V! *Berechnung der hyperbolischen dunkeln Büschel, welche die farbigen Ringe zweiaxiger Krystalle durchschneiden;*

von J. Müller in Gießen.

In einer Platte, die aus einem zweiaxigen Krystall so geschnitten ist, daß ihre Oberflächen senkrecht auf der Mittellinie stehen, sieht man, wenn sie sich zwischen gekreuzten Turmalinplatten befindet, ein System farbiger Lemniscaten. Durch jeden der beiden Pole dieser Lemniscaten geht ein dunkler hyperbolischer Büschel, dessen Lage und Gestalt sich ändert, wenn die Ebene der optischen Axen ihre Lage gegen die Polarisations Ebenen der Turmalinplatten ändert. Ist der Winkel der beiden optischen Axen zu groß, so fallen die Pole der Lemniscaten außerhalb des Gesichtsfeldes, welches man in der senkrecht auf die Mittellinie geschnittenen Platte übersehen kann. In solchen Krystallen, für welche der Winkel der optischen Axen groß ist, kann man deshalb bekanntlich zu gleicher Zeit nur eines der Ringsysteme übersehen, welche die Pole umgeben, wenn die Oberflächen der Platte senkrecht, oder doch nahe senkrecht auf der einen optischen Axe sind. Auch in diesem Falle, daß man nur das eine Ringsystem sieht, erscheint es ebenfalls durch einen dunkeln Büschel durchschnitten, dessen Lage sich mit der Lage des Krystalls zwischen den Turmalinen ändert. Unter den Krystallen, deren optische Axen nur einen kleinen Winkel mit einander machen, in denen man also leicht die beiden Ringsysteme zugleich übersehen kann, ist wohl der Salpeter am häufigsten zu Beobachtungen angewendet worden. Fast in allen physikalischen und optischen Lehrbüchern findet man die m Salpeter zu beobachtenden Lemniscaten abgebildet:

Während in diesen Abbildungen die Form der Lemniscaten selbst gut mit der Beobachtung übereinstimmt, ist die Zeichnung der schwarzen Büschel fast durchgängig so ungenau, daß schon eine oberflächliche Betrachtung des Phänomens selbst die Incorrectheit der Zeichnungen zu Genüge darzuthun im Stande ist: Der Grund davon liegt unstreitig darin, daß man das geometrische Gesetz der Lemniscaten kennt, daß man diese Lemniscaten also construiren kann, während die hyperbolischen Büschel wahrscheinlich nur nach einer oberflächlichen Beobachtung gezeichnet worden sind. So viel geht wenigstens aus diesen Figuren hervor, daß man das Gesetz, nach welchem sich diese Hyperbeln construiren lassen, nicht kannte.

In dem Folgenden will ich versuchen, die Gestalt dieser hyperbolischen Büschel aus den Gesetzen der doppelten Brechung zweiaxiger Krystalle selbst zu berechnen.

Jeder Lichtstrahl, welcher nach dem Durchgang durch die Krystallplatte und die zweite Turmalinplatte in das Auge trifft, wird durch die Interferenz zweier, in gleicher Richtung aus dem Krystall austretender Strahlen gebildet, die im Krystall nach verschiedenen Richtungen sich bewegten, und deren Polarisations Ebenen vor der Zerlegung durch die zweite Turmalinplatte rechtwinklig zu einander waren. Die Intensität eines solchen, das Auge treffenden Strahls hängt nun ab 1) von der Anzahl φ der Wellenlängen, um welche der eine der beiden interferirenden Strahlen dem andern vorangeeilt ist; und 2) von der Größe des Winkels, welchen die Polarisations Ebenen der beiden Strahlen im Krystall mit der Polarisations Ebene der Zerlegungsplatte machen.

Wäre dieser Winkel φ unveränderlich, so würde man die Lemniscaten ohne alle Unterbrechung durch dunkle Büschel sehen. Dahingegen würde man keine Lemniscaten, sondern nur die schwarzen Büschel sehen,

wenn sich die Anzahl ϑ der Wellenlängen, nicht änderte, um welche der eine der interferirenden Strahlen im Krystall dem andern vorausgeeilt ist. Es geht daraus hervor, daß, um die Form der Lemniscaten zu finden, man nur den Zusammenhang zwischen ϑ und der Richtung des austretenden Strahls zu untersuchen hat; will man hingegen die Form der hyperbolischen Büschel ausfindig machen, so hat man die Relation zwischen φ und der Richtung der austretenden Strahlen zu untersuchen. Durch diese Trennung wird die Lösung eines jeden der beiden Probleme erleichtert; hat man aber erst einmal die Form der Lemniscaten und der hyperbolischen Büschel, jedes für sich, bestimmt, so giebt die Combination beider die vollständige Erscheinung.

