XIII. *Ueber die electromagnetische Rotation einer Flüssigkeit;* *von Eduard Riecke.*

(Aus den Gött. Nachr. vom 30. Dec. 1884; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. V Fig. 2.)

I. Bezeichnet man eine aus verschiedenartigen Leitern gebildete, von einem galvanischen Strome durchlaufene Kette, deren Glieder theils fest liegen, theils eine bestimmte Beweglichkeit besitzen, als einen electrodynamischen Kreis, so sind mit Bezug auf die Anordnung eines solchen Kreises verschiedene Fälle zu unterscheiden. Der einfachste Fall ist der, beim welchem die Stromfäden stets an dieselbe Reihe ponderabler Theilchen gebunden bleiben; dies findet statt bei allen Kreisen, deren bewegliche Theile aus Drähten oder biegsamen Fäden zusammengesetzt sind, und bei welchen der Uebergang von den festliegenden zu den beweglichen Theilen der Leitung nicht durch Gleitstellen vermittelt wird. Der zweite Fall ist der, in welchem infolge der Bewegung neue ponderable Elemente als Träger des Stromes zu den schon früher vorhandenen hinzutreten; es ist dies der Fall bei den meisten derjenigen Anordnungen, bei welchen die beweglichen Stromtheile durch Gleitstellen mit den ruhenden verbunden sind; ferner gehört hierher der Fall einer elastischen Dehnung der vom Strome durchflossenen Leiter. Der dritte Fall ist dadurch ausgezeichnet, dass eine relative Verschiebung der Stromfäden, welche das Innere von körperlichen Leitern erfüllen, gegen die ponderablen Theilchen der letzteren eintritt. Dieser Fall findet statt, wenn der vom Strome durchflossene Körper elastische Biegungen erleidet, er kann eintreten bei Kreisen, welche mit Gleitstellen behaftet sind und bei der Bewegung eines von einem galvanischen Strom durchflossenen flüssigen Leiters.

Sind in der Nähe des electrodynamischen Kreises galvanische Ketten oder Magnete fest aufgestellt, so werden die von denselben ausgeübten Kräfte eine Verschiebung der beweglichen Theile jenes Kreises zur Folge haben. Die

hierbei geleistete Arbeit ist bei denjenigen Anordnungen, welche wir dem ersten und zweiten Fall unterordnen können, jederzeit bestimmt durch den negativen Zuwachs, welchen das Potential jener Ströme und Magnete auf den electrodynamischen Kreis bei der Verschiebung erleidet. Es gilt dieser Satz daher für die Wechselwirkung geschlossener Spiralen, für die von Zöllner beschriebenen Versuche mit Gleitstellen; es bestimmt derselbe die Gestalt der electrodynamischen Kettenlinie, die Dehnung eines elastischen Leiters unter der Wirkung electrodynamischer Kräfte.

Dagegen unterliegt die Anwendung des Potentialgesetzes gewissen Schwierigkeiten in dem dritten Fall. In diesem lassen sich leicht solche Anordnungen treffen, dass bei einer Verschiebung des Systemes der ponderablen Stromträger eine entsprechende Verschiebung oder Verlängerung der Stromfäden nicht eintritt, also auch das electrodynamische Potential eine merkbare Aenderung nicht erleidet. Eine Ausdehnung des Potentialgesetzes auf derartige Fälle ist nur möglich auf Grund hypothetischer Hülfsvorstellungen über die molecularen Beziehungen zwischen den Theilchen der leitenden Körper und der sie durchströmenden Electricitäten.

Es ergibt sich hieraus das besondere Interesse, welches sich an die Untersuchung derjenigen electrodynamischen Kreise knüpft, welche dem dritten Falle entsprechen. Wie schon erwähnt wurde, gehört hierher die Bewegung einer Flüssigkeit unter der Wirkung electrodynamischer oder electromagnetischer Kräfte, und es ist daher im Folgenden der Versuch gemacht worden, die Theorie einer derartigen Bewegung zu entwickeln und die Resultate derselben mit der Erfahrung zu vergleichen.

II. Es möge zunächst die Vorrichtung beschrieben werden, mit Hülfe derer die im Folgenden untersuchte Bewegung erzeugt wurde. Auf eine kreisförmige Kupferscheibe von 132 mm Durchmesser wurde ein Kupferring von demselben äusseren Durchmesser, einer Breite von 10 mm und einer Dicke von 1 mm aufgelöthet. Es wurde sodann ein Zinkring abgedreht von 4,02 mm Dicke, einem äusseren

Durchmesser von 132 mm, einem inneren Durchmesser von 80,16 mm. Auf die untere Fläche dieses Ringes wurde eine dünne Glasplatte aufgekittet und sodann der eben abgeschliffene Ring auf den ebenfalls eben geschliffenen Kupfering aufgeschraubt, so dass eine möglichst innige Berührung der beiden Ringflächen erzielt wurde. Auf diese Weise wurde eine flache Schale hergestellt, deren Boden durch die Glasplatte, deren Rand durch den Zinkring gebildet wurde; dieselbe wurde mit einer Lösung von Zinkvitriol gefüllt. In ihrer Mitte wurde eine kreisförmige Zinkscheibe von 4,08 mm Dicke und 19,48 mm Durchmesser eingesetzt; auf die obere Seite dieser Scheibe war eine Glasplatte aufgekittet, welche sich auf den durch den Zinkring gebildeten Rand auflegte. Es wurde so eine ringförmige Flüssigkeitsplatte hergestellt, welche oben und unten von zwei parallelen Glasplatten, nach innen und aussen von zwei cylindrischen Zinkflächen abgegrenzt wurde; die Dicke der Platte betrug im Mittel 4,05 mm, der innere Halbmesser 9,74 mm, der äussere 40,08 mm. Die Zinkflächen dienten als Electroden für die Zu- und Ableitung eines radial in der Flüssigkeitsplatte verlaufenden Stromes. Die auf der Zinkscheibe aufgekittete Deckplatte war in der Mitte durchbohrt, sodass ein Zuleitungsdraht von Kupfer in die Scheibe eingeschraubt werden konnte. Die Kupferplatte, welche die Grundlage der ganzen Vorrichtung bildete, trug in der Mitte einen vertical nach unten gehenden Zuleitungsdraht von Kupfer. Die ganze Vorrichtung wurde auf die horizontale Polfläche eines in der Axe durchbohrten Electromagnets aufgesetzt. Wurde der Electromagnet erregt, der durch die Zinkvitriolplatte gehende Strom geschlossen, so gerieth die Flüssigkeit in eine rotirende Bewegung, welche mit Hülfe von Schellacktheilchen beobachtet wurde, die in derselben suspendirt waren.

Unter der Voraussetzung, dass die Theilchen der Flüssigkeit und die Schellacktheilchen concentrische Kreisbahnen um den gemeinsamen Mittelpunkt der Zinkelectroden beschrieben, konnte die Winkelgeschwindigkeit in verschiedenen Entfernungen von jenem Mittelpunkt gemessen werden. Zu diesem Zweck wurde auf der die Flüssigkeit bedeckenden

Glasplatte ein System von unter Winkeln von 45° gegen einander geneigten Durchmessern mit dem Diamant gezogen, und es wurde dann die Zeit beobachtet, welche ein bestimmtes Schellacktheilchen brauchte, um den halben Umfang seiner Bahn zu durchlaufen. Die Bestimmung der Entfernung des Theilchens von dem Mittelpunkt der Electrodenkreise, d. h. die Bestimmung seines Bahnhalbmessers geschah mit Hülfe eines Glasmaassstabes, der so auf die Deckplatte aufgelegt wurde, dass die Enden der Theilstriche genau mit einem der Diamantstriche auf der Platte zusammenfielen. Der Radius Vector der von dem beobachteten Theilchen durchlaufenen Bahn wurde vor und nach der Bestimmung der Umlaufzeit gemessen und so gleichzeitig eine Prüfung der Annahme gewonnen, der zufolge die ganze Bewegung der Flüssigkeit in concentrischen Kreisen vor sich gehen sollte.

Im Folgenden sind die Resultate dreier verschiedener Beobachtungsreihen mitgetheilt; die beiden ersten Columnen enthalten die Radien Vektoren des betreffenden Schellacktheilchens vor und nach der Bestimmung der halben Umlaufzeit, welche in der dritten Columnne angegeben ist; die einzelnen Beobachtungen sind in der Reihenfolge angeführt, in welcher sie der Zeit nach gemacht worden sind.

I. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
11,3	11,4	8,6	19,9	19,8	14,1	20,8	20,8	15,9
11,8	11,8	8,4	22,0	22,0	18,2	27,6	27,5	27,5
13,3	13,3	8,0	26,7	26,7	25,0	10,8	10,8	10,3
16,2	16,0	10,6	33,7	33,7	35,0	11,9	11,8	8,0
16,8	17,0	11,1	33,8	33,8	35,3	13,8	13,8	7,4
17,8	17,7	12,9	33,8	33,8	35,5	14,1	14,3	7,8
22,7	22,8	20,5	11,9	11,9	7,8	15,5	15,6	8,9
20,0	20,7	15,9	13,3	13,4	7,8	21,3	21,5	16,6
25,7	25,8	24,6	15,5	15,6	8,8	28,3	28,6	28,0
27,7	27,1	28,3	20,9	20,9	16,1	33,9	33,9	35,9
28,8	28,3	29,8	23,6	23,8	21,7	34,9	34,4	50,3
30,3	29,4	32,7	26,3	26,8	25,6	12,5	12,3	7,7
33,0	33,1	34,0	27,3	27,3	27,9	12,6	12,6	7,0
37,9	39,3	81,6	34,0	33,9	36,5	15,8	15,8	9,0
12,0	12,0	8,0	33,9	33,9	36,4	15,8	15,7	9,2
11,9	11,9	7,9	11,9	11,9	8,1	21,0	21,0	16,6
12,6	12,7	7,7	13,1	13,1	7,7	21,0	20,9	16,4
15,3	15,3	9,0	15,2	15,2	8,8	32,7	32,8	32,8
17,8	17,9	12,9	19,1	19,7	15,2	33,9	33,9	36,1

II. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
13,8	13,8	9,2	17,6	17,6	14,3	35,6	35,9	49,1
17,3	17,7	11,3	17,9	18,2	14,3	14,6	14,8	10,2
14,5	14,6	9,6	18,9	19,0	15,5	15,7	15,8	11,5
12,7	12,7	8,1	28,3	28,7	28,6	18,9	18,9	13,4
11,7	11,8	8,7	32,8	32,9	36,4	18,8	18,9	13,1
17,5	17,7	12,8	15,0	15,0	10,9	20,9	20,9	15,3
22,3	21,9	17,1	18,2	18,4	15,2	22,0	22,1	17,1
31,3	31,9	35,1	17,8	18,1	14,6	23,1	23,3	19,3
32,8	32,9	37,2	26,2	26,4	25,5	23,4	23,4	19,9
33,6	33,6	37,5	29,6	29,6	29,6	23,6	23,6	20,1
16,3	16,7	12,1	33,9	34,4	38,8	10,8	10,8	9,6
18,3	18,5	14,7	35,8	35,8	48,0	12,8	12,8	8,1
22,4	22,8	19,2	11,0	11,0	8,4	19,0	19,3	13,3
24,9	25,7	22,9	10,8	10,8	9,0	19,3	19,5	13,4
29,3	29,5	31,1	11,6	11,6	8,6	22,6	22,6	17,7
30,7	30,1	35,5	17,6	17,7	14,0	22,3	22,5	17,8
36,1	36,8	51,2	18,8	18,8	13,0	28,9	29,0	27,8
16,2	16,4	12,0	19,3	19,3	13,8	29,9	30,6	36,9
15,1	15,4	10,7	25,4	25,7	26,7	33,6	33,4	40,6
			30,8	31,3	32,0			

III. Beobachtungsreihe.

r_1	r_2	t	r_1	r_2	t	r_1	r_2	t
15,0	15,4	10,2	12,6	12,6	7,7	34,8	35,0	37,1
10,9	11,1	9,3	12,8	12,8	7,9	10,6	10,7	11,1
11,9	12,0	7,8	14,9	14,9	9,8	12,6	12,6	7,8
13,4	13,7	8,0	14,8	14,9	9,5	12,7	12,7	8,0
15,9	16,4	10,4	18,8	18,9	13,8	14,8	14,8	9,7
16,9	17,4	12,0	22,9	23,5	18,7	16,7	16,6	11,0
18,0	18,6	13,6	29,7	30,0	29,4	35,9	35,9	38,7
18,9	19,0	14,0	35,9	36,7	40,7	12,8	12,8	7,9
19,3	19,3	14,3	37,9	38,6	58,8	13,5	13,6	8,6
20,1	20,2	16,6	11,7	11,8	7,8	13,4	13,5	9,0
25,7	25,9	21,9	15,1	15,1	10,3	14,7	14,5	9,1
27,8	28,0	25,4	15,6	15,6	10,2	16,8	17,0	11,1
10,1	10,5	11,3	17,2	17,5	12,1	24,8	24,8	21,9
10,6	10,4	9,3	25,3	25,8	22,1	24,9	24,9	22,5
11,7	11,8	7,8	27,8	28,3	26,5	27,6	28,2	25,9
12,7	12,7	7,7	30,8	31,1	30,5	33,1	33,8	32,8
14,5	14,6	9,4	35,4	35,8	38,1	12,8	12,8	7,9
16,5	16,7	10,2	12,7	12,8	7,9	12,8	12,9	8,0
17,9	18,2	12,1	14,8	14,8	9,7	20,6	20,6	14,9
21,8	22,0	17,1	15,2	15,6	9,7	21,2	21,5	16,0
22,2	22,9	18,0	16,6	16,7	10,9	21,2	21,3	16,9
23,8	24,4	19,5	16,6	16,6	11,1	27,6	27,7	26,5
28,9	29,4	27,5	17,7	17,8	13,0	31,0	31,2	32,9
32,8	33,6	32,6	22,2	22,4	18,3	38,0	38,3	56,4
			35,3	34,9	37,4			

III. Es möge nun die Theorie der im Vorhergehenden beschriebenen Bewegung entwickelt werden. Wir setzen hierbei voraus, dass das magnetische Feld, in welchem die Bewegungen der Flüssigkeit sich vollziehen, ein homogenes ist, und dass die Kraftlinien desselben senkrecht gegen die beiden die Flüssigkeit begrenzenden Ebenen gerichtet sind. Wir nehmen ferner an, dass die Bewegung des galvanischen Stromes von dem inneren nach dem äusseren Electrodenring in radialer Richtung verlaufe, sowie, dass die Dichtigkeit der Strömung in der Richtung der Plattendicke keine Veränderung erleide. Bei der getroffenen Anordnung lag die Flüssigkeitsplatte horizontal, die Bewegung der electrischen Theilchen und der mit denselben beladenen Ionen des Zinkvitriols war demnach als horizontal und die Geschwindigkeit in allen Punkten einer und derselben Verticallinie als gleich zu betrachten.

Die Mittelebene der Flüssigkeitsplatte werde zur xy -Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Axe der concentrischen Electrodenringe zur z -Axe desselben genommen.

Die Intensität des magnetischen Feldes werde bezeichnet durch J . Es sei ferner e diejenige Menge strömender positiver, beziehungsweise negativer Electricität, welche sich in der Volumeneinheit befindet; x_p' , y_p' seien die Geschwindigkeitscomponenten der positiven, x_n' und y_n' die der negativen Electricität. Unter diesen Umständen sind die Componenten der Kräfte, welche auf die strömende positive und negative Electricität eines Volumenelementes $d\tau = dx dy dz$ ausgeübt werden:

$$X_p d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e y_p' dx dy dz, \quad Y_p d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e x_p' dx dy dz,$$

$$X_n d\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e y_n' dx dy dz, \quad Y_n d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e x_n' dx dy dz.$$

Somit sind die Componenten der auf das ganze Volumenelement ausgeübten ponderomotorischen Wirkung:

$$Xd\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J e (y_p' - y_n') dx dy dz,$$

$$Yd\tau = -\frac{\sqrt{2}}{c} J e (x_p' - x_n') dx dy dz.$$

Hier sind die Producte $e(y_p' - y_n')$ und $e(x_p' - x_n')$ nichts anderes als die Strömungskomponenten; bezeichnen wir diese durch u und v , so ist:

$$X d\tau = \frac{\sqrt{2}}{c} J v dx dy dz, \quad Y d\tau = - \frac{\sqrt{2}}{c} J u dx dy dz.$$

Ist λ das galvanische Leitungsvermögen der Flüssigkeit, so können wir:

$$u = - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

setzen, wo unter φ das electrostatische Potential der freien Electricität zu verstehen ist. In unserem Falle, in welchem die Strömung in dem ringförmigen Zwischenraume zwischen zwei concentrischen cylindrischen Electroden vor sich geht, ergibt sich:

$$\varphi = - \frac{i}{2\pi\lambda d} \log r.$$

Hier bezeichnet i die Stromstärke, d die Dicke der Flüssigkeitsplatte und r den Abstand des betrachteten Punktes von der Axe des Ringes, der z -Axe des Coordinatensystems; es ist also:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Hiernach ergibt sich:

$$X = \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d} \frac{\partial \log r}{\partial y}, \quad Y = - \frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{Ji}{2\pi d} \frac{\partial \log r}{\partial x}.$$

Führen wir diese Ausdrücke ein in die Differentialgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit mit innerer Reibung, so ergibt sich, wenn unter u und v die Geschwindigkeitscomponenten in dem Punkte x, y, z , unter p der Druck, unter μ die Dichtigkeit, unter k die Reibungsconstante verstanden wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{\mu} \Delta u + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sqrt{2}}{c} \frac{Ji}{2\pi d \mu} \frac{\partial \log r}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k}{\mu} \Delta v + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} &= - \frac{\sqrt{2}}{c} \frac{Ji}{2\pi d \mu} \frac{\partial \log r}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Den früheren Annahmen entsprechend, ist die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung der z -Axe gleich Null gesetzt. Um die Gleichungen zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall der stationären Bewegung, wir nehmen ferner an, dass die Geschwindigkeiten u und v klein sind, sodass wir die mit denselben multiplicirten Glieder vernachlässigen können, und wir setzen endlich den Druck p als constant voraus. Dann ergeben sich, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{J_i}{2\pi dk} = A$$

die Gleichungen:

$$\Delta u = -A \frac{\partial \log r}{\partial y}, \quad \Delta v = A \frac{\partial \log r}{\partial x},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2$.

Da durch die Beobachtungen gezeigt ist, dass die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in einer Rotation um den Mittelpunkt des Coordinatensystems besteht, so können wir für u und v den Ansatz machen:

$$u = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x},$$

wo W eine Function, die nur abhängig ist von r und z . Es ist dann die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit in verschiedenem Abstände r von der z -Axe gegeben durch:

$$\omega = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Zur Ermittlung der Function W ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\Delta W = A \log r \quad \text{oder:} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = A \log r.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist im allgemeinen noch eine willkürliche Constante hinzuzufügen. Wir setzen dieselbe gleich Null, da sie auf den Verlauf unserer Rechnung ohne Einfluss ist.

Wir setzen:

$$W = U_1 \cos \frac{z\pi}{d} + U_3 \cos \frac{3z\pi}{d} + \dots$$

dann wird die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr} \cos \frac{z\pi}{d} + \frac{1}{r} \frac{dU_3}{dr} \cos \frac{3z\pi}{d} + \dots$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\omega_1 = \frac{1}{r} \frac{dU_1}{dr}, \quad \omega_3 = \frac{1}{r} \frac{dU_3}{dr} \dots$$

$$\omega = \omega_1 \cos \frac{z\pi}{d} + \omega_3 \cos \frac{3z\pi}{d} + \dots$$

Es wird somit $\omega = 0$ für $z = \pm d/2$, d. h. für alle Punkte der beiden die Flüssigkeit begrenzenden der xy -Ebene parallelen Glasflächen. Setzen wir den für W gemachten Ansatz ein in der Differentialgleichung, welcher W genügen muss, so ergibt sich:

$$\left(\frac{d^2 U_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_1}{dr} - \frac{\pi^2}{d^2} U_1 \right) \cos \frac{z\pi}{d} + \left(\frac{d^2 U_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_3}{dr} - \frac{9\pi^2}{d^2} U_3 \right) \cos \frac{3z\pi}{d} + \dots = A \log r.$$

