**5. Über die Gültigkeit des Poiseuilleschen
Gesetzes bei zähflüssigen und festen Körpern;
von Rudolf Reiger.**

1. Wird im Inneren einer Substanz eine Schicht gegen die benachbarte verschoben, so wird bei festen Körpern infolge der Gestaltselastizität, solange eine gewisse Grenze nicht überschritten wird, eine Kraft im Inneren des Körpers hervorgerufen, die der deformierenden das Gleichgewicht hält. Der Körper kehrt in seinen ursprünglichen Zustand zurück, wenn die deformierende Kraft wieder aufgehoben wird.

Bei der Theorie der idealen Flüssigkeiten nimmt man an, daß dieselben nur Volumelastizität und keine Gestaltselastizität besitzen. Daß jedoch auch bei Flüssigkeiten eine Gestaltselastizität vorhanden ist, darauf weisen die Erscheinungen der inneren Reibung hin. Strömen zwei benachbarte Flüssigkeitsschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so treten Kräfte auf, die die Bewegung der langsamer bewegten Schicht zu beschleunigen, die der rascher bewegten Schicht zu verzögern suchen.

Von Poisson¹⁾ und Maxwell²⁾ rührt die Auffassung her, daß die Flüssigkeiten sich wie elastische Medien verhalten, daß aber eine in einer Flüssigkeit vorhandene Spannung nicht bestehen bleibt, sondern infolge der Relaxation der inneren Spannung verschwindet. Bei den meisten Flüssigkeiten ist die Relaxationszeit, d. i. die Zeit, in der die innere Spannung auf $1/e$ sinkt, so klein, daß es bisher nicht gelang, eine innere Spannung mit Hilfe der akzidentellen Doppelbrechung nachzuweisen. Nur bei den Harzen, Kolloiden und Ölen war das

1) S. D. Poisson, Journal de l'École Polytechn. XX. Heft. p. 139. 1831.

2) J. Cl. Maxwell, Phil. Mag. (4) 35. p. 133. 1868.

bisher möglich.¹⁾ Bei dem Übergang zum festen Zustand treten jedoch Relaxationsdauern auf, die den Rückgang der inneren Spannung quantitativ zu verfolgen gestatten.²⁾

Gegen sehr rasche Deformationen verhält sich eine solche Flüssigkeit wie ein elastischer Körper. Bei sehr langsamen Deformationen, wie sie im folgenden betrachtet werden, gelten die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen einer reibenden Flüssigkeit, solange die Relaxationsdauer nicht zu groß ist. Für alle anderen Bewegungserscheinungen muß man Bewegungsgleichungen anwenden, wie sie von L. Natanson³⁾ aufgestellt wurden.

2. Der Koeffizient der inneren Reibung von festen und zähflüssigen Körpern wurde bereits mehrfach bestimmt, und zwar nach folgenden Methoden:

a) Aus der Dämpfung von Schwingungen von O. E. Meyer⁴⁾ und W. Voigt.⁵⁾ Die nach dieser Methode gefundenen Werte sind klein gegenüber den nach anderen Methoden gefundenen Werten.⁶⁾

1) J. Cl. Maxwell, Pogg. Ann. **151**. p. 151. 1874; A. Kundt, Wied. Ann. **13**. p. 110. 1881; G. de Metz, Wied. Ann. **35**. p. 497. 1888; K. Umlauf, Wied. Ann. **45**. p. 304. 1892; J. E. Almy, Phil. Mag. (5) **44**. p. 499. 1897; B. V. Hill, Phil. Mag. (5) **48**. p. 485. 1899; (6) **2**. p. 524. 1901.

2) R. Reiger, Dissertation. Erlangen 1901. Phys. Zeitschr. **2**. p. 213. 1901; G. de Metz, Compt. rend. **134**. p. 1353. 1902; **136**. p. 604. 1903.

3) L. Natanson, Zeitschr. f. phys. Chemie. **38**. p. 690; **39**. p. 355. 1901; **40**. p. 581. 1902; **43**. p. 179 u. 185. 1903; C. Zakrzewski, Krak. Anz. 1902. p. 235; B. Weinstein, Thermodynamik. **2**. p. 93ff. Braunschweig 1903 u. L. Natanson, Phys. Zeitschr. **4**. p. 541. 1903; ferner die Arbeiten von St. Zaremba u. L. Natanson im Krak. Anz. 1903 u. 1904.

4) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **113**. p. 385. 1861.

5) W. Voigt, Wied. Ann. **47**. p. 671. 1892.

6) Über den Anteil der elastischen Nachwirkung vgl. W. Voigt, l. c. und F. Braun, Elastische Nachwirkung in Winkelman, Handbuch d. Physik **1**. p. 321. 1891. — Bei meinen Versuchen über die Relaxation der inneren Spannung (l. c.) habe ich gefunden, daß bei festen Körpern nach Eintritt der Deformation nicht sofort eine Abnahme der inneren Spannung stattfindet, sondern zuerst eine Zunahme und dann erst eine Abnahme. Auf die Bedeutung dieser Tatsache für die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung habe ich bereits früher hingewiesen. Weitere Versuche über diesen Gegenstand hoffe ich demnächst mitteilen zu können.

b) Aus der Beobachtung der Winkelgeschwindigkeit, mit der die scherende Deformation bei der Torsion wächst, von A. v. Obermayer¹⁾, C. Barus²⁾, F. T. Trouton und E. S. Andrews³⁾ und von B. Weinberg.⁴⁾

c) Die Substanz befindet sich zwischen zwei parallelen Flächen, an denen sie vollständig haftet. Eine der beiden begrenzenden Flächen wird parallel zur anderen verschoben.

Die Substanz hat bei diesen Versuchen teils parallel-epipedische Form, und es wird eine der beiden Grenzflächen verschoben⁵⁾, teils befindet sie sich zwischen zwei konzentrischen Zylinderflächen, von denen die eine eine Bewegung in Richtung der Achse erfährt.⁶⁾ Die nach dieser Methode bestimmten Werte stimmen mit den nach b) gefundenen Werten überein.

d) Aus der Deformationsgeschwindigkeit beim Druck. A. v. Obermayer findet nach dieser Methode dieselben Werte wie bei b) und c).

e) Aus der Deformationsgeschwindigkeit bei der Biegung von Mc. Connel⁷⁾ und H. Hess.⁸⁾

f) Nach der Methode von Stokes.⁹⁾ F. T. Trouton und E. S. Andrews finden aus der Geschwindigkeit einer Bleikugel, deren Lage mit Röntgenstrahlen bestimmt wurde, dieselben Werte wie nach b).

g) Aus der Strömung der Substanz durch eine enge Röhre nach dem Poiseuilleschen Gesetz von Barus¹⁰⁾ (zähflüssiger Marineleim) und Heydweiller¹¹⁾ (festes Menthol).