Diese in der Untersuchung gemachte Trennung läßt sich auch beim Versuch theilweise ausführen, wenigstens kann man die schwarzen Büschel verschwinden machen (Airy, über einen neuen Lichtzerleger, diese Annalen, Bd. XXVI), so daß nun die Lemniscaten völlig ununterbrochen erscheinen. Die Lemniscaten aber kann man nicht verschwinden machen. Die Lemniscaten sind jedoch sehr störend, wenn es sich darum handelt, nur die Form der schwarzen Büschel zu beobachten. Um diesen störenden Einfluß möglichst zu vermindern, wählt man am zweckmäßigsten sehr dicke Krystallplatten. In solchen nämlich verschwinden die Lemniscaten zwischen den beiden Polen fast ganz, dicht um die Pole selbst erscheint nur noch eine Reihe ganz feiner Ringe, die wegen ihrer Kleinheit die Beobachtung der Büschel nicht stören. Ich habe Salpeterplatten von 3 bis 5 Linien Dicke angewandt, um die Resultate der folgenden Rechnungen mit der Erscheinung zu vergleichen.

Wenn wir die drei Elasticitätsaxen eines zweiaxigen doppeltbrechenden Krystalls als drei Coordinatenaxen betrachten, so kann man durch die Gleichung:

$$z=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die auf der Mittellinie des Krystalls senkrechte Oberfläche darstellen, wenn die Axe der z mit der Mittellinie des Krystalls zusammenfällt. Die gerade Linie, nach welcher sich ein Lichtstrahl während seines Durchgangs durch eine senkrecht auf die Mittellinie geschnittene Platte bewegt, kann durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{1}{C}z \\ y &= \frac{B}{C}z \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

dargestellt werden. Die Gleichung einer Ebene, welche auf dieser Linie senkrecht steht, und durch den Mittelpunkt des über die drei Elasticitätsaxen construirten Ellipsoids geht, ist alsdann:

$$x = By + Cz \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Die Schwingungen des in der Richtung der Linie (2) sich fortplanzenden Strahles geschehen, wie bekannt, in der Ebene (3); für jeden in der Ebene (3) liegenden Leitstrahl haben wir aber:

$$\cos X = B \cos Y + C \cos Z \cdot \cdot \cdot (4)$$

wenn X , Y und Z die Winkel bezeichnen, die er mit den entsprechend bezeichneten Coordinatenaxen macht.

Weil der Lichtstrahl (2) sich in einem doppeltbrechenden Krystall fortplanzet, so können die Schwingungen, die ihn bilden, nicht nach jeder beliebigen Richtung in der Ebene (3) stattfinden, oder, mit anderen Worten, nicht nach allen in der Gleichung (4) befaßten Leitstrahlen können die Schwingungen vor sich gehen, welche den Lichtstrahl (2) fortplanzen, sondern nur nach zwei derselben, welche rechtwinklig auf einander stehen. Der eine dieser beiden Lichtstrahlen ist der größte, der andere der kleinste unter allen Leitstrahlen, welche sich von dem Mittelpunkte der Elasticitätsoberfläche zu dem Durchschnitt derselben mit der Ebene (3) ziehen lassen. Die Bedingungsgleichung, durch welche die Lage dieser beiden Leitstrahlen bestimmt wird, ist:

$$a^2 \cos X (B \cos Z - C \cos Y) + b^2 \cos Y (C \cos X + \cos Z) - c^2 \cos Z (B \cos X + \cos Y) = 0 \quad . \quad . \quad (5) *$$

Eine durch die Linie (2) und einen der erwähnten Lichtstrahlen gelegte Ebene ist die Polarisationssebene des einen der beiden Strahlen, welche sich in der Richtung der Linie (2) durch den Krystall fortpflanzen. Die Gleichung dieser Polarisationssebene sey:

$$x = \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Soll sie durch die Linie (2) gehen, so haben wir die Bedingung:

$$\frac{1}{C} + \frac{\mathfrak{B} \cdot B}{C} + \mathfrak{C} = 0$$

und daraus:

$$\mathfrak{C} = - \frac{1 + \mathfrak{B} \cdot B}{C} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Bedingung, daß die Ebene (6) auch durch den Leitstrahl gehen soll, welcher die Winkel X , Y und Z mit den Coordinatenaxen macht, ist:

$$\cos X = \mathfrak{B} \cdot \cos Y + \mathfrak{C} \cos Z, \quad +$$

oder:

$$\cos X = \mathfrak{B} \cdot \cos Y - \frac{1 + \mathfrak{B} \cdot B}{C} \cos Z \quad . \quad . \quad (8)$$

Setzt man in (6) $z=0$, so sind

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ x=\mathfrak{B}y \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

die Gleichungen der Durchschnittslinie der Polarisationssebene mit der Oberfläche des Krystalls, und daraus geht hervor, daß $\mathfrak{B}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ω ist, den dieser Durchschnitt mit der Axe der x macht.

Eliminirt man $\cos X$, $\cos Y$ und $\cos Z$ aus den Gleichungen (1), (5) und (8), so erhält man eine Gleichung zwischen $\mathfrak{B}$, oder, was dasselbe ist, zwischen $\tan \omega$, B und C . Wenn man in diese Gleichung für den Win-

*) Fresnel, *Memoire sur la double refraction*. (Diese Annalen, Bd. XXIII S. 498.)

kel ω einen bestimmten Werth setzt, so erhält man eine Gleichung zwischen den die Richtung der Linie bestimmenden Größen B und C , welche erfüllt seyn muß, wenn die Polarisationssebene des nach der Linie (2) sich bewegenden Strahles die Oberfläche des Krystalls in einer Linie schneiden soll, welche einen bestimmten Winkel φ mit der Axe der x macht. Gehen wir nun zur Ausführung dieser Eliminationen über. Aus den Gleichungen (4) und (8) folgt:

$$B \cos Y + C \cos Z = \tan \omega \cdot \cos Y - \frac{1 + \tan \omega \cdot B}{C} \cos Z,$$

daraus:

$$\cos Y = \frac{C^2 + 1 + \tan \omega \cdot B}{C(B - \tan \omega)} \cos Z \quad . \quad (10)$$

Diesen Werth in (4) substituirt:

$$\cos X = - \frac{B + (B^2 + C^2) \tan \omega}{C(B - \tan \omega)} \cos Z \quad . \quad (11)$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (5), so kommt nach Ausführung aller Reductionen:

$$b^2 [C^2 + 1 + B \tan \omega] \tan \omega - a^2 [B + (B^2 + C^2) \tan \omega] + c^2 (B - \tan \omega)(1 + B \tan \omega) = 0 \quad . \quad (12)$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist.

Die Form der Lichterscheinungen, welche man in einer zwischen den Turmalinplatten liegenden Krystallplatte beobachtet, hängt aber zunächst nicht von der Richtung der Lichtstrahlen in der Platte, sondern von der Richtung ab, in welcher die austretenden Strahlen das Auge treffen. Es kommt demnach nun darauf an die Richtung zu bestimmen, in welcher sich ein Lichtstrahl nach seinem Austritt aus der Platte fortpflanzt, der den Krystall in der durch die Gleichung (2) bestimmten Linie durchlief. In der Richtung der Linie (2) geht aber ein ordinärer und ein extraordinärer Strahl durch den Krystall, welche, streng genommen, nach dem Austritt aus der Platte divergiren, während nach gleicher Richtung solche Strahlen austreten, welche im Krystall

divergirten. Es seyen O und E die beiden Strahlen, die im Krystall gleiche Richtung haben, E' der extraordinäre Strahl, der mit O nach gleicher Richtung austritt. Da die Divergenz der beiden extraordinären Strahlen E und E' im Krystall jedenfalls sehr unbedeutend ist, so kann man ohne allen merklichen Fehler annehmen, daß ihre Polarisations Ebenen dieselbe Richtung haben. Um also die Polarisations Ebene des Strahls zu bestimmen, der nach dem Austritt aus dem Krystall mit dem austretenden Strahl O dieselbe Richtung hat, haben wir nur die Polarisations Ebene des extraordinären Strahls zu bestimmen, dessen Richtung im Krystall mit O zusammenfällt.

Bezeichnen wir mit φ den Winkel, den der austretende Strahl mit dem Einfallslothe macht, durch α den Winkel, den die Projection des austretenden Strahls auf der Oberfläche des Krystalls mit der Axe der x macht, so sind die Gleichungen der Linie, in welche sich der austretende Strahl fortpflanzt:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin \alpha \cdot \tan \varphi \cdot z \\ x &= \cos \alpha \cdot \tan \varphi \cdot z \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (13)$$

Die Richtung, nach welcher sich der nach (13) austretende ordinäre Strahl im Krystall fortpflanzt, läßt sich aber für unsere Untersuchung mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen, wenn man annimmt, daß die Brechung eine gewöhnliche und b der Brechungsexponent sey. Diefes vorausgesetzt, wäre also, wenn φ' den Winkel bezeichnet, den der Strahl im Krystall mit dem Einfallslothe macht:

$$\sin \varphi' = b \sin \varphi$$

und also:

$$\tan \varphi = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Die Gleichungen der Linie, nach welcher sich der Strahl im Krystall fortpflanzt, wären demnach:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin \alpha \cdot \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi}} z \\ x &= \cos \alpha \cdot \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi}} z \end{aligned} \right\} \quad , \quad (14)$$

Diese Linie aber soll mit (2) identisch seyn, man hat also:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{C} &= \frac{\cos \alpha \cdot b \sin \varphi}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{B}{C} &= \frac{\sin \alpha \cdot b \sin \varphi}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

und daraus:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \alpha \cdot b \sin \varphi} \\ B &= -\tan \alpha. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe von C und B in die Gleichung bei (12), so kommt nach Ausführung aller Reductionen:

$$\begin{aligned} \sin \varphi^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \tan \varphi \times \\ &\{ -[c^2 - a^2 + (b^2 - c^2) \tan \varphi^2] \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad + (2c^2 - a^2 - b^2) \sin \alpha^2 \tan \varphi + (a^2 - c^2) \tan \varphi \}^{-1} \quad (15) \end{aligned}$$

Bestimmt man die Richtung der Linie (13) dadurch, daß man für φ und α numerische Werthe setzt, so kann man, wenn man dieselben Werthe in (15) setzt, den Winkel φ , und dadurch die Lage der Polarisations Ebenen der beiden nach (13) sich fortpflanzenden Strahlen bestimmen. Die Gleichung (15) giebt nämlich zwei Werthe für $\tan \varphi$, welche die Polarisations Ebene des ordinären und des extraordinären nach (14), und nach dem obigen Raisonement auch die Lage der Polarisations Ebene für den ordinären und extraordinären nach (13) austretenden Strahl bestimmen. Setzt man aber in Gleichung (15) für φ einen bestimmten numerischen Werth, so erhält man eine Gleichung zwischen den beiden veränderlichen φ und α , welche nichts anderes ist als die

Gleichung einer conoidischen Oberfläche, welche die Gesamtheit aller derjenigen austretenden Strahlen in sich faßt, deren Polarisationssebene die nämliche, durch den Winkel φ bestimmte Lage hat. Das Conoid wird nun von der Oberfläche des Krystals in einer krummen Linie geschnitten, deren Polargleichung eben die Gleichung (15) ist, wenn wir sie als Polargleichung einer ebenen Curve betrachten; α ist der Winkel, den der Leitstrahl $\sin \varphi$ mit der Axe der x macht. Streng genommen erhielte man erst die Gleichung der Curve, wenn man aus Gleichung (15) den Werth von $\tan \varphi^2$ bestimmte; wegen der Kleinheit des Winkels φ aber kann man mit hinlänglicher Genauigkeit die Gleichung (15) selbst als Gleichung der Curve betrachten. Denken wir uns nun das Auge in die Spitze des erwähnten Conoids gebracht, so würden alle von der Curve (15) in das Auge treffende Strahlen gleiche Intensität haben, wenn ihre Lichtstärke nur von der Lage der Polarisationssebenen abhinge, die wir ja hier ganz allein betrachten wollen. Die Curve (15) haben wir also als eine solche zu betrachten, deren einzelne Punkte alle gleich hell erscheinen.

Untersuchen wir nun die Natur der Curve (15). Die Gleichung (15) ist die Polargleichung einer Hyperbel. Soll die grofse Axe zugleich die Axe der Polarcordinaten seyn, so mufs die Gleichung die Form:

$$\sin \varphi^2 = \frac{M}{N \sin \nu^2 - P}$$

haben, und auf diese Form läfst sich Gleichung (15) durch Verlegung der Coordinatenaxen zurückführen. Nehmen wir an, dafs die neue Axe einen Winkel φ mit der alten macht, bezeichnen wir ferner die auf die neue Axe bezogenen Winkel mit ν , so erhält man die Polargleichung der Hyperbel auf die neue Axe bezogen, wenn man $\nu + \varphi$ statt α in Gleichung (15) setzt. Es kommt alsdann:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \operatorname{tg} \varpi \{ \sin \nu \cdot \cos \nu [R \cos 2\rho + S \operatorname{tg} \varpi \sin 2] \\ + R(1 - 2\sin^2 \nu) \sin \rho \cos \rho + S(\sin^2 \nu \cos^2 \rho + \cos^2 \nu \sin^2 \rho) \operatorname{tg} \varpi \\ + (a^2 - c^2) \operatorname{tg} \varpi \}^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

wenn alle Reductionen ausgeführt sind, und

$$c^2 - a^2 + (b^2 - c^2) \operatorname{tg} \varpi^2 = R \\ 2c^2 - a^2 - b^2 = S$$

gesetzt wird.

Setzt man den Factor von $\sin \nu \cdot \cos \nu$ gleich Null, so erhält man eine Bedingungs Gleichung:

$$R \cos 2\rho = -S \operatorname{tg} \varpi \cdot \sin 2\rho \quad . \quad . \quad (17)$$

zwischen ρ und ϖ , welche erfüllt seyn muß, wenn die Hauptaxe der Hyperbel auch die Axe der Polarcoordinaten seyn soll; die Gleichung (16) reducirt sich dadurch auf:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \operatorname{tg} \varpi \{ R(1 - 2\sin^2 \nu) \sin \rho \cos \rho \\ + S(\sin^2 \nu \cos^2 \rho + \cos^2 \nu \sin^2 \rho) \operatorname{tg} \varpi \\ + (a^2 - c^2) \operatorname{tg} \varpi \}^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Eliminirt man aus (18), mit Hülfe der Gleichung (17), ρ , setzt man alsdann für ϖ einen bestimmten Werth, so ist sie die Gleichung einer Hyperbel, welche die Eigenschaft hat, daß die Polarisations Ebenen aller von ihm in's Auge kommenden Strahlen parallel sind, und zwar, daß sie die Oberfläche des Krystalls in einer Linie schneiden, welche einen Winkel ϖ mit der Axe der x macht. Alle Strahlen also, welche von dieser auf der Oberfläche des Krystalls liegenden Hyperbel in's Auge treffen, haben gleiche Intensität. (Vorausgesetzt, daß die Intensität nur von der Lage der Polarisations Ebene abhängt.)