Mit Hilfe der Relation:

$$\frac{\pi}{4} = \cos \frac{z\pi}{d} - \frac{1}{3} \cos \frac{3z\pi}{d} + \dots$$

kann auch die rechte Seite der Gleichung nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von $z\pi/d$ entwickelt werden, und wir erhalten dann zur Bestimmung von U_n die Gleichung:

$$\frac{d^2 U_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_n}{dr} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2} U_n = \varepsilon \frac{4A}{n\pi} \log r,$$

wo: $\varepsilon = +1$ für $n = 1, 5, 9 \dots$, $\varepsilon = -1$ für $n = 3, 7, 11 \dots$

Durch Differentiation ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung eine andere zur Bestimmung von:

$$\omega_n = \frac{1}{r} \frac{dU_n}{dr}$$

$$\frac{d^2 \omega_n}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\omega_n}{dr} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \omega_n = \varepsilon \frac{4A}{n\pi} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist:

$$\omega_n = - \varepsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \frac{d^2}{r^2}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich, wenn man zu diesem Ausdrücke noch das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2 v_n}{dr^2} + \frac{3}{r} \cdot \frac{dv_n}{dr} - \frac{n^2 \pi^2}{d^2} v_n = 0$$

hinzufügt. Diese Gleichung kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2 (v_n r \sqrt{r})}{dr^2} - \left(\frac{n^2 \pi^2}{d^2} + \frac{3}{4r^2} \right) v_n r \sqrt{r} = 0,$$

oder für grössere Werthe von r :

$$\frac{d^2 (v_n r \sqrt{r})}{dr^2} = \frac{n^2 \pi^2}{d^2} v_n r \sqrt{r}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$v_n = \frac{A_n e^{\frac{n\pi r}{d}} + B_n e^{-\frac{n\pi r}{d}}}{r \sqrt{r}}$$

und somit:

$$\omega_n = -\epsilon \frac{4A}{n^3 \pi^3} \cdot \frac{d^2}{r^2} + \frac{A_n e^{\frac{n\pi r}{d}} + B_n e^{-\frac{n\pi r}{d}}}{r \sqrt{r}}.$$

Die Integrationsconstanten A_n und B_n bestimmen sich durch die Annahme, dass die Winkelgeschwindigkeit an den beiden Electrodenflächen gleich Null werde. Bezeichnen wir durch a und b die Radien der entsprechenden Kreise, so ergibt sich:

$$\omega_n = -\epsilon \frac{4A}{n^3} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{d^2}{r^2} \times \left\{ \begin{aligned} &1 - \sqrt{\frac{r}{a}} \cdot \frac{e^{\frac{n\pi b-r}{d}} - e^{-\frac{n\pi b-r}{d}}}{e^{\frac{n\pi b-a}{d}} - e^{-\frac{n\pi b-a}{d}}} \\ &- \sqrt{\frac{r}{b}} \cdot \frac{e^{\frac{n\pi r-a}{d}} - e^{-\frac{n\pi r-a}{d}}}{e^{\frac{n\pi b-a}{d}} - e^{-\frac{n\pi b-a}{d}}} \end{aligned} \right\}.$$

Wofür näherungsweise gesetzt werden kann:

$$\omega_n = -\epsilon \frac{4A}{n^3} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{d^2}{r^2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{r}{a}} e^{-\frac{n\pi r}{d}} - \sqrt{\frac{r}{b}} e^{-\frac{n\pi b-r}{d}} \right\}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen im Abstände r von der Rotationsaxe erhalten wir somit die Reihe

$$\begin{aligned} \frac{\pi^3}{4A} \omega = & -\frac{d^3}{r^3} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{r}{a}} e^{-\pi \frac{r-a}{d}} - \sqrt{\frac{r}{b}} e^{-\pi \frac{b-r}{d}} \right\} \cos \frac{z\pi}{d} \\ & + \frac{1}{27} \cdot \frac{d^3}{r^3} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{r}{a}} e^{-3\pi \frac{r-a}{d}} - \sqrt{\frac{r}{b}} e^{-3\pi \frac{b-r}{d}} \right\} \cos \frac{3z\pi}{d} \\ & - + \dots \end{aligned}$$

IV. Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen. — Aus der im Vorhergehenden gegebenen Formel kann die mit dem constanten Factor $\pi^3/4A$ multiplicirte Winkelgeschwindigkeit ω berechnet werden, welche in einer bestimmten Entfernung r von der Axe des Flüssigkeitsringes und in einer bestimmten Tiefe z der Flüssigkeit vorhanden ist. Andererseits geben die früher mitgetheilten Beobachtungen die Winkelgeschwindigkeit der in der Flüssigkeit suspendirten Theilchen in verschiedenen Entfernungen von der Rotationsaxe; die Tiefe aber, in welcher sich die beobachteten Theilchen in der Flüssigkeit befinden, war ohne Zweifel für die einzelnen Theilchen verschieden und war bei den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen für keines derselben bestimmt worden. Um trotzdem eine Vergleichung der theoretischen Formel mit den Beobachtungen zu ermöglichen, wurde die Annahme gemacht, dass alle beobachteten Theilchen in der Mitte der Flüssigkeitsschicht sich befunden haben, dass also für alle $z = 0$ gesetzt werden könne. Dieser Annahme war bei der Ausführung der Messungen dadurch einigermaßen entsprochen worden, dass möglichst nur die mit den grössten Rotationsgeschwindigkeiten behafteten Schellacktheilchen beobachtet wurden. Unter dieser Annahme wurde der Werth von $\omega \pi^3/4A$ berechnet mit Benutzung der zwei ersten Glieder der Reihenentwicklung für alle ganzen Werthe von $r = 10$ bis $r = 40$ und für $r = 11,5$ und $r = 12,5$. Hierbei war nach den früher mitgetheilten Messungen zu setzen:

$$a = 40,08; \quad b = 9,74; \quad d = 4,05.$$

Die den beobachteten Entfernungen der suspendirten Theilchen entsprechenden Werthe von $\omega \pi^3/4A$ wurden aus den berechneten Werthen dieser Function mittelst graphischer Interpolation bestimmt. Durch Division der beobachteten Winkelgeschwindigkeiten mit jenen Werthen von $\omega \pi^3/4A$

ergab sich der Werth von $4A/\pi^3$. Aus sämmtlichen für die einzelnen Entfernungen berechneten Werthen dieses Factors wurde das Mittel genommen und durch Multiplication der theoretischen Werthe von $\omega\pi^3/4A$ mit diesem Mittelwerth sind die berechneten Werthe von ω erhalten.

In den folgenden Tabellen sind die verschiedenen in Betracht kommenden Grössen für die früher mitgetheilten Beobachtungsreihen zusammengestellt. Hierbei sind die einzelnen Beobachtungsreihen geordnet nach den Werthen von r , und sind nahe beisammen liegende Werthe von r und ω zu einem Mittelwerth vereinigt.

I. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
10,8	0,305	0,0675	4,52	0,358	20,8	0,197	0,0367	5,36	0,194
11,3	0,366	0,0833	4,39	0,441	20,9	0,193	0,0362	5,33	0,192
11,8	0,375	0,0872	4,30	0,462	21,4	0,189	0,0345	5,48	0,189
11,9	0,395	0,0875	4,52	0,464	22,0	0,173	0,0326	5,31	0,173
12,0	0,393	0,0877	4,48	0,465	22,7	0,153	0,0306	5,00	0,162
12,4	0,409	0,0872	4,69	0,462	23,7	0,145	0,0282	5,14	0,149
12,6	0,429	0,0865	4,95	0,458	25,7	0,128	0,0240	5,33	0,127
13,1	0,409	0,0839	4,87	0,445	26,5	0,123	0,0226	5,44	0,120
13,3	0,398	0,0819	4,85	0,434	26,7	0,126	0,0223	5,65	0,118
13,8	0,425	0,0784	5,42	0,415	27,3	0,112	0,0212	5,28	0,112
14,2	0,403	0,0752	5,36	0,398	27,5	0,114	0,0210	5,43	0,111
15,2	0,353	0,0665	5,29	0,352	28,4	0,112	0,0197	5,68	0,104
15,5	0,355	0,0645	5,50	0,342	28,5	0,106	0,0196	5,41	0,104
15,8	0,345	0,0630	5,48	0,334	29,8	0,096	0,0179	5,36	0,094
16,1	0,296	0,0610	4,85	0,323	33,0	0,091	0,0141	6,50	0,075
16,9	0,283	0,0550	5,15	0,291	33,7	0,089	0,0138	6,43	0,073
17,8	0,244	0,0498	4,90	0,264	33,9	0,086	0,0136	6,35	0,072
19,4	0,206	0,0419	4,91	0,222	34,6	0,063	0,0130	4,85	0,069
19,8	0,223	0,0401	5,56	0,212	38,6	0,038	0,0068	5,59	0,036
20,3	0,197	0,0382	5,16	0,202					

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen

von $r = 10$ bis $r = 15$: $4A/\pi^3 = 4,76$

„ „ = 15 „ „ = 20 „ = 5,20

„ „ = 20 „ „ = 25 „ = 5,25

„ „ = 25 „ „ = 30 „ = 5,45

„ „ = 30 „ „ = 40 „ = 5,81

Das Hauptmittel ist:

$$4A/\pi^3 = 5,30$$

der Werth, mit Hülfe dessen die berechneten Werthe von ω erhalten sind.

II. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
10,8	0,338	0,0660	5,13	0,343	20,9	0,204	0,0363	5,62	0,189
11,0	0,375	0,0753	4,98	0,399	22,1	0,184	0,0322	5,55	0,167
11,7	0,364	0,0865	4,20	0,458	22,4	0,177	0,0315	5,62	0,164
12,7	0,389	0,0862	4,51	0,448	22,6	0,170	0,0310	5,50	0,161
12,8	0,389	0,0858	4,53	0,446	23,4	0,159	0,0289	5,48	0,150
13,8	0,342	0,0785	4,36	0,408	25,3	0,138	0,0248	5,56	0,129
14,5	0,328	0,0723	4,55	0,376	25,5	0,128	0,0243	5,27	0,126
14,7	0,308	0,0711	4,33	0,370	26,3	0,123	0,0229	5,37	0,119
15,0	0,289	0,0686	4,21	0,357	28,5	0,110	0,0197	5,58	0,102
15,2	0,294	0,0668	4,40	0,347	29,5	0,103	0,0182	5,68	0,094
16,3	0,262	0,0592	4,42	0,308	30,3	0,086	0,0172	5,40	0,089
16,5	0,260	0,0580	4,48	0,301	31,0	0,098	0,0163	6,01	0,084
17,6	0,230	0,0509	4,51	0,265	31,6	0,090	0,0159	5,65	0,083
18,0	0,217	0,0487	4,45	0,253	32,8	0,085	0,0145	5,90	0,075
18,3	0,206	0,0471	4,37	0,245	33,5	0,080	0,0139	5,77	0,072
18,4	0,213	0,0465	4,58	0,242	34,1	0,081	0,0134	6,05	0,070
18,9	0,231	0,0441	5,25	0,229	35,7	0,064	0,0119	5,37	0,062
19,3	0,228	0,0424	5,38	0,220	36,4	0,062	0,0111	5,63	0,058
19,4	0,235	0,0419	5,61	0,218					

