VI. *Zur Theorie und Berechnung der Stromverzweigung in linearen Leitern;* *von S. Kalischer.*

Die Probleme der Stromverzweigung in linearen Leitern, lassen sich mittels der Kirchhoff'schen Sätze leicht und vollständig lösen. Allein wenn die Verzweigungen zahlreich sind und in allen oder vielen Zweigen electromotorische Kräfte wirken, so können die Rechnungen infolge der vielen Eliminationen, die man dann vorzunehmen hat, um die Stromstärke in einem Zweige zu bestimmen, unnötig zeitraubend sein. Es ist jedoch möglich, diese Bestimmung, wenigstens dann, wenn sämtliche Zweige in zwei Punkten zusammenstossen, auf viel einfachere und directere Weise auszuführen, ohne dass man nöthig hätte, eine einzige Gleichung aufzulösen, mit Hülfe eines weit länger als die Kirchhoff'schen Sätze bekannten Princip, dessen Analogon auch in anderen Gebieten der Physik eine grosse Rolle spielt, nämlich des Princip der *Superposition electrischer Ströme*. Dasselbe ist vor der Kenntniss der Kirchhoff'schen Sätze und auch nachher als ein selbstverständliches vielfach angewandt worden, scheint aber trotz seiner oft bequemen Anwendbarkeit seit Jahrzehnten nahezu vergessen zu sein.¹⁾ Die allgemeine Geltung dieses Princip für ein beliebiges Leittersystem von beliebiger Anordnung ist von Hrn. Du Bois-Reymond²⁾ vorausgesehen und von Hrn. v. Helmholtz³⁾ in aller Strenge bewiesen worden.

Hr. v. Helmholtz spricht das Princip folgendermaassen aus:

„Wenn in einem beliebigen Systeme von Leitern electromotorische Kräfte an verschiedenen Stellen vorkommen, so ist die

1) G. Wiedemann weist in seiner Lehre von der Electricität 1., p. 373 auf dieses Princip hin.

2) Du Bois-Reymond, Untersuchungen über thierische Electricität. 1. p. 647.

3) Helmholtz, Pogg. Ann. :89. p. 211. 1853. Wissenschaftl. Abhandlungen 1. p. 475.

electrische Spannung in jedem Punkte des durchströmten Systems gleich der algebraischen Summe derjenigen Spannungen, welche jede einzelne der electromotorischen Kräfte unabhängig von den anderen hervorbringen würde. Und ebenso sind die mit drei rechtwinkligen Axen parallelen Componenten der Stromintensität gleich der Summe der entsprechenden Componenten, welche den einzelnen Kräften zugehören.“

Für unseren Zweck kommt nur der zweite Theil dieses Satzes, welcher das eigentliche Princip der Superposition electrischer Ströme enthält, in Betracht. Bei einem linearen Leitersysteme gilt das Princip also unmittelbar für die Stromintensitäten.

Um zu zeigen, wie viel rascher sich die Bestimmung der Stromintensität in einem Zweige nach diesem Princip als mit Hülfe der Kirchhoff'schen Sätze ausführen lässt, wählen wir als Beispiel eine Combination nach dem Schema der Fig. 1, drei Zweige, in denen electromotorische Kräfte wirken, und

Fig. 1.

die durch einen Draht miteinander verbunden sind. Die Stromstärken i und die Widerstände w bezeichnen wir mit denselben Indices wie die electromotorische Kraft in dem entsprechenden Zweige, i und w selbst bezeichnen dieselben Grössen für den unverzweigten Leiter. Die Richtung der Ströme

sei willkürlich im Sinne der Pfeile angenommen. Wollen wir nun z. B. i_1 bestimmen, so können wir uns nach dem Princip der Superposition denken, dass der Reihe nach die electromotorischen Kräfte einzeln vorhanden sind, und wenn wir die Stromstärken in diesen Fällen mit i'_1, i''_1, i'''_1 bezeichnen, so muss sein $i_1 = i'_1 + i''_1 + i'''_1$. Gesetzt also, es wäre nur E_1 vorhanden, so ist

$$i'_1 = \frac{E_1}{w_1 + \frac{w w_2 w_3}{w w_2 + w w_3 + w_2 w_3}} = \frac{E_1 (w w_2 + w w_3 + w_2 w_3)}{w (w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3) + w_1 w_2 w_3}.$$

Nunmehr können wir uns der Reihe nach nur E_2 und E_3 existirend denken und für den Zweig 1 kommt alsdann die bekannte Formel zur Anwendung, welche für einen Zweig

gilt, in dem keine electromotorische Kraft wirkt. Man hat also sofort

$$i''_1 = -\frac{E_2 w w_3}{K}, \quad i'''_1 = \frac{E_3 w w_2}{K},$$

wenn wir mit K den für jeden Zweig und jede Stromcomponente geltenden Nenner

$$w(w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3) + w_1 w_2 w_3$$

bezeichnen, und demnach

$$i_1 = \frac{E_1(w w_2 + w w_3 + w_2 w_3) - E_2 w w_3 + E_3 w w_2}{K},$$

wie man mittels der Kirchhoff'schen Sätze findet.

Natürlich wird man in Wirklichkeit noch viel rascher zum Ziele gelangen, da, sobald man einmal die Formel kennt, der blossе Anblick der Figur die Stromstärke in jedem Zweige sofort hinschreiben gestattet; man erhält ohne Weiteres

$$i_2 = \frac{E_2(w w_1 + w w_3 + w_1 w_3) + E_3 w w_1 - E_1 w w_3}{K}$$

$$i_3 = \frac{E_3(w w_1 + w w_2 + w_1 w_2) + E_2 w w_1 + E_1 w w_2}{K},$$

und endlich für den unverzweigten Theil

$$i = \frac{E_1 w_2 w_3 + E_2 w_1 w_3 - E_3 w_1 w_2}{K}.$$

Das Princip der Superposition überhebt uns also der Mühe in Fällen, wie der vorliegende, Gleichungen aufzustellen und Rechnungen auszuführen, auf die es uns gar nicht ankommt, und die für das Resultat unnütz sind, und gestattet vielmehr die Stromstärke in jedem beliebigen Zweige ganz direct sofort hinschreiben. Die Zeitersparniss gegenüber der Anwendung der Kirchhoff'schen Sätze ist somit unter Umständen ausserordentlich gross.

Setzt man die gewöhnliche Form der Wheatstone'schen Brücke als bekannt voraus, so folgt aus dem Princip der Superposition ohne Weiteres die zuerst von Frölich¹⁾ durch eine einfache Rechnung mit Hülfe der Kirchhoff'schen Sätze

1) Frölich, Electrotechn. Zeitschrift 9. p. 483, 1886. Wied. Ann. 30. p. 156. 1887.

bewiesene allgemeinste Form der Wheatstone'schen Brücke, also der Satz, dass auch, wenn in allen Zweigen electromotorische Kräfte wirken, die bekannte Beziehung zwischen den Widerständen der Seitenzweige bestehen bleibt, vorausgesetzt, dass der Strom in dem einen Diagonalzweige, der Brücke, beim Oeffnen und Schliessen des anderen Diagonalzweiges ungeändert bleibt. Denn es sei (Fig. 2), während in allen Zweigen constante electromotorische Kräfte wirken, die Beziehung $w_1 w_3 = w_2 w_4$ herstellt. Um die Stromstärke in der Brücke zu bestimmen, können wir uns wieder alle electromotorischen

Fig. 2.

Kräfte ausser der in dem anderen Diagonalzweige fortdenken. Dann haben wir die Bedingungen der gewöhnlichen Wheatstone'schen Brücke hergestellt, und wir wissen, dass der Strom in der Brücke in diesem Falle Null und unabhängig von dem Widerstande in dem Diagonalzweige ist. Nach dem Princip der Superposition kann aber durch die Einführung von electromotorischen Kräften in die anderen Zweige nichts anderes bewirkt werden, als dass die Stromintensitäten geändert und die Stromintensität in jedem Zweige gleich der algebraischen Summe der Stromintensitäten wird, welche jede electromotorische Kraft für sich hervorbringen würde, und dass somit der Strom in der Brücke von Null auf einen bestimmten Betrag gebracht wird; *der Beitrag des Stromes in dem Diagonalzweige zu dem Strom in der Brücke muss Null bleiben.* Es folgt also, dass wenn die Beziehung $w_1 w_3 = w_2 w_4$ bestehen bleibt, der Strom in der Brücke beim Oeffnen und Schliessen des Diagonalzweiges ungeändert bleