Auszug eines Schreibens über die *Lamé*schen Functionen an den Herausgeber.

(Von Herrn *E. Heine* zu Halle.)

Die Arbeit, welche ich Ihnen, verehrter Freund, heute übersende, und die ich durch dies Schreiben einleite, betrifft einen Gegenstand, den ich immer mit Vorliebe betrachtet habe, nämlich die von *Lamé* im *Liouville*schen Journal T. IV eingeführten Functionen E. Es ist mir gelungen, diesen Functionen eine neue Seite abzugewinnen, und die bekannte Gleichung, von der sie abhangen, von einem neuen Gesichtspunkte aus zu betrachten.

Ich brauche auf *Lamé*s Bezeichnung, die Ihnen bekannt ist, nicht zurückzukommen; der Kürze halber will ich hier nur von solchen E reden, die zu einem graden n gehören, und ganze Functionen der Veränderlichen μ oder ν sind, indem ich diese Buchstaben für *Lamé*s ϱ_1 und ϱ_2 gewählt habe. Ich bezeichne sie durch K^s, wo s alle Werthe $0, 1, 2, \dots \frac{1}{2}n$ erhält. Die dazu gehörigen B^s setze ich gleich $(b^2+c^2)\mathfrak{K}^s$.

Lamé entwickelt die $K(\nu)$ nach *Potenzen* der Veränderlichen; ich stelle sie durch eine Reihe dar, welche die Form hat

$$K^s(\nu) = \beta_0^s P_{n,0}\left(\frac{\nu}{b}\right) + \beta_2^s P_{n,2}\left(\frac{\nu}{b}\right) + \dots + \beta_n^s P_{n,n}\left(\frac{\nu}{b}\right),$$

in der die β Constanten vorstellen, und die $P_{n,m}$ jene Functionen sind, welche ich nach dem Vorgange von *Gaufs* (in der allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus) in meinen Arbeiten auf diese Art bezeichnet habe (Siehe §. 1 der folgenden Abhandlung). Der wesentliche Theil der β besteht dann aus den Coefficienten α einer orthogonalen Substitution (§. 6, Gleichung (5.)), durch welche eine gegebene homogene Function zweiten Grades von $\frac{1}{2}n+1$ Veränderlichen x in die Form $\sum_{s=0}^{s=\frac{1}{2}n} \mathfrak{K}^s y^s y^s$ verwandelt wird (§. 7). Es folgt daraus, dafs die $\mathfrak{K}$ erhalten werden, indem man die Determinante, welche bei solchen Transformationen vorkommt, gleich Null .

Nachdem ich dieses Resultat gefunden hatte, bemerkte ich, dafs ein Theil desselben, nämlich in sofern es die $\mathfrak{K}$ betrifft, sich wenigstens im Allgemeinen ziemlich einfach erweisen läfst. Dies geschieht zunächst auf den folgenden Seiten; wenngleich ich dort nachweise, dafs die Gleichung für die

$\mathfrak{K}$ bei einer bestimmten Substitution der Art vorkommt, so erkennt man doch noch nicht die Rolle, welche die Coefficienten der Substitution spielen.

Setzen wir dazu, wie *Lamé*

$$K(\nu) = \gamma_0\nu^n - \gamma_1\nu^{n-2} + \gamma_2\nu^{n-4} - \cdots,$$

so wird, wenn $2\sigma = n$ ist,

$$\begin{aligned}
0 &= h_0\gamma_0 + k_0\gamma_1,\\
0 &= g_1\gamma_0 + h_1\gamma_1 + k_1\gamma_2,\\
0 &= g_2\gamma_1 + h_2\gamma_2 + k_2\gamma_3,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
0 &= g_{\sigma-1}\gamma_{\sigma-2} + h_{\sigma-1}\gamma_{\sigma-1} + k_{\sigma-1}\gamma_\sigma,\\
0 &= g_\sigma\gamma_{\sigma-1} + h_\sigma\gamma_\sigma,
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
h_0 &= +(b^2+c^2)(\mathfrak{K}-n^2),\\
h_1 &= -(b^2+c^2)(\mathfrak{K}-(n-2)^2),\\
h_2 &= +(b^2+c^2)(\mathfrak{K}-(n-4)^2),\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
k_0 &= +2(2n-1), & g_1 &= +n(n-1)b^2c^2,\\
k_1 &= -4(2n-3), & g_2 &= -(n-2)(n-3)b^2c^2,\\
k_2 &= +6(2n-5), & g_3 &= +(n-4)(n-5)b^2c^2,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}$$