Setzt man umgekehrt in (17) und (18) für ρ einen constanten Werth, und eliminirt man alsdann ϖ , so erhält man die Gleichung einer Hyperbel, deren Axe einen

Winkel ϱ mit der Axe der x macht, und für welche ω den aus (17) gezogenen Werth hat. Aus (17) folgt:

$$R = -S \cdot \tan \omega \cdot \tan 2\varrho.$$

Setzt man diesen Werth von R in (18), so hebt sich $\tan \omega$, und es bleibt:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b} \left\{ -S \tan 2\varrho (1 - 2 \sin \varphi^2) \sin \varrho \cos \varrho \right. \\ \left. + S (\sin \varphi^2 \cos \varrho^2 + \cos \varphi^2 \sin \varrho^2) + a^2 - c^2 \right\}^{-1} \quad (19)$$

setzt man in dieser Gleichung $\varphi = 0$, so kommt:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{1}{-S \tan 2\varrho \cdot \sin \varrho \cos \varrho + S \sin \varrho^2 + a^2 - c^2} \quad (20)$$

Sobald man in (20) für ϱ einen bestimmten Werth setzt, so ist $\sin \varphi$ die Entfernung der Spitze der Hyperbel, welche die Gleichung (19) darstellt, wenn man in derselben für ϱ denselben Werth setzt. Betrachtet man ϱ als veränderlich, so ist (20) die Gleichung einer krummen Linie, welche durch die Spitzen aller den verschiedenen Werthen von ϱ entsprechenden Hyperbeln geht. Wir wollen deshalb diese Curve *Spitzencurve* nennen.

Setzen wir in (20) für S seinen Werth, so wird die Gleichung der Spitzencurve:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{1}{(a^2 + b^2 - 2c^2)(\tan 2\varrho \sin \varrho \cos \varrho - \sin \varrho^2) + a^2 - c^2}$$

Der Factor $\tan 2\varrho \cdot \sin \varrho \cdot \cos \varrho - \sin \varrho^2$ reducirt sich aber auf $\frac{\sin \varrho^2}{\cos 2\varrho}$; dieß in die vorige Gleichung substituiert,

kommt:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{\cos 2\varrho}{(a^2 + b^2 - 2c^2) \sin \varrho^2 + (a^2 - c^2) \cos 2\varrho}$$

oder:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \frac{\cos 2\varrho}{(b^2 - a^2) \sin \varrho^2 + a^2 - c^2} \quad (21)$$

Die Form dieser Curve läßt sich durch ein einfaches Raisonement übersehen. Für $\varrho = 0$ wird

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2(a^2 - c^2)}.$$

Löst man ϱ von 0 an wachsen, so nimmt der aus (21) gezogene Werth von $\sin \varphi$ ab, und wird endlich zu Null für $\varrho = 45^\circ$. Von $\varrho = 45^\circ$ an wird der Werth von $\sin \varphi^2$ negativ, also $\sin \varphi$ imaginär bis ϱ zu 3.45° oder zu 135° gewachsen ist. Für $\varrho = 135^\circ$ ist $\sin \varphi$ abermals 0, und wächst bis $\varrho = 180^\circ$ geworden ist, wo $\sin \varphi$ abermals sein Maximum $\frac{a^2 - b^2}{b^2(a^2 - c^2)}$ erreicht. Dieselbe

Reihe von Veränderungen erleidet $\sin \varphi$, wenn man ϱ nach der entgegengesetzten Seite von 0° bis 180° wachsen läßt. Es ergibt sich daraus, daß die Spitzencurve die Form Fig. 15 Taf. II hat, welche Figur die Curve für Salpeter darstellt. Für Salpeter ist:

$$a^2 = 0,56109$$

$$b^2 = 0,56081$$

$$c^2 = 0,43626$$

mithin ist die Gleichung der Spitzencurve für diesen Krystall:

$$\sin \varphi^2 = \frac{28 \cdot \cos 2\varrho}{56081 (0,12483 - 0,00028 \sin \varrho^2)}.$$

Daraus ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe von ϱ und φ :

ϱ .	$\sin \varphi$.	φ .
0°	0,063	3° 37'
9	0,062	3 32
18	0,056	3 13
27	0,048	2 47
36	0,035	2 1
45	0	0

Beim Salpeter fällt die Mittellinie mit der kleinsten Elasticitätsaxe zusammen; alle vorangehenden und folgenden Formeln beziehen sich auch eigentlich nur auf solche Krystalle, bei denen dies der Fall ist. Will

man die Formeln auf solche Krystalle anwenden, bei denen die Mittellinie mit der größten Elasticitätsaxe zusammenfällt, so darf man nur a und c vertauschen.