1) A. v. Obermayer, Wien. Ber. 75. (Abt. II). p. 665. 1877.

2) C. Barus, Phil. Mag. (5) 29. p. 337. 1890.

3) F. T. Trouton u. E. S. Andrews, Proc. Phys. Soc. London. 19. p. 47. 1904.

4) B. Weinberg, Proc. Phys. Soc. London. 19. p. 472. 1904. Quantitative Resultate wurden für Eis mitgeteilt: Ann. d. Phys. 18. p. 81. 1905.

5) A. v. Obermayer u. B. Weinberg, l. c.

6) M. Segel, Phys. Zeitschr. 4. p. 493. 1903.

7) Mc. Connel, Proc. Roy. Soc. 49. p. 323. 1890—1891.

8) A. Hess, Ann. de Phys. 8. p. 405. 1902.

9) G. J. Stokes, Cambr. Trans. 9. p. 8. 1851; Phil. Mag. (4) 1. p. 337. 1851.

10) C. Barus, l. c.

11) A. Heydweiller, Wied. Ann. 63. p. 56. 1897.

b) Nach Maxwell¹⁾ läßt sich der Koeffizient der inneren Reibung darstellen durch das Produkt aus dem Modul der scherenden Deformation und der Relaxationszeit. Durch Ermittlung der beiden Größen habe ich²⁾ den Reibungskoeffizienten bestimmt.

Will man für Flüssigkeiten und feste Körper den Reibungskoeffizienten nach derselben Methode bestimmen, so ist dies nur nach den letzten drei Methoden möglich. Die letzte Methode ist allerdings für Flüssigkeiten bis jetzt nur in ganz speziellen Fällen anwendbar, nämlich für Kolloide und Öle.

Dagegen läßt sich die Methode der Strömung durch enge Röhren in allen Fällen anwenden. Zur Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung kann bei Flüssigkeiten die Methode nur dann dienen, wenn die Röhre nicht zu weit ist, da sonst in der Röhre Wirbel auftreten und infolgedessen die Ausflußmenge kleiner wird, als den einfachen Annahmen über die Strömung entspricht, die zum Poiseuilleschen Gesetze führen.³⁾ Ob bei der Strömung zähflüssiger und fester Substanzen durch enge Röhren das Poiseuillesche Gesetz noch gültig ist, darüber liegen, meines Wissens, keine Versuche vor.

In dieser Arbeit wird zunächst geprüft werden, ob die Strömung zähflüssiger und fester Körper durch enge Röhren denselben Gesetzen gehorcht, wie die Strömung von Flüssigkeiten. Weitere Versuche sollen dann ergeben, ob der so bestimmte Reibungskoeffizient übereinstimmt mit dem nach der Maxwellschen Formel berechneten.

1) J. Cl. Maxwell, *Phil. Mag.* (4) 35. p. 133. 1868.

2) l. c.; es ergaben sich nach dieser Methode Werte, die mit den nach b) bis f) bestimmten Werten der Größenordnung nach übereinstimmen. Ein direkter Vergleich ist nicht möglich, da die Werte sich auf verschiedene Substanzen beziehen.

Die Methode läßt sich nur anwenden, solange die Relaxationszeit nicht zu groß wird, da nur in diesem Falle das Abklingen der inneren Spannung nach einer Funktion $e^{-t/T}$ erfolgt und die oben angegebene Beziehung unter dieser Annahme abgeleitet ist. Bei großen Relaxationszeiten erfolgt die Abnahme der inneren Spannung anfangs rasch und dann immer langsamer, und schließlich ist selbst innerhalb langer Zeitintervalle keine Abnahme mehr zu beobachten.

3) O. Reynolds, *Proc. Roy. Soc. London* 35. p. 84. 1883; *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 174. p. 935. 1883.

3. *Wahl der Versuchssubstanz.* — Als Versuchssubstanz habe ich Kolophonium-Terpentinölgemische gewählt. Ich habe bereits früher darauf hingewiesen, daß es möglich ist, durch Zusatz von Terpentinöl zu Kolophonium alle möglichen Stufen der Zähigkeit herzustellen zwischen derjenigen des reinen flüssigen Terpentinöls, das einen Reibungskoeffizienten von 0,0146 bei Zimmertemperatur hat¹⁾, und derjenigen des reinen Kolophoniums, dessen Reibungskoeffizient von der Größenordnung 10^{16} ist. Hat man so einerseits als Vorteil, jede beliebige Zähigkeit bei Zimmertemperatur bequem herstellen zu können, so steht dem allerdings als Nachteil entgegen, daß Kolophonium keine wohl definierte Substanz ist. Da Kolophonium neben Terpentinöl bei der Destillation von Harz gewonnen wird, so ist die Zähigkeit des in den Handel kommenden Kolophoniums an und für sich verschieden. Da das Kolophonium viele mechanische Verunreinigungen enthält, so muß es vor der Verwendung filtriert werden. Dabei wird es wesentlich zäher infolge Verdampfung von Terpentinöl und anderer leicht flüchtiger Bestandteile. Die Mischung des Terpentinöls und Kolophoniums findet bei höheren Temperaturen statt und das Gemisch muß, solange es leicht flüssig ist, in die Versuchsröhre gegossen werden, wenn es an den Wänden so haften soll, daß die Gleitung bei den Versuchen vernachlässigt werden kann. Dabei verdampft ein Teil des Terpentinölzusatzes und eine genaue Bestimmung des Gehaltes der Mischung an letzterem ist daher nicht möglich.

Nimmt man statt Kolophonium-Terpentinölmischungen z. B. Glas als Versuchssubstanz, so läßt sich die Zusammensetzung wohl angeben, aber man muß einerseits zu sehr hohen Temperaturen übergehen, um dieselben Werte der Zähigkeit zu erhalten, und andererseits hat man auch in diesem Falle keinen einheitlichen, chemisch wohldefinierten Körper.