gemacht ist. Man hat daher $\mathfrak{K}$ so zu bestimmen, dafs die Determinante des obigen Systems verschwindet. Aus den Formeln, die *Painvin* im *Liouville*schen Journal 1858 S. 41 und 42 gegeben hat, bemerkt man, dafs die Determinante nicht von den k und g selbst, sondern nur von den Producten k_0g_1, k_1g_2 etc. abhängt, also dafs sie gleich der folgenden ist:

$$\begin{vmatrix}
h_0 & \sqrt{k_0g_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\sqrt{k_0g_1} & h_1 & \sqrt{k_1g_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \sqrt{k_1g_2} & h_2 & \sqrt{k_2g_3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \sqrt{k_2g_3} & h_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{\sigma-3} & \sqrt{k_{\sigma-3}g_{\sigma-2}} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{k_{\sigma-3}g_{\sigma-2}} & h_{\sigma-2} & \sqrt{k_{\sigma-2}g_{\sigma-1}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{k_{\sigma-2}g_{\sigma-1}} & h_{\sigma-1} & \sqrt{k_{\sigma-1}g_\sigma}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{k_{\sigma-1}g_\sigma} & h_\sigma
\end{vmatrix}$$

Auf diese führt aber die Aufgabe, solche lineare Substitution zu bestimmen, durch welche

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - \cdots \pm x_\sigma^2 = \varepsilon_0 y_0^2 + \varepsilon_1 y_1^2 + \cdots + \varepsilon_\sigma y_\sigma^2$$

und

$$qn^2 x_0^2 - 2\sqrt{k_0 g_1}\, x_0 x_1 - q(n-2)^2 x_1^2 - 2\sqrt{k_1 g_2}\, x_1 x_2 + \text{etc.}$$
$$= q(\varepsilon_0 \mathfrak{K}_0 y_0^2 + \varepsilon_1 \mathfrak{K}_1 y_1^2 + \cdots \varepsilon_\sigma \mathfrak{K}_\sigma y_\sigma^2)$$

wird, wenn $q = b^2 + c^2$ und jedes ε gleich ± 1 gesetzt wird. Hiermit ist dieses partielle Resultat erwiesen; in der Abhandlung tritt es in bestimmterer Form auf. Die Determinante, die dort vorkommt, obgleich sie der obigen der Hauptsache nach gleich sein mufs, hat eine andere Gestalt, indem in ihr $b^2 + c^2$ und $c^2 - b^2$ vorkommen, während hier statt des letzteren bc auftritt.

Um den Untersuchungen der beifolgenden Abhandlung näher treten zu können, mufs ich von dreien meiner früheren in diesem Journale veröffentlichten Arbeiten reden. In der ersten derselben (Bd. 26) habe ich die Anziehungsaufgaben für die Rotationsellipsoide gelöst; man findet dort die hauptsächlichen Eigenschaften der Functionen P, welche ich benutze, entwickelt. Die zweite, im Jahre 1844 vollendete (Bd. 29), behandelt die dreiachsigen Ellipsoide, und zwar gebe ich die Formeln für den inneren Punkt in einer neuen Gestalt, die für den äufseren mit Hülfe von *Lamé*s E und einer damals noch nicht angewendeten Function F. Erst im 42sten Bande erscheint auch die Lösung der letzten in einer neuen Gestalt. Jede dieser drei Arbeiten soll, wo ich auf dieselbe zu verweisen habe, durch den Band des Journals, in dem sie steht, bezeichnet werden.

Ich habe nicht den Anspruch gemacht, dafs meine Lösungen, welche die späteren sind, die *Lamé*schen ersetzen sollen: sie sind vielmehr bestimmt, neben ihnen aufzutreten, indem beide Formen für verschiedene Zwecke verschiedenen Werth haben. Da *Lamé*s Form die ***Wurzeln*** von Gleichungen enthält, meine Lösungen nur die ***Coefficienten*** der Gleichungen, so erkennt man leicht, dafs nur symmetrische Functionen dieser Wurzeln vorkommen, und die Vergleichung beider Lösungen verschafft Eigenschaften der Wurzeln.

Lamé zeigt, dafs die bekannte Gleichung der Kugelfunctionen, wenn man sie in seine Coordinaten transformirt, durch $\frac{1}{2}n+1$ Producte $K(\mu)K(\nu)$ integrirt wird, woraus ich schliefse, dafs sich jedes dieser Producte linear durch $\frac{1}{2}n+1$ Functionen $P_{n,2p}(\cos\theta).\cos 2p\varphi$ ausdrücken läfst, wo p die Werthe $0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}n$ erhält. Diese Functionen, in θ und φ, oder in μ und ν

ausgedrückt, nenne ich C_{2p}, wo (§. 1) die C solche Functionen von μ und ν sind, *dafs sie für den besonderen Werth* $\mu = c$ *in* $P_{n,2p}\left(\frac{\nu}{b}\right)$ *übergehen,* für andere besondere Werthe, als von p abhängigen Theil, den Cosinus eines $2p$fachen Winkels erhalten.

Bedeuten nun die Gröfsen γ Constanten in Beziehung auf μ und ν, die mit den oben so genannten nicht zusammenhangen, so kann man daher setzen

$$(a.) \qquad K^s(\mu)K^s(\nu) = \gamma_0^s C_0 + \gamma_2^s C_2 + \cdots + \gamma_n^s C_n.$$

Wir können *diese Gleichung zur Definition der* K *benutzen,* indem wir K *die* Functionen

$$\sum_{p=0}^{p=\sigma} \gamma_{2p} C_{2p}$$

nennen, in welchen die γ so bestimmt sind, dafs die Summe ein Product einer Function $f(\mu)$ in eine Function $f(\nu)$ ist. Dadurch sind die f (bis auf einen constanten Factor) bestimmt, und die $\sigma+1$ Functionen, die man so erhält, sind gleich den K.

Die Behandlung der Gleichungen, zu welchen man auf diese Art gelangt, macht jedoch Schwierigkeiten, weshalb ich die K anders definire. Als *erste Eigenschaft* derselben halte ich fest, dafs sie die Gleichung ($a.$) erfüllen müssen. Die *zweite* soll sein, dafs, wie *Lamé* es für die E nachweist,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} K^s(\mu)K^s(\nu)K^p(\mu)K^p(\nu)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

verschwindet, wenn p und s verschieden sind, dagegen einer Constanten gleich wird, die ich willkürlich bestimmen kann, und der Einfachheit halber gleich 1 setze, wenn $p = s$ ist. Dadurch erhält man, wenn a_{2p} eine bekannte einfache Constante vorstellt (§. 1), sofort

$$\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{p=0}^{p=\sigma}\gamma_{2p}^r\gamma_{2p}^s\cdot\frac{1}{a_{2p}} = 1,$$

wenn $r = s$, sonst $= 0$. Setzt man nun

$$\gamma_{2p}^s = \alpha_{2p}^s\sqrt{a_{2p}\cdot\frac{2n+1}{4\pi}},$$

so sind die α Coefficienten einer orthogonalen Substitution. Sind die α als solche gehörig bestimmt, so wird also

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}}K^s(\mu)K^s(\nu) = \alpha_0^s C_0\sqrt{a_0} + \alpha_2^s C_2\sqrt{a_2} + \cdots + \alpha_n^s C_n\sqrt{a_n}.$$

Man erkennt hieraus die merkwürdige Eigenschaft der Entwickelung von $K(\mu)K(\nu)$ nach den C, nach welcher die Gröfsen $C_p\sqrt{a_p}$ in die Producte auf der linken Seite durch das umgekehrte System der Coefficienten ausgedrückt werden, wie es im §. 6 Gleichung (4.) zu finden ist. Man erhält

$$(b.)\quad C_{2p}\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\,a_{2p}} = \alpha_{2p}^0 K^0(\mu)K^0(\nu)+\alpha_{2p}^1 K^1(\mu)K^1(\nu)\cdots+\alpha_{2p}^\sigma K^\sigma(\mu)K^\sigma(\nu).$$

Die Entwickelung von einem Factor K nach den $P_{n,m}$ ist dort ebenfalls angegeben.

Es treten hier die Coefficienten orthogonaler Substitutionen, wie man sieht, in eigenthümlicher Art auf. Man hat schon lange ihren Nutzen bei der Integration gewisser Formen erkannt, und sie gebraucht, eine Summe

$$dx_0^2+dx_1^2+\cdots$$

durch eine andere

$$d\lambda_0^2+d\lambda_1^2+\cdots$$

auszudrücken, indem man jedes dx durch eine Gleichung

$$dx_s = \gamma_0^s d\lambda_0+\gamma_1^s d\lambda_1+\cdots$$

mit den $d\lambda$ verband. Hier haben wir ein in gewisser Beziehung umgekehrtes Verfahren. Hat man nämlich eine Anzahl $\sigma+1$ von Functionen f gewisser Veränderlichen λ, μ, ν, etc., welche die Eigenschaft besitzen, dafs

$$\int M f_p f_q\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\ldots$$

verschwindet, wenn p und q verschieden sind, für $p=q$ aber eine von p unabhängige Constante wird (wobei M eine Function von λ, μ, ν etc. bezeichnet, und die Integration in innerhalb beliebig gegebener Grenzen stattfindet), so kann man durch solche Coefficienten γ einer orthogonalen Transformation sogleich Functionen φ von ähnlicher Eigenschaft durch die Gleichungen bilden

$$\varphi_p = \gamma_0^p f_0+\gamma_1^p f_1+\cdots+\gamma_\sigma^p f_\sigma.$$

Macht man, um ein einfaches Beispiel zu wählen,

$$\varphi_p = \gamma_0^p\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\gamma_1^p\cos x+\cdots+\gamma_\sigma^p\cos\sigma x,$$

so wird

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_p\varphi_q\,dx=0,\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_p\varphi_p\,dx=1.$$

Bildet man noch aus $\sin x$, $\sin 2x$, ... $\sin\sigma x$ im Ganzen σ ähnliche Functionen ψ, so wird man $2\sigma+1$ Functionen erhalten, welche noch aufserdem die Eigenschaft mit den ursprünglichen gemein haben, dafs die Summe ihrer Quadrate eine Constante $\frac{2\sigma+1}{2}$, gleich der Summe der Quadrate von $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos x$, $\cos 2x$, etc., $\sin x$, $\sin 2x$, etc. ist.

Die *dritte Eigenschaft* der Functionen, welche sie nun vollständig definirt, besteht darin, dafs $\Delta K = -\mathfrak{K}K$ sein mufs, wenn

$$d\varepsilon = \frac{d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} \quad \text{und}$$

$$(b^2+c^2)\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{d\varepsilon^2} - n(n+1)\nu^2\psi$$

gesetzt wird, d. h. dafs K der Differentialgleichung von *Lamé* genügt. Mache ich mit (*b.*) die Operation Δ, und bezeichne die linke Seite dann mit $-D$, so wird

$$D_{2p} = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \alpha_{2p}^s \mathfrak{K}^s K^s(\mu) K^s(\nu).$$

Multiplicirt man die Gleichungen dieses Systems mit denen des Systems (*b.*) und mit $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, so erhält man sofort die Werthe

$$\sum_{s=0}^{s=\sigma} \alpha_{2p}^s \alpha_{2q}^s \mathfrak{K}^s$$

durch Integrale

$$(c.) \qquad \sqrt{a_{2q} \cdot \frac{2n+1}{4\pi}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} D_{2p} C_{2q} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = b_{p,q}$$

ausgedrückt, und dann sind die α bekanntlich die Coefficienten *der* orthogonalen Substitution, durch welche

$$\sum_0^\sigma b_{p,q} x_p x_q$$

in

$$\sum_0^\sigma \mathfrak{K}^s y^s y^s$$

übergeht (§. 7). Die einzige Schwierigkeit besteht also im Auffinden der b, und zunächst der D; ich zeige, dafs D_p linear durch C_p, C_{p-2} und C_{p+2} ausgedrückt, und dafs daher $b=0$ wird, wenn nicht $q=p$ oder $p\pm 1$, für diese Fälle aber eine einfache bekannte Gröfse ist.