Nach den in obiger Tabelle angegebenen Werthen ist die Curve construiert. Die Längeneinheit, nach welcher die in der zweiten Columnne stehenden Werthe aufgetragen sind, ist der hessische Fufs (4 Fufs = 1 Meter), und also angenommen, dafs das Auge sich 1 Fufs hoch über dem Papier befände, denn nur in diesem Falle erscheint dem Auge die Zeichnung in den der Wirklichkeit entsprechenden Dimensionen.

Betrachten wir nun die durch Gleichung (19) dargestellten Hyperbeln selbst. Um zu finden, wo diese Hyperbeln die Axe der x schneiden, hat man in (19) nur $\varphi = \rho$ zu setzen, man erhält alsdann:

$$\sin \varphi^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2(a^2 - c^2)}.$$

Da dieser Werth von $\sin \varphi^2$ eine constante Gröfse und von ρ unabhängig ist, so ist klar, dafs alle Hyperbeln, welche die Gleichung (19) darstellen kann, wenn man nach und nach verschiedene Werthe für ρ in die Gleichung setzt, die Axe der x doch in demselben Punkte schneiden, wie es in Fig. 16 Taf. II dargestellt ist. Dieser Durchschnittspunkt, in welchem sich alle Hyperbeln schneiden, ist zugleich der Gippelpunkt der Spitzencurve.

Stellen wir uns eine der durch Gleichung (20) dargestellten Hyperbeln mit ihren Asymptoten vor. Der Punkt, in welchem die Asymptote die Hyperbel schneidet, liegt unendlich weit entfernt, folglich ist die Linie, welche man sich vom Auge nach diesem Punkt gezogen denken kann, mit der Oberfläche der Platte parallel, für diesen Gesichtsstrahl ist also der Winkel φ ein rechter, folglich für denselben $\sin \varphi = 1$; setzt man demnach in Gleichung (19) den Zähler dem Nenner gleich, so erhält man eine Gleichung, aus der sich der Winkel, den

die Asymptote mit der Hauptaxe der Hyperbel macht, bestimmen läßt; diese Gleichung ist:

$$a^2 - b^2 = b^2 \left[\frac{\operatorname{tg} 2\varrho \sin 2\varrho}{2} (1 - 2 \sin^2 \nu^2) (a^2 - b^2 - 2c^2) \right. \\ \left. + (2c^2 - a^2 - b^2)(\sin \nu^2 \cos \varrho^2 + \sin \varrho^2 \cos \nu^2) + a^2 - c^2 \right],$$

woraus sich ergibt:

$$\sin \nu^2 = \frac{[a^2 - b^2 - b^2(a^2 - c^2)] \cos 2\varrho + b^2(2c^2 - a^2 - b^2) \left(\frac{\sin 2\varrho^2}{2} - \sin \varrho^2 \cos 2\varrho \right)}{b^2(2c^2 - a^2 - b^2)}$$

Setzt man in diesen Werth von $\sin \nu$ für a^2 , b^2 und c^2 die dem Salpeter entsprechenden Werthe, so erhält man:

$$\sin \nu^2 = \frac{1}{2}, \quad \sin \nu = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

also:

$$\nu = 45^\circ$$

Der Winkel also, welchen eine Asymptote mit der Hauptaxe der Hyperbel macht, ist für alle 45° , *die Hyperbeln sind also sämmtlich gleichschenkelig.*

In Fig. 16 Taf. II sind die Resultate der Rechnungen dargestellt; die dort gezeichneten sind eine Reihe von Hyperbeln, welche verschiedenen Werthen von ϱ entsprechen. Jede Hyperbel schneidet den willkürlich gezogenen, die Figur begränzenden Kreis in zwei Punkten, die zur leichteren Uebersicht mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind; jedoch ist diese Bezeichnung nur auf der einen Hälfte der Figur gemacht. Aus der zweiten Columnne der hier beigefügten Tafel ersieht man, wie groß der Winkel ϱ für jede dieser Hyperbeln ist.

	ϱ .	ω' .	ω' .
$z - z$	45°	0°	90°
$a - a$	36	9	81
$b - b$	27	18	72
$c - c$	18	27	63
$d - d$	9	36	54
$e - e$	0	45	45
$d' - d'$	9	54	36
$c' - c'$	18	63	27
$b' - b'$	27	72	18
$a' - a'$	36	81	9
$z - z'$	45	90	0

Die erste und letzte der hier angeführten Hyperbeln, $z-z$ und $z-z'$, fallen mit ihren Asymptoten zusammen, der Gipfel der Hyperbel liegt im Mittelpunkte der Figur, die beiden Aeste derselben fallen ganz mit der Axe der x und y zusammen.