Sucht man nach anderen Körpern, die chemisch einheitlich und zugleich für optische Untersuchungen brauchbar sind, so zeigt es sich, daß alle chemisch reinen Körper kristallinisch und nur unter besonderen Umständen (z. B. rasche Abkühlung) amorph erstarren. Es wurden daher bei den im

1) O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik 1. p. 649. Braunschweig 1902.

folgenden mitgeteilten Versuchen Kolophonium–Terpentinölmischungen als Versuchssubstanz beibehalten.

4. *Apparat zur Herstellung eines konstanten Druckes.* — Um den Druck während des Versuches konstant zu halten, diente eine Vorrichtung, die in Fig. 1 gegeben ist. Dieselbe

Fig. 1.

besteht aus einer U-förmigen Röhre, deren längerer Schenkel *a* am Ende eine Erweiterung *A* hat. An die kürzere Röhre *b* war durch eine seitliche Röhre *c* eine Kugel angesetzt. Der Röhrenteil *d* vermittelte die Verbindung mit der Röhre *S* (Fig. 2), in der die Strömung beobachtet wurde. Diese wurde mit Siegelack eingekittet. Der Druck wurde durch eine Hg-Säule hergestellt. Tritt infolge des Druckes ein Strömen der Substanz in *S* ein, so wird das austretende Volumen *v* durch ein gleiches Volumen Hg ersetzt, das in die Kugel *K* strömt. Der Druck bleibt also konstant, wenn das Hg-Niveau in *A* konstant bleibt. Dazu diente eine kleine, auf *A* aufgesetzte Mariottesche Flasche, deren Wirkung aus der Zeichnung

ersichtlich ist. Um Druckschwankungen infolge kleiner Temperaturschwankungen der in *d* und *S* komprimierten Luft zu verhindern, wurde in den meisten Fällen die Luft durch Wasser ersetzt.

5. *Strömungsapparat.* — Der Strömungsapparat (Fig. 2) bestand aus der engeren Röhre *l*, die zwischen zwei weiten Röhren *L*₁ und *L*₂ eingeschmolzen war. Der Röhrenteil *s* wurde in den Röhrenteil *d* des Druck-

Fig. 2.

apparates eingekittet. Der schraffierte Teil der Röhre

gibt den zu Beginn des Versuches mit Substanz gefüllten Röhrenteil.

Zur Füllung der Röhre wurde der Röhrenteil *s* und der von Substanz freie von *L*₁ mit Hg gefüllt und die geschmolzene

Substanz heiß in die vorher erwärmte Röhre gegossen. Wurde die Substanz erst in zähflüssigem Zustande in die Röhre gegossen, so haftete sie nicht an den Röhrenwänden, und es trat unter dem Einfluß des Druckes kein regelmäßiges Fließen ein. Die Substanz löst sich an einzelnen Stellen von der Wand beim Fließen ab, es treten an einzelnen Stellen Hohlräume auf, die vollständig unregelmäßige Deformationen in den einzelnen Röhrenteilen zur Folge haben.

6. *Bestimmung der Ausflußmenge.* — Zu der Bestimmung der Ausflußmenge war der von Substanz freie Teil der Röhre L_2 mit Flüssigkeit gefüllt. Das Ende von L_2 war mit einem eingekitteten Kork verschlossen, aus dem die Röhre B herausragte. Strömt die Substanz unter dem Einfluß des Druckes, so verdrängt die in L_2 eintretende Substanz ein gleiches Volumen Flüssigkeit, das durch B austritt. Die Ansatzröhre B' diente zum Füllen mit Flüssigkeit. Bei kleiner Ausflußmenge wurde als Flüssigkeit Hg verwandt und das Volumen durch Wägung des aus B austretenden Quecksilbers bestimmt. War die bei B austretende Flüssigkeitsmenge größer, so wurde Wasser verwandt und das Volumen mittels einer unter B gesetzten kalibrierten Röhre bestimmt. Bei einigen Versuchen wurde die Ausflußmenge auch bestimmt, indem an Stelle der Kugel K in Fig. 1 eine kalibrierte Röhre gebracht und hier das Volumen des einströmenden Hg direkt abgelesen wurde.

7. *Korrektur des Druckes durch Berücksichtigung der weiten Röhrenteile und der Übergangsstellen.* — Bei der Berechnung des Reibungskoeffizienten aus dem austretenden Volumen und den Dimensionen der engen Röhre ist zu berücksichtigen, daß nicht der ganze abgelesene Druck auf die enge Röhre entfällt, sondern ein Teil davon auf die weiten Röhren und die Übergangsstellen.

Ist p' der beobachtete Druckabfall für die gesamte Röhre. Bezeichnet man den Druckabfall, der auf die enge Röhre entfällt, mit p , den auf die weiten Röhrenteile entfallenden mit $P = P_1 + P_2$ und ist endlich $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ der Druckabfall an den Übergangsstellen, so ist

$$(I) \quad p' = p + P_1 + P_2 + \Pi_1 + \Pi_2.$$

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so muß bei der stationären

Strömung in 1 Sek. dasselbe Volumen durch jeden Querschnitt fließen. Nehmen wir an, daß das Poiseuillesche Gesetz für unsere Substanz bei unseren Versuchsbedingungen gültig ist, so ist die in 1 Sek. durch den Querschnitt strömende Substanzmenge, die Stromstärke, für die engen und weiten Röhrenteile gegeben durch

$$\frac{\pi p r^4}{8 \eta l}, \quad \frac{\pi P_1 R_1^4}{8 \eta L_1}, \quad \frac{\pi P_2 R_2^4}{8 \eta L_2},$$

wenn r und l Radius und Länge der engen Röhre und L_1, R_1 und L_2, R_2 die entsprechenden Größen für die weiten Röhrenteile sind.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die Radien zweier Röhren von der Länge A_1 und A_2 der Übergangsstellen, auf die bei konstantem Querschnitt derselbe Druck entfallen würde, wie auf die Übergangsstellen, so bekommen wir zwei analoge Ausdrücke für die Stromstärke in den Übergangsstellen und die Bedingung, daß die Stromstärke an jeder Stelle konstant ist, ist:

$$(II) \quad \frac{p r^4}{l} = \frac{P_1 R_1^4}{L_1} = \frac{P_2 R_2^4}{L_2} = \frac{\Pi_1 \mathfrak{R}_1^4}{A_1} = \frac{\Pi_2 \mathfrak{R}_2^4}{A_2}.$$

Aus Gleichung (I) und (II) folgt:

$$p = \frac{p'}{1 + \frac{r^4}{l} \left(\frac{L_1}{R_1^4} + \frac{L_2}{R_2^4} + \frac{A_1}{\mathfrak{R}_1^4} + \frac{A_2}{\mathfrak{R}_2^4} \right)}.$$

In dieser Formel sind alle Größen bis auf $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Beobachtung zugänglich.

Zur Bestimmung von $A_1/\mathfrak{R}_1^4$ zerlegen wir die Übergangsstellen in kleine Röhrenelemente, so daß für die Länge λ_k der Radius ϱ_k als konstant angesehen werden kann. Der Druckabfall sei π_k , dann ist:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \sum \pi_n, \\ \frac{\Pi_1 \mathfrak{R}_1^4}{A_1} &= \frac{\pi_1 \varrho_1^4}{\lambda_1} = \dots = \frac{\pi_n \varrho_n^4}{\lambda_n} \end{aligned}$$

und mithin:

$$\frac{A_1}{\mathfrak{R}_1^4} = \sum_1^n \frac{\lambda_n}{\varrho_n^4}.$$

Wir können die Berechnung dieser Summe durchführen unter der Annahme, daß die Begrenzung an der Übergangsstelle durch eine Gerade gegeben sei.

Wir legen die X -Achse in die Röhrenachse so, daß für $x=0$ der Radius r und für $x=A_1$ der Radius R_1 ist, dann ist der Radius an einer beliebigen Stelle

$$\varrho = r + \frac{x}{A_1}(R_1 - r)$$

und mithin:

$$\frac{A_1}{R_1^4} = \int_0^{A_1} \frac{dx}{\varrho^4} = \frac{A_1}{3(R_1 - r)} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3} \right).$$

Da bei den folgenden Versuchen $R_1 = R_2 = R$ ist, so ergibt sich, wenn man $A = A_1 + A_2$ setzt:

$$p = \frac{p'}{1 + \frac{r^4}{R^4} \frac{L}{l} + \frac{p'}{r^4} \frac{A}{3(R-r)} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right)}.$$

In dieser Formel sind alle Größen der Beobachtung zugänglich.

8. *Prüfung des Poiseuilleschen Gesetzes für eine zähflüssige Kolophonium-Terpentinölmischung für Röhren von verschiedenem Querschnitt.* — Es wurden drei verschiedene Röhren untersucht. Die Röhren wurden mit derselben Mischung gefüllt, um in allen Fällen sicher dieselbe Konzentration an Terpentinöl zu haben.

Tab. 1 gibt den Radius, die Länge und den Druckabfall für die enge Röhre, letzteren in Dynen pro cm^2 .

Tabelle 1.

Röhre	r	l	p
I	1,04	14,3	$1,35 \cdot 10^6$
II	0,50	14,1	$1,45 \cdot 10^6$
III	0,305	14,1	$1,47 \cdot 10^6$

Das Volumen wurde durch Wägung des bei B (Fig. 2) austretenden Quecksilbers erhalten.

Die Tab. 2—4 geben die Beobachtungsreihen, die mit den einzelnen Röhren angestellt wurden.

Tabelle 2.

Ausfluß- menge in g Hg	Zeit (Min.)	Ausfluß- menge pro 1 Min. (cm ³)	Bemerkungen
10,48	15	0,0515	Temperatur 9°
10,99	16	0,0505	
9,04	13	0,0511	
10,92	16	0,0503	
9,50	14	0,0499	
10,12	15	0,0496	
—	—	—	Die Temperatur sinkt auf 8,9° und 8,8° und bleibt dann kon- stant. Die nebenstehenden Werte beziehen sich auf die konstante Temperatur von 8,8°.
83,69	139	0,0443	
100,65	160	0,0463	
170,40	293	0,0429	

Tabelle 3

Ausfluß- menge in g Hg	Zeit (Min.)	Ausfluß- menge pro 1 Min. (cm ³)	Bemerkungen
4,39	146	0,00221	Die Temperatur bleibt während des Versuches konstant 8,6°
2,63	86,5	0,00224	
19,69	659	0,00220	
2,74	91,5	0,00220	
3,64	115	0,00233	
4,55	144	0,00233	

Tabelle 4.

Ausfluß- menge in g Hg	Zeit (Min.)	Ausfluß- menge pro 1 Min. (cm ³)	Bemerkungen
0,68	207	0,000242	} Temperatur 8,6°
0,67	205	0,000241	
0,68	194	0,000258	
2,74	826	0,000244	
5,54	1410	0,000289	Die Temperatur ist während der Beobachtungszeit auf 9° gestiegen

Tabelle 4 (Fortsetzung).

Ausfluß- menge in g Hg	Zeit (Min.)	Ausfluß- menge pro 1 Min. (cm ³)	Bemerkungen
1,38	310	0,000327	} konstante Temperatur 9°.
6,96	1390	0,000368	
—	—	—	Die Temperatur sinkt während der folgenden Versuche
4,92	1455	0,000249	} Temperatur konstant 8,6°
3,53	1013	0,000256	
0,71	215	0,000243	} Temperatur sinkt
—	—	—	
3,54	1177	0,000221	Temperatur 8,4°
—	—	—	Temperatur 8,2°
3,42	1283	0,000196	

Die Versuche wurden im Keller angestellt. Trotzdem traten Temperaturschwankungen auf, besonders bei dem letzten Versuche, der sich auf 8 Tage erstreckte. Es traten während dieser Zeit zweimal starke Umschläge in der Außentemperatur ein, die sich auch im Keller stark fühlbar machten. Aus der Tab. 4 ist zu ersehen, daß die Ausflußmenge wieder dieselbe wird, wenn die ursprüngliche Temperatur wieder erreicht wird.

Da die Temperaturen, bei denen die einzelnen Versuche angestellt wurden, etwas verschieden sind und die Ausflußmenge von der Temperatur stark abhängt, so sind die Versuche nicht direkt vergleichbar. Tab. 5 enthält die Werte der Reibungskoeffizienten (unter Angabe der Temperatur), wie sie sich aus dem Poiseuilleschen Gesetz ergeben.

Tabelle 5.

