Änderung der kinetischen Energie im Zeitelemente dt gleich.

Hieraus ergibt sich:

1. Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist während der Zeit dt auch eine Änderung der kinetischen Energie vorhanden.

2. Die Änderung der kinetischen Energie kann bei einer Zentralbewegung *nie positiv sein* (es ist ja $\cos^2 \beta \leq 1$), also im Falle einer *anziehenden* Kraft kann sich der Massenpunkt dem Kraftzentrum *nicht nähern*, im Falle einer *abstoßenden* Kraft kann sich aber derselbe vom Kraftzentrum *nicht entfernen*.

1) l. c. p. 446.

Ich glaube kaum, daß eine solche Definition des Energieumsatzes zu richtigen Resultaten führen kann.

Was nun die Kritik anbelangt, welche Hr. Januschke gegen meine Behandlung desselben Prinzipes ausübt¹⁾, so glaube ich dieselbe nicht eingehend besprechen zu müssen, denn der Einwand des Hrn. Januschke bezieht sich eigentlich nicht auf das Ostwaldsche Prinzip, sondern auf die Grundlagen der Variationsrechnung, welche aber heutzutage kaum mehr einer Verteidigung bedürfen.

Budapest, 6. Juni 1903.

1) l. c. p. 447.

(Eingegangen 10. Juni 1903.)