Die Auffindung der einfachen Formel (3.) im §. 5 für ΔC machte bedeutende Rechnungen nöthig, und fast Alles, was in §. 1 bis §. 5 gesagt ist, wurde zur Ableitung dieser Formel entwickelt. Lassen sie mich einen Augenblick bei derselben verweilen! Sie erinnern sich, dafs *Jacobi* in einem Schreiben (Bd. 42 dieses Journals) mich über die Art belehrte, auf welche sich das von mir (Bd. 29) entwickelte Resultat durch elliptische Functionen verhältnifsmäfsig leicht erweisen liefse, dafs nämlich C_m ein Integral der von

Lamé aufgestellten partiellen Differentialgleichung nach μ und ν ist (bei *Lamé* Gl. 18). Ich selbst habe darauf durch directes Differentiiren nach μ und ν dieselbe Formel verificirt, war aber genöthigt, eine langwierige und äufserst lästige Rechnung durchzuführen. Aber weder ***Jacobis*** noch meine Rechnung zeigt, welchen Beitrag $\frac{d^2C}{d\varepsilon_1^2}$ und $\frac{d^2C}{d\varepsilon_2^2}$ einzeln liefern, um als Summe $n(n+1)(\nu^2-\mu^2)C$ zu geben. Die Formel (3.) belehrt darüber, indem die rechte Seite kein ν explicite enthält, sich also durch Vertauschung von μ mit ν nicht verändert.

Ich habe vergeblich versucht, (3.) a posteriori zu verificiren, indem ich den Integralausdruck für C_m oder auch den zweiten endlichen (§. 1) differentiirte. Da die Ableitung durchaus streng ist, so hatte eine Verification der Formel für mich zunächst nur den Werth, die Richtigkeit meiner Rechnung zu prüfen, ohne sie wiederholen zu müssen. Für specielle Werthe von n z. B. $n=2$, 4 hat die Prüfung keine Schwierigkeit, auch für jedes n und $\mu=c$, wo also $C_m=P_{n,m}\left(\frac{\nu}{b}\right)$ wird und man daher eine Formel für die Differentiation von $P_{n,m}$ erhält, wenn man eine willkürliche Gröfse c hinzunimmt, gelang sie vermittelst Anm. I und IV meiner Abhandlung (Bd. 26). Ein Beweis der Formel aus dem Integral hätte noch ein besonderes Interesse, da er vermuthlich Resultate für ein gebrochenes, positives oder negatives n, und für das Integral zwischen willkürlichen Grenzen liefern würde. So habe ich in meiner Inaugural-Dissertation §. 9 die Eigenschaften der $P_{n,m}$ aus dem Integrale

$$\int_0^{\pi}(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\cos m\varphi\, d\varphi$$

abgeleitet, und mir dabei zwar n ganz und positiv vorgestellt, die Betrachtungen bleiben im Wesentlichen aber noch in allen oben erwähnten allgemeineren Fällen gültig. Im 50$^{\text{sten}}$ Bande dieses Journals habe ich die Grundformel, aus der ***Jacobi*** Bd. 26 die ***Laplace***sche Entwickelung der Kugelfunctionen ableitet, durch eine Substitution bewiesen, die gleichfalls noch gilt, wenn n beliebig und ebenso die Grenzen der Integration willkürlich sind, und erst, wenn die Beschränkungen fortfallen, mit bekannten in gehörigen Zusammenhang tritt. So findet man aus ihr z. B. für $n=-\frac{1}{2}$, dafs

$$\int\frac{d\psi}{\sqrt{a+b\cos\psi}\sqrt{c+g\cos(\psi-\varphi)}}$$

sich in Integrale der Form

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{h+k\cos(\eta-\theta)}}$$

transformiren läfst.

Zum Schlusse der Arbeit im §. 8 habe ich noch die Kettenbrüche, auf welche ich geführt wurde, etwas genauer betrachtet. Von den speciellen Formeln, die für $x=1$ erhalten werden, gebe ich Ihnen einige Proben, nämlich für $n=5$ und $n=6$. Man findet

$$\cfrac{1}{z-15-\cfrac{105}{z-13-\cfrac{27}{z-7}}} = \frac{(z-2^2)(z-4^2)}{(z-1^2)(z-3^2)(z-5^2)},$$

$$\cfrac{1}{z-21-\cfrac{210}{z-19-\cfrac{\frac{135}{2}}{z-13-\cfrac{\frac{33}{2}}{z-3}}}} = \frac{(z-1^2)(z-3^2)(z-5^2)}{z(z-2^2)(z-4^2)(z-6^2)}.$$

Halle, September 1858.