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen:

von $r = 10$ bis $r = 15$:	$4A/\pi^3 = 4,57$	von „ $= 25$ „ „ $= 30$ „	$= 5,49$
„ „ $= 15$ „ „ $= 20$ „	$= 4,70$	„ „ $= 30$ „ „ $= 40$ „	$= 5,68$
„ „ $= 20$ „ „ $= 25$ „	$= 5,55$		

Im Mittel ist: $4A/\pi^3 = 5,20$.

III. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
10,3	0,278	0,0410	6,78	0,227	19,3	0,219	0,0422	5,19	0,234
10,5	0,338	0,0511	6,62	0,283	20,6	0,210	0,0375	5,60	0,208
10,6	0,283	0,0585	4,84	0,324	21,2	0,190	0,0352	5,39	0,195
11,0	0,338	0,0753	4,49	0,417	21,9	0,184	0,0328	5,61	0,182
11,8	0,404	0,0873	4,62	0,483	22,4	0,173	0,0314	5,52	0,174
12,7	0,400	0,0861	4,65	0,477	23,2	0,168	0,0294	5,71	0,164
13,5	0,379	0,0802	4,73	0,444	24,1	0,161	0,0272	5,92	0,151
14,5	0,342	0,0727	4,70	0,403	24,8	0,142	0,0257	5,52	0,142
14,8	0,330	0,0700	4,71	0,388	25,5	0,142	0,0243	5,84	0,134
15,1	0,305	0,0678	4,50	0,375	25,8	0,144	0,0239	6,03	0,131
15,3	0,316	0,0662	4,77	0,366	27,6	0,118	0,0208	5,67	0,122
15,6	0,308	0,0644	4,78	0,357	28,0	0,119	0,0202	5,91	0,112
16,1	0,302	0,0601	5,03	0,333	29,2	0,114	0,0187	6,10	0,103
16,6	0,291	0,0571	5,12	0,316	29,8	0,107	0,0179	6,01	0,099
17,0	0,272	0,0542	5,02	0,300	31,0	0,099	0,0164	6,01	0,091
17,3	0,260	0,0525	4,95	0,291	33,3	0,095	0,0141	6,77	0,078
17,7	0,242	0,0500	4,84	0,277	35,0	0,084	0,0126	6,67	0,070
18,0	0,260	0,0485	5,36	0,268	35,7	0,082	0,0119	6,88	0,066
18,3	0,231	0,0470	4,91	0,260	36,3	0,077	0,0112	6,87	0,062
18,9	0,226	0,0442	5,10	0,245	38,2	0,054	0,0079	6,78	0,044

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen:

von $r = 10$ bis $r = 15$:	$4A/\pi^3 = 4,53$
„ „ = 15 „ „ = 20 „	= 4,96
„ „ = 20 „ „ = 25 „	= 5,61
„ „ = 25 „ „ = 30 „	= 5,93
„ „ = 30 „ „ = 40 „	= 6,65.

Hierbei sind die beiden ersten Werthe für $r = 10,3$ und $r = 10,5$ nicht mit berücksichtigt.

Das Hauptmittel ist:

$$\frac{4A}{\pi^3} = 5,54.$$

Die berechneten Werthe der Winkelgeschwindigkeiten sind auf Taf. V Fig. 2 durch die Curven I, II und III dargestellt, während die den beobachteten Werthen entsprechenden Punkte durch gerade Linien miteinander verbunden sind. Die Abweichung der aus den Beobachtungen sich ergebenden gebrochenen Linien von den der theoretischen Formel entsprechenden Curven dürfte vorzugsweise durch die folgenden Umstände bedingt sein.

1. Die Schellacktheilchen, deren Umlaufszeiten beobachtet worden sind, gehören nicht der Mittelebene der Flüssigkeitsplatte an, für welche die theoretischen Werthe berechnet sind, sondern befinden sich in verschiedenen Entfernungen von dieser.

2. Bei der Entwicklung der Theorie wurde die Voraussetzung gemacht, dass in den allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen die Glieder, welche die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen und die ersten Differentialquotienten derselben nach den Coordinaten enthalten, zu vernachlässigen sind. Es ist wahrscheinlich, dass dies für die dem inneren Electrodenrand benachbarten Theile der Flüssigkeit nicht zulässig ist.

3. Die hydrodynamischen Differentialgleichungen werden überdies integrirt nur für grosse Werthe des Radius vectors r . Auch hierdurch kann eine Abweichung des theoretischen Werthes der Geschwindigkeit von dem beobachteten bedingt sein.

Der erste Umstand macht sich ohne Zweifel geltend bei

der zweiten Beobachtungsreihe. Man sieht, dass die Linie, welche die beobachteten Werthe der Winkelgeschwindigkeit verbindet bei $r = 18,3$ eine plötzliche Verschiebung erleidet, entsprechend einem Uebergang zu verhältnissmässig grösseren Geschwindigkeiten der Theilchen. Es würde dies darauf hinweisen, dass die von dem inneren Electrodenring bis zu jenem Radius vector beobachteten Theilchen der Mittelebene der Flüssigkeitsscheibe ferner liegen, als die in dem äusseren Theil des Flüssigkeitsrings beobachteten. Durch denselben Umstand dürfte auch die dritte Beobachtungsreihe entstellt sein.

Der Einfluss des zweiten und dritten Punktes gibt sich deutlich bei der ersten Beobachtungsreihe zu erkennen dadurch, dass von $r = 11$ bis $r = 13,3$ die beobachteten Geschwindigkeiten erheblich hinter den berechneten zurückbleiben. Wenn hierbei der zweite Punkt derjenige ist, welcher den grössten Einfluss ausübt, so muss der Anschluss der beobachteten Winkelgeschwindigkeiten an die berechneten ein um so besserer sein, je kleiner die absoluten Werthe dieser Geschwindigkeiten sind. Dies wird bestätigt durch eine vierte Beobachtungsreihe, bei der die Winkelgeschwindigkeiten nur $\frac{2}{3}$ der bisherigen betrugen, und deren Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

IV. Beobachtungsreihe.

r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.	r	ω beob.	$\omega \frac{\pi^3}{4A}$	$\frac{4A}{\pi^3}$	ω ber.
12,3	0,283	0,0876	3,23	0,312	19,5	0,139	0,0414	3,36	0,147
12,5	0,286	0,0869	3,29	0,310	20,0	0,154	0,0393	3,92	0,140
12,9	0,281	0,0850	3,31	0,303	20,8	0,140	0,0368	3,80	0,131
13,0	0,281	0,0840	3,34	0,299	21,5	0,110	0,0340	3,24	0,121
13,7	0,255	0,0789	3,23	0,281	23,7	0,100	0,0281	3,56	0,100
13,8	0,260	0,0734	3,32	0,279	24,9	0,101	0,0256	3,94	0,091
15,6	0,237	0,0645	3,67	0,230	25,5	0,080	0,0244	3,28	0,087
15,7	0,233	0,0635	3,67	0,226	26,5	0,080	0,0227	3,52	0,081
15,8	0,224	0,0629	3,56	0,224	31,3	0,063	0,0160	3,94	0,056
16,8	0,222	0,0556	3,99	0,198	31,7	0,056	0,0156	3,59	0,055
17,1	0,209	0,0539	3,87	0,192	38,2	0,031	0,0080	3,87	0,029
18,8	0,145	0,0448	3,24	0,159					

Für $4A/\pi^3$ ergibt sich im Mittel aus den Beobachtungen:

von $r = 10$ bis $r = 15$	$4A/\pi^3 = 3,29$
„ „ = 15 „ „ = 20	„ = 3,62
„ „ = 20 „ „ = 25	„ = 3,69
„ „ = 25 „ „ = 30	„ = 3,40
„ „ = 30 „ „ = 40	„ = 3,80

Das Hauptmittel ist $4A/\pi^3 = 3,56$.

Die für diesen letzteren Werth sich ergebende Geschwindigkeitscurve ist in der Tafel gleichfalls mit den beobachteten Werthen der Winkelgeschwindigkeit zusammengestellt.

XIV. *Beobachtungen mit der magnetischen Wage von Toepler; von J. Freyberg.*

(Hierzu Taf. V Fig. 3–5.)

Bekanntlich hat Hr. Prof. Toepler in den Sitzungsberichten der Berliner Academie vom 18. October 1883¹⁾ die Einrichtung einer Wage angegeben, welche den Zweck hat, bei Absolutbestimmungen der Horizontalintensität die Schwingungsbeobachtung durch eine Wägung zu ersetzen.

Die von Toepler benutzte Wage wurde von demselben inzwischen mit einigen Abänderungen versehen, namentlich wurde an ihr eine Spiegelablesung angebracht. Da mit Anwendung dieses Hilfsmittels eine grössere Genauigkeit der Wägungen zu erwarten war, so schien es nicht unzweckmässig, die Toepler'schen Angaben durch die im Nachfolgenden mitgetheilten Beobachtungen zu ergänzen, bei denen auf den Einfluss der Temperatur besonders geachtet worden ist.

Zunächst will ich mit Ermächtigung von Prof. Toepler an der schematischen Fig. 3 die Einrichtung der benutzten Wage beschreiben. Die Figur ist nur eine Uebersichtszeichnung; die feineren Details der Correctionsvorrichtungen u. s. w. fehlen in derselben.

Auf einem festen eisenfreien Dreifuss D mit Stellschrau-

1) Vgl. auch Wied. Ann. 21. p. 158–175. 1884. Auf diese Abhandlung beziehen sich auch alle weiter folgenden Citate.