Röhre	Reibungskoeffizient · 10 ⁷				
	9°	8,8°	8,6°	8,4°	8,2°
I ($r = 1,04$)	}	5,15	5,82	—	—
II ($r = 0,50$)					
III ($r = 0,305$)	}	6,09	—	8,62 (8,52)	9,60 10,83

Aus den in der Tabelle gegebenen Werten des Reibungskoeffizienten für die verschiedenen Röhren zeigt sich, daß die Werte eine genügende Übereinstimmung zeigen, wenn man die Temperaturunterschiede berücksichtigt.¹⁾ Der in Klammer gesetzte Wert bezieht sich auf den Fall, daß die konstante Temperatur von $8,6^\circ$ zum zweitenmal erreicht wird.

Im Verlaufe des Versuches mit der dritten Röhre durchwanderte eine kleine Luftblase die enge Röhre. Da dieselbe sich in der Mitte der engen Röhre bewegte, so konnte aus ihrer Geschwindigkeit der Koeffizient der inneren Reibung bestimmt werden. Die Geschwindigkeit in der Achse der engen Röhre ist gegeben durch:

$$u = \frac{p}{4 l \eta} r^2.$$

Tab. 6 enthält die Beobachtungen über die Wanderung der Luftblase und die daraus berechneten Werte der Geschwindigkeit und des Reibungskoeffizienten. Die Temperatur

Tabelle 6.

Zeit (Min.)	Weg (cm)	u	η
520	1,25	0,00240	$6,06 \cdot 10^7$
2040	5,00	0,00246	$5,91 \cdot 10^7$

1) Die Werte für die dritte Röhre sind etwas zu groß. Dabei dürfte der folgende Umstand eine Rolle spielen. In der Röhre III befand sich in der Kolophonium-Terpentinölmischung eine größere Luftblase ca. 3 cm von der Oberfläche der Substanzschicht in L_1 entfernt. Es wurde daher die Röhre im geheizten Zimmer vertikal aufgestellt, der Röhrenteil L_2 nach unten, wobei der von Substanz freie Teil von L_2 mit Hg gefüllt war, um ein Fließen der Substanz zu verhindern. Die Luftblase wanderte im Verlauf von einigen Tagen nach der Oberfläche hin. Die Trennungsfläche der Luftblase von der Oberfläche war zu Beginn des Versuches so klein geworden, daß sie zersprengt wurde, als das Rohr unter Druck gesetzt wurde. Die Substanz erfüllte zu Beginn des Versuches das Rohr als homogene Masse, bis auf eine kleine Luftblase, die im folgenden zur Bestimmung der Geschwindigkeit benutzt wurde. Während des Stehens im warmen Zimmer trat nun an der Oberfläche der Kolophonium-Terpentinölmischung eine Verdampfung von Terpentinöl ein, dadurch wurde die Konzentration an Terpentinöl in der Oberflächenschicht kleiner und damit der Reibungskoeffizient für diese Schicht größer.

während der Beobachtung war 9° . Der Wert des aus der Geschwindigkeit berechneten Reibungskoeffizienten stimmt gut überein mit dem aus der Ausflußmenge gefundenen Wert von $6,09 \cdot 10^7$.

Daß wir es bei unserer Kolophonium–Terpentinölmischung mit einer zähflüssigen Substanz zu tun haben, zeigte ihr Verhalten gegen langsame Deformationen. Gegen rasche Deformationen verhielt sich die Mischung wie reines Kolophonium, sie war vollkommen spröde. Gegen langsame Deformationen verhielt sie sich dagegen wie eine zähe Flüssigkeit, die die den hydrostatischen Grundgesetzen entsprechende Gleichgewichtslage erst nach sehr langer Zeit annimmt. In der Röhre L_2 war der vordere Teil mit Hg gefüllt. Die ursprünglich vertikale Trennungslinie von Mischung und Quecksilber strebt im Verlauf von längerer Zeit gegen die von den hydrostatischen Gesetzen geforderte horizontale Trennungslinie hin. Bei den beiden ersten Röhren dauerte der Versuch nur so lange, daß die Trennungslinie geneigt war. Bei der dritten Röhre wurde dagegen die horizontale Trennungsebene fast erreicht. Damit wird der Querschnitt der Substanzsäule in L_2 kleiner und die Reibung im weiten Teile wird größer, als bei der Korrektionsformel für den Druck angenommen wurde. Doch ist zu berücksichtigen, daß die Substanz an dem Quecksilber nicht haftet und dadurch die Reibung wieder herabgesetzt wird. Das von den weiten Röhrenteilen herrührende Korrektionsglied in der Formel für den Druck kommt zudem nur für die erstre Röhre in Betracht¹⁾, für die dritte ist es kleiner als 0,001. Daß die Deformation der Oberfläche in L_2 in der Tat keine große Rolle spielen kann, zeigt die gute Übereinstimmung der anfangs (vor Deformation der Oberfläche) gefundenen Werte für den Koeffizienten der inneren Reibung mit den gegen den Schluß gefundenen Werten, sobald dieselbe Temperatur wieder erreicht wird.

9. *Einfluß der Temperatur auf die innere Reibung.* — Die im vorhergehenden mitgeteilten Beobachtungen zeigen eine große Abhängigkeit der Ausflußmenge und damit des Reibungs-

1) Bei der ersten Röhre wurde während der Versuchsdauer die ursprüngliche Trennungsebene nicht geändert. Nur das ausströmende Volumen wurde durch Anwesenheit des Quecksilbers deformiert.

koeffizienten von der Temperatur. Um diese Abhängigkeit auch für ein größeres Intervall zu prüfen, wurde mit der zweiten Röhre ein Versuch bei $18,5^{\circ}$ gemacht.

Die beobachteten Ausflußmengen enthält Tab. 7. Die zweite Kolumne enthält die Zeit in Sekunden wie sie beobachtet wurde. Die Ausflußmenge ist dagegen pro Minute gegeben, um einen besseren Vergleich mit den Ausflußmengen bei $8,6^{\circ}$ in Tab. 3 zu ermöglichen.

Tabelle 7.

Ausflußmenge in g Hg	Zeit (sec)	Ausflußmenge pro 1 Min. (cm ³)
4,87	420	0,0512
2,90	245	0,0523
2,87	245	0,0517
2,86	250	0,0505
3,81	336	0,0501
5,71	518	0,0487
3,81	342	0,0492
3,81	341	0,0493
7,59	685	0,0489
6,64	593	0,0494
5,70	491	0,0512
3,78	324	0,0515

Berechnet man aus der Ausflußmenge den Reibungskoeffizienten, so ergibt sich bei $18,5^{\circ}$

$$\eta = 3,01 \cdot 10^6,$$

gegen

$$\eta = 67,2 \cdot 10^6$$

bei $8,6^{\circ}$.

10. *Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung aus dem Poiseuilleschen Gesetze für eine feste Kolophonium-Terpentinölmischung.* — Die bisher untersuchte Kolophonium-Terpentinölmischung war zähflüssig. Als die Röhren nach dem Versuch bei ca. 10° horizontal liegend aufbewahrt wurden, konnte bereits nach einigen Tagen ein Fließen der Substanz in den weiten Röhrenteilen beobachtet werden, das ohne Anwendung eines äußeren Druckes unter dem Einfluß des Eigengewichtes der Substanz eintrat. Bei der Mischung, die zu

den im folgenden mitgeteilten Versuchen diente, behielt die deformierte Oberfläche in den weiten Röhrenteilen nach dem Versuch ihre Gestalt vollkommen bei, obwohl die Röhre über einen Monat horizontal liegend (bei ca. 10°) aufbewahrt wurde.

Die enge Röhre hatte einen Radius von 1,01 cm und eine Länge von 12,8 cm. Der auf die enge Röhre entfallende Druck betrug $1,43 \cdot 10^6$ Dynen pro cm^2 . Die Ausflußmenge wurde bestimmt, indem an Stelle der Kugel *K* in Fig. 1 eine kalibrierte Röhre gebracht und das Volumen des einströmenden Hg direkt abgelesen wurde. Tab. 8 enthält die beobachteten Ausflußmengen. Die Temperatur schwankte während der in

Tabelle 8.

Zeit (Stunden)	Ausflußmenge cm^3	Ausflußmenge pro Stunde
11,3	1,40	0,124
12,0	1,25	0,104
15,0	1,95	0,130
8,25	1,10	0,133
12	1,35	0,113
13,75	1,85	0,134
4,5	0,55	0,122
18,0	2,10	0,117

Tab. 8 mitgeteilten Versuche nur sehr wenig und betrug im Mittel $10,2^{\circ}$. Der Reibungskoeffizient ergibt sich zu

$$\eta = 1,32 \cdot 10^9.$$

Da die Ausflußzeiten für enge Röhren hier sehr groß und der Einfluß von Temperaturschwankungen sich dabei sehr stark geltend machen würde, so wurde die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes in diesem Falle geprüft durch

11. *Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung aus der Deformation der Oberfläche in dem weiten Röhrenteile.* — Wir nehmen an, daß die Bewegung für die Grenzfläche der Substanz in derselben Weise erfolgt, wie für eine Ebene im Inneren der Substanz, und daß für eine Mischung von der von uns betrachteten Zähigkeit bei der Bewegung in der weiten Röhre keine Geschwindigkeitskomponente in Richtung des

Radius auftritt. Legen wir die X -Achse in die Röhrenachse und den Koordinatenanfangspunkt in die Grenzfläche, die durch eine Ebene dargestellt sei. Diese Ebene

$$x = 0$$

zur Zeit $t = 0$ geht in eine Fläche

$$x = u t$$

für die Zeit t über. Die Geschwindigkeit für eine Flüssigkeit mit innerer Reibung ist gegeben durch

$$u = \frac{P}{4 \eta L} (R^2 - z^2 - y^2),$$

wenn die Geschwindigkeit an der Röhrenwand Null ist und P , L und R Druckabfall, Länge und Radius der Röhre sind.

Die Trennungsebene geht also in ein Paraboloid über, dessen Gleichung

$$y^2 + z^2 - \frac{4 \eta L}{P t} x' = 0$$

ist, wenn auf den Scheitel transformiert wird.

Der Reibungskoeffizient läßt sich also bestimmen aus dem Parameter der Parabel, durch deren Rotation die deformierte Oberfläche erhalten wird.

Am einfachsten wird sich die Bestimmung von η durchführen lassen, wenn man für verschiedene Zeiten den Abstand ξ des Scheitels von der ursprünglichen Trennungsfläche beobachtet (d. i. die Verschiebung des Anfangspunktes unseres Koordinatensystems). Es ist dann:

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{R^2}{\xi} \frac{P}{L} t.$$

12. *Untersuchung der deformierten Oberfläche für die feste Kolophonium-Terpentinölmischung.* — Um zu untersuchen, ob die deformierte Oberfläche bei Versuch 7 tatsächlich ein Rotationsparaboloid ist, wurde ein Gipsabguß des von Substanz freien Teiles von L_1 hergestellt. (Die Röhre s und der engere Teil von L_1 wurden vorher abgesprengt.) Die so erhaltene Fläche wurde auf Koordinatenpapier projiziert und die Koordinaten mit dem Fernrohr abgelesen. Die Tab. 9 enthält die beobachteten Werte für drei um je 60° gegeneinander geneigte Ebenen. Die angegebenen Werte von y sind die Mittelwerte der für y_+ und y_- abgelesenen Werte.

Tabelle 9.

x	y			y^2/x			
	I	II	III	I	II	III	Mittelwert
0,2	0,43	0,44	0,445	0,93	0,97	0,99	0,96
0,4	0,62	0,60	0,61	0,96	0,90	0,93	0,93
0,6	0,77	0,73	0,77	0,99	0,89	0,99	0,96
0,8	0,86	0,80	0,87	0,92	0,80	0,95	0,89
1,0	0,98	0,95	0,99	0,96	0,90	0,98	0,95
1,2	1,07	1,03	1,07	0,95	0,89	0,95	0,93
1,4	1,17	1,14	1,17	0,98	0,93	0,98	0,96
1,6	1,25	1,22	1,24	0,98	0,93	0,96	0,96
1,8	1,33	1,30	1,32	0,98	0,94	0,97	0,96
2,0	1,41	1,39	1,40	0,99	0,97	0,98	0,98
2,2	1,49	1,47	1,49	1,01	0,98	1,01	1,00
2,4	1,57	1,58	1,58	1,03	1,04	1,04	1,04
2,6	1,67	1,68	1,68	1,07	1,08	1,08	1,08
2,8	1,82	1,77	1,83	1,19	1,12	1,20	1,17
3,0	1,95	1,88	1,94	1,27	1,18	1,25	1,23