Es bleibt jetzt nur noch die Lage der Polarisations-ebenen für die von den verschiedenen Hyperbeln kommenden Strahlen zu bestimmen übrig. Von jedem Punkt irgend einer Hyperbel geht ein ordinärer und ein extraordinärer Strahl in's Auge, deren Polarisations-ebenen auf einander rechtwinklig stehen. Wäre die Richtung des austretenden Strahls rechtwinklig auf der Oberfläche des Krystalls, so würden auch die Durchschnittslinien der beiden Polarisations-ebenen mit der Krystalloberfläche rechtwinklig auf einander stehen; da aber dieß nicht der Fall ist, so machen auch diese beiden Durchschnittslinien keinen rechten Winkel mit einander, weil jedoch die Strahlen sehr nahe senkrecht einfallen, kann man diese Differenz ganz unbeachtet lassen. Aus Gleichung (17) zieht man:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2(b^2 - c^2)} \operatorname{tg} 2\varrho \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} + \frac{(a^2 + b^2 - 2c^2)^2}{(b^2 - c^2)^2}} \operatorname{tg} 2\varrho^2$$

wenn man für R und S vorher ihre Werthe gesetzt hat. Die beiden Werthe von ω bestimmen die Lage der Polarisations-ebenen der beiden, nach derselben Richtung austretenden Strahlen. Bezeichnen wir mit ω' und ω'' die beiden aus der letzten Gleichung gezogenen Werthe von ω , so wird nach obigem Raisonement $\omega' + \omega''$ nicht viel von 90° differiren. Für Salpeter wird die letzte Gleichung sich sehr nahe auf:

$$\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} 2\varrho \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\varrho^2} \quad . \quad (22)$$

reduciren, also:

$$\operatorname{tang} \omega' . \operatorname{tang} \omega''$$

$$= (\operatorname{tang} 2\varrho + \sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\varrho}) (\operatorname{tang} 2\varrho - \sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\varrho^2}),$$

$$\operatorname{tang} \omega' . \operatorname{tang} \omega'' = \operatorname{tg} 2\varrho^2 - 1 - \operatorname{tang} 2\varrho^2 = -1,$$

woraus ebenfalls folgt, daß die beiden, durch die Win-

kel ϖ' und ϖ'' bestimmten Durchschnittslinien wirklich nahe rechtwinklig zu einander sind. Mittelst der Gleichung (22) kann man nun die jedem ϱ entsprechenden Werthe von ϖ berechnen. In obiger Tabelle sind die Werthe von ϖ , welche den von 9° zu 9° fortlaufenden Werthen von ϱ entsprechen, eingetragen.

Diese Resultate reichen nun hin, die ganze Erscheinung der schwarzen Büschel in Salpeterplatten zu construiren.

Bezeichnet man durch I die Intensität des einfal-
lenden Lichtes, durch β den Winkel, welchen die Polarisations-
ebene des ordinären Strahls in der Krystallplatte mit der Polarisations-
ebene des ersten Turmalins macht, durch ϑ die Anzahl der Wellenlängen, um die
der eine der beiden interferirenden Strahlen dem andern
vorangeht, so ist bekanntlich:

$$I \sin 2\beta \cdot \sin \pi \vartheta$$

die Vibrationsintensität der durch die Interferenz gebil-
deten, das Auge treffenden Strahlen, wenn die Turmalin-
platten gekreuzt sind. In unserer Betrachtung lassen
wir die Veränderlichkeit der Größe ϑ (von der die Lem-
niscaten herrühren) ganz unberücksichtigt, und setzen
deshalb $\sin \pi \vartheta$ gleich einer constanten Größe, am be-
quemsten gleich 1. Die Intensität der das Auge tref-
fenden Strahlen wäre demnach:

$$I \cdot \sin 2\beta.$$

Legt man nun die Salpeterplatte so zwischen die gekreuz-
ten Turmalinplatten, daß die Axe der x mit der Polari-
sationsebene der einen, die Axe der y mit der Polari-
sationsebene der andern Turmalinplatte zusammenfällt,
so ist für alle, von der Curve zz kommenden Strahlen
 $\beta=0$, also ist die Intensität, mit welcher das die Fig. 16
Taf. II durchschneidende Kreuz dem Auge erscheint,
gleich 0.

Für die von der Curve aa ins Auge kommenden
Strahlen ist in diesem Falle $\beta=9^\circ$, also die Vibrations-
in-

intensität der von der Hyperbel aa in's Auge kommenden Strahlen:

$$I. \sin 18^\circ.$$

Dies ist auch die Vibrationsintensität für die von $a'a'$ kommenden Strahlen. Für die übrigen Hyperbeln der Fig. 16 Taf. II ergeben sich folgende Intensitäten:

	Vibrationsintensität.		Lichtstärke.
zz	0	$=0$	0
$a a'$ und aa	$I. \sin 18^\circ$	$=I. 0,31$	931
$b' b'$ - bb	$I. \sin 36$	$=I. 0,59$	3481
$c' c'$ - cc	$I. \sin 54$	$=I. 0,81$	6561
$d' d'$ - dd	$I. \sin 72$	$=I. 0,95$	9025
ee	$I. \sin 90$	$=I$	10000

Legt man die Salpeterplatte so zwischen die Turmaline, daß die Axe der x einen Winkel von 9° mit der Polarisationssebene der einen Turmalinplatte macht, und zwar so, daß die Polarisationssebenen der von aa kommenden Strahlen mit den Polarisationssebenen der Turmaline zusammenfallen, so ergeben sich für die von den verschiedenen Hyperbeln in's Auge kommenden Strahlen folgende Werthe:

	Vibrationsintensität.		Lichtstärke.
zz und bb	$I. \sin 18^\circ$	$=I. 0,31$	931
aa	$I. \sin 0$	$=0$	0
cc und $a'a'$	$I. \sin 36$	$=I. 0,59$	3481
dd - $b'b'$	$I. \sin 54$	$=I. 0,81$	6561
ee - $c'c'$	$I. \sin 72$	$=I. 0,95$	9025
$b'b'$	$I. \sin 90$	$=I$	10000

Macht die Axe der x einen Winkel von 45° mit der Polarisationssebene der Turmaline, so ergeben sich für die verschiedenen Hyperbeln folgende Werthe der Vibrationsintensität:

	Vibrationsintensität.	Lichtstärke.
zz	$I. \sin 90^\circ = I$	10000
aa und $a'a'$	$I. \sin 72 = I. 0,95$	9025
$bb - b'b'$	$I. \sin 54 = I. 0,81$	6561
$cc - c'c'$	$I. \sin 36 = I. 0,59$	3481
$dd - d'd'$	$I. \sin 18 = I. 0,31$	931
ee	$I. \sin 0 = 0$	0

Die Stärke des Lichteindrucks ist dem Quadrat der Vibrationsintensität proportional, daraus ergeben sich die Verhältniszahlen in der dritten Columnne der drei letzten Tabellen, welche das Verhältniß der Lichtstärke der verschiedenen Hyperbeln angeben. Sich ungefähr nach den in der dritten Columnne der ersten Tabelle richtend, ist Fig. 17 Taf. II schattirt, nach Tabelle 2 die Fig. 18, und nach Tabelle 3 die Fig. 19.

Vergleicht man diese Figuren mit der Erfahrung, so wird man finden, daß sie mit der Erscheinung in einer Salpeterplatte vollkommen übereinstimmen; damit jedoch die Lemniscaten bei dieser Vergleichung nicht hinderlich sind, muß man, wie schon bemerkt, dicke Salpeterplatten wählen.

Aus der Erscheinung an Salpeterplatten läßt sich nun auch auf die Erscheinung in andern zweiaxigen Krystallen schliessen, bei denen der Axenwinkel größer ist. Je mehr der Axenwinkel wächst, desto mehr entfernen sich die beiden Punkte, in dem sich die Hyperbeln schneiden (die Pole der Lemniscaten), von dem Mittelpunkt der Figur. Je mehr aber diese Entfernung zunimmt, desto geringer wird auch die Krümmung des Theils der Hyperbeln werden, welcher in die Nähe der Pole fällt. Am Pol ist die Hyperbel ee am stärksten gekrümmt; der Axenwinkel kann aber so zunehmen, daß selbst diese Krümmung nur noch unbedeutend ist. Schneidet man daher einen solchen Krystall senkrecht auf die eine Axe, so erscheint das Ringsystem stets durch einen schwar-

zen Büschel durchschnitten. Ist noch eine Krümmung des Büschels wahrzunehmen, so ist sie am stärksten, wenn die Ebene der optischen Axen der Krystallplatte den Winkel der Polarisationssebene der Turmaline halbirt. Die andere Axe liegt alsdann nach der Seite hin, nach welcher die Krümmung gerichtet ist.

Wegen des Nichtzusammenfallens der Axen für verschiedenfarbige Strahlen haben die Büschel beim Salpeter in der Nähe der Pole nach Innen einen blauen, nach Außen einen rothen Teint.

VII *Ueber eine der Schwefelsäure entsprechende Chlorverbindung des Schwefels;*
von Heinrich Rose.

Vor einiger Zeit habe ich zu zeigen gesucht, daß bei der Einwirkung des Chlorgases auf Schwefel, und auf einige Schwefelmetalle, wie Schwefelzinn, Schwefeltitan und Schwefelantimon, eine Chlorverbindung entstehe, welche der schweflichten Säure analog zusammengesetzt sey, und welche durch Behandlung mit Wasser in Chlorschwefelsäure, in Schwefelsäure und in unterschweflichte Säure zerfalle ¹⁾. Da diese Chlorverbindung im isolirten Zustande nicht zu existiren scheint, sondern nur in Verbindung mit Schwefel und einigen Chlormetallen, so schien es mir wahrscheinlich, daß, wenn es eine höhere, der Schwefelsäure analoge Chlorverbindung des Schwefels gäbe, diese noch weniger im isolirten Zustande dargestellt werden könnte, zumal da die derselben entsprechenden Chlorverbindungen des Chroms, des Wolframs und des Molybdäns nur in Verbindung mit den ihnen analog zusammengesetzten Säuren bestehen kön-

1) Diese Annalen, Bd. XXXXII S. 517.