Aus den Werten für y^2/x in Tab. 9 sieht man, daß die gefundenen Werte unter sich gut übereinstimmen und daß die deformierte Oberfläche in der Tat ein Rotationsparaboloid ist. Nur für die Werte in der Nähe der ursprünglichen Ebene treten Abweichungen auf. Zu beachten ist allerdings, daß in der Nähe der Röhrenwand eine Deformation unserer Fläche von vornherein zu erwarten ist, da die ursprüngliche Begrenzungsfläche hier keine Ebene mehr ist, sondern gegen die Röhrenwand von vornherein geneigt ist, denn unsere Begrenzungsfläche wurde durch Gießen auf Quecksilber erhalten. Allerdings müßten die Werte von y^2/x dann im Gegenteil kleiner werden. Es ist aber wahrscheinlich, daß unsere Annahme, daß keine Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Radius auftritt, nicht vollkommen richtig ist. Tritt aber eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Radius auf, so wird diese Wirkung besonders stark hervortreten, wenn die Normale des Flächenelementes nahezu senkrecht auf der X-Achse, steht und damit erklärt sich die Deformation unseres Paraboloids für die großen Werte von x . Eine weitere

Voraussetzung, die jedenfalls auch nicht vollkommen richtig ist, ist die Inkompressibilität unseres Mediums.

Berechnet man aus dem Mittelwert der oben gefundenen Werte für den Parameter den Reibungskoeffizienten, so ergibt sich, da $P/L = 8,04 \cdot 10^3$ und die Substanz 125 Stunden dem Druck ausgesetzt war

$$\eta = 0,9 \cdot 10^9.$$

Berechnet man aus R und ξ den Reibungskoeffizienten, so ergibt sich, da $R = 1,95$ cm und $\xi = 3,1$ cm beobachtet wurde (wobei jedoch von ξ noch die Höhe des Quecksilbermeniskus zu subtrahieren ist)

$$\eta = 1,19 \cdot 10^9,$$

während aus der Ausflußmenge sich ergab:

$$\eta = 1,32 \cdot 10^9.$$

13. *Bestimmung des Koeffizienten der inneren Reibung einer Kolophonium-Terpentinölmischung aus der Deformation einer Ebene im weiten Röhrenteile.* — Die am Ende des § 8 gegebene

Fig. 3.

Formel für den Reibungskoeffizienten gilt natürlich für jede beliebige Ebene im Inneren, wenn mit ξ der Abstand des Scheitels des Paraboloids von der ursprünglichen Ebene bezeichnet wird. Beobachten wir außer der Oberfläche gleichzeitig eine Ebene im Inneren, so kann die Annahme, die wir in § 8 über die Bewegung der Grenzfläche gemacht haben, direkt geprüft werden, ob nämlich die Bewegung für die Grenzfläche in derselben Weise erfolgt, wie für eine Ebene im Inneren der Substanz.

Da die Bewegung symmetrisch zu der Röhrenachse erfolgt, so braucht man im Inneren der Substanz nur eine Gerade zu bezeichnen, die senkrecht zur Röhrenachse steht, und deren Deformation zu beobachten. Bei dem im folgenden beschriebenen Versuch dienten zu diesem Zwecke dünne Gummibänder. Dieselben wurden in die Röhre (Fig. 3) durch die seitlichen Röhren ff , $f'f'$ und $f''f''$ eingeführt. Die Gummibänder waren gespannt und an dünnen Platindrähten befestigt, die an den Enden

von f , f' , f'' eingeschmolzen waren. Dann wurde die heiße Kolophonium-Terpentinölmischung in die Röhre gebracht. Nach dem Erstarren der Substanz wurden die Platindrähte entfernt und die Gummibänder blieben gespannt in der Substanz zurück. Die seitlichen Röhren wurden wieder zugeschmolzen, damit kein Strömen nach dieser Richtung stattfand.

Der Röhrenteil s wurde in den Röhrenteil d (Fig. 1) eingekittet, so daß die Strömung in diesem Falle nicht in der Richtung der Horizontalen, sondern in Richtung der Vertikalen (Z -Achse) stattfand.

Die Ausflußmenge wurde durch das in L_2 verdrängte und bei B ausströmende Wasser gemessen. Gleichzeitig wurde die Senkungen ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 der Gummibänder und die Senkung der Oberfläche ζ_0 beobachtet. Da ζ den Abstand des Scheitels des Paraboloids von der ursprünglichen Ebene darstellt, so ist das ausgeströmte Volumen für die Zeiteinheit gegeben durch:

$$V = \frac{R^3 \pi}{2} \frac{\zeta}{t}.$$

Wir können die Gültigkeit der oben abgeleiteten Beziehungen am einfachsten prüfen durch Vergleich der direkt beobachteten und der aus den ζ berechneten Ausflußmenge.

Die Resultate des Versuches sind in Tab. 10 gegeben (ζ in cm, V in cm^3 und t in Min). Vergleicht man zunächst die für ζ/t gefundenen Werte, so sieht man, daß ζ/t für die Ebenen im Inneren kleiner ist als für die Grenzfläche.

Dies hat seinen Grund darin, daß die Gummibänder gespannt sind und durch die elastische Kraft in ihre Ruhelage zurückgezogen werden. Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigt sich, wenn der Druck aufgehoben wird, der die Strömung bewirkt. Dann streben die Gummibänder ihrer ursprünglichen Ruhelage zu. Es wurde der Rückgang der Gummibänder für einen Zeitraum von 120 Minuten beobachtet. Der Rückgang betrug 0,5, 0,85 und 0,8 cm für ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Für die letzten Beobachtungen läßt sich daraus der Wert von ζ berechnen, für den Fall, daß die Gummibänder nicht durch elastische Kräfte in ihre ursprüngliche Lage getrieben würden. Die in Klammern beigefügten Werte von ζ/t und v/t beziehen sich auf diesen Fall. Für die ersten Beobachtungen wird natürlich der

Tabelle 10.

ζ_0			ζ_1			ζ_2			ζ_3			Ausflußmenge pro 1 Min. beob.			Ausflußmenge pro 1 Min. ber.			
ζ	t	$\frac{\zeta}{t}$	ζ	t	$\frac{\zeta}{t}$	ζ	t	$\frac{\zeta}{t}$	ζ	t	$\frac{\zeta}{t}$	v	t	$\frac{v}{t}$	ζ_0	ζ_1	ζ_2	ζ_3
0,3	11,5	0,026	0,5	22,9	0,022	0,4	19	0,021	0,4	16	0,025	2,1	15	0,140	0,145	0,122	0,117	0,139
				(0,026)			(0,028)			(0,032)					(0,145)	(0,155)	(0,176)	
0,5	19,8	0,025	0,7	30,8	0,023	0,6	27,4	0,022	0,6	25,0	0,024	3,4	24,5	0,139	0,140	0,126	0,122	0,132
				(0,027)			(0,029)			(0,031)					(0,149)	(0,161)	(0,172)	
1,3	50,5	0,026	1,3	60	0,022	1,2	56,6	0,021	1,1	54,5	0,020	8,1	55,6	0,146	0,143	0,120	0,118	0,112
				(0,026)			(0,028)			(0,027)					(0,144)	(0,156)	(0,148)	
2,0	75	0,027	1,7	80,5	0,021	1,6	78,5	0,020	1,6	77,8	0,021	11,5	76,8	0,150	0,148	0,118	0,114	0,114
				(0,025)			(0,027)			(0,027)					(0,140)	(0,152)	(0,151)	
2,5	90,4	0,028	2,1	100	0,021	1,8	96,6	0,019	1,9	94,5	0,020	14,2	95,5	0,148	0,154	0,116	0,104	0,111
				(0,025)			(0,026)			(0,027)					(0,140)	(0,142)	(0,148)	
2,7	95,7	0,028	2,3	105,0	0,022	2,0	102,0	0,020	2,0	100	0,020	15,4	104,5	0,146	0,156	0,121	0,109	0,111
				(0,026)			(0,027)			(0,027)					(0,144)	(0,148)	(0,148)	

so berechnete Wert von ζ/t bez. v/t zu groß ausfallen, da der in Rechnung gesetzte Rückgang in diesem Falle zu groß ist, da bei den kleinen Deformationen die rücktreibende Kraft kleiner sein wird. Läßt man aus diesem Grunde die beiden ersten Beobachtungsreihen fort, so sieht man, daß die für die korrigierten ζ berechneten Werte von v/t unter sich und mit der direkt bestimmten Ausflußmenge pro Minute übereinstimmen.

Berechnet man den Reibungskoeffizienten aus

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{R^3}{\zeta} \frac{P}{L} \cdot t,$$

indem man den Mittelwert aus den gefundenen ζ_0/t benutzt, so ergibt sich:

$$\eta = 1,32 \cdot 10^7.$$

Berechnet man den Reibungskoeffizienten aus dem Mittelwert der Ausflußmenge pro Minute und den Dimensionen der engen Röhre, so ergibt sich

$$\eta = 1,36 \cdot 10^7.$$

14. *Eine zweite Methode, die Deformationen einer Ebene im Inneren zu bestimmen.* — Bei der im vorhergehenden benutzten Methode, die Ebene im Inneren mit Gummibändern zu bezeichnen, treten Störungen auf, die durch die Elastizität der gespannten Gummibänder bedingt waren. Es wurde daher noch nach einer anderen Methode gesucht.

Die Geraden ff , $f'f'$ und $f''f''$ lassen sich durch kleine Glasperlen markieren. Die Einführung der Perlen in die Substanz geschieht in der Weise, daß dieselben an einem durch die seitlichen Röhren gespannten Draht eingeführt werden. Die heiße Lösung wird dann in die Röhre gegossen und nach dem Erstarren der Substanz wird der Draht entfernt, indem ein elektrischer Strom durch den Draht geschickt wird, dieser erwärmt infolge der schlechten Wärmeleitung nur die benachbarten Stellen der Kolophonium-Terpentinölmischung zum Schmelzen und der Draht läßt sich leicht aus der Substanz herausziehen, ohne daß die Perlen ihre Lage ändern. Da das spezifische Gewicht der Perlen größer ist als das der Kolophonium-Terpentinölmischung, so wird allerdings an und für sich eine Bewegung infolge des Gewichts der Perlen ein-

treten. Diese ist aber, wenn man stark zähflüssige oder feste Mischungen hat, so klein, daß sie gegenüber der Strömung unter dem Einfluß des Druckes verschwindet. In Fällen, in denen die Eigengeschwindigkeit der eingeführten Fremdkörper in Betracht kommen könnte, kann man diesen Fehler vermeiden, indem man eine Substanz von ungefähr dem gleichen spezifischen Gewicht wählt, z. B. bei Kolophonium-Terpentinölmischungen kleine Stückchen Gummi (um die man noch dünne Drähte wickeln kann, so daß das spezifische Gewicht des Fremdkörpers gleich dem der Mischung wird).

Weit größer als die Störungen, die durch das Gewicht der Perlen bedingt sind, sind die Störungen, die in der Strömung auftreten, wenn die Perlen nahe aneinander liegen und dadurch bei der Bewegung in dem zähflüssigen Medium die Geschwindigkeit der einzelnen Perlen infolge der verschiedenen Geschwindigkeit der benachbarten Perlen verzögert, bez. beschleunigt wird. Dieser Einfluß läßt sich jedoch vermeiden, wenn der Abstand der einzelnen Perlen groß genug gewählt wird.

15. Auf die Abweichungen der deformierten Oberfläche von der Gestalt des Rotationsparaboloids, die besonders bei starken Deformationen der Oberfläche hervortreten, und auf die Verschiedenheiten von ζ für die Oberfläche und für Ebenen im Inneren soll erst nach weiteren Versuchen eingegangen werden. Wir haben es dabei bereits mit Bewegungen zu tun, bei denen die einfachen Annahmen über die Druckverteilung in einer Flüssigkeit mit innerer Reibung, die zum Poiseuilleschen Gesetze führen, nicht mehr gültig sind.

Jedenfalls haben die Versuche gezeigt: Die Strömung zähflüssiger und fester Körper durch enge Röhren läßt sich innerhalb weiter Grenzen quantitativ darstellen durch die einfachen Annahmen, die zum Poiseuilleschen Gesetze führen.

Erlangen, Physikalisches Institut, Februar 1906.

(Eingegangen 14. Februar 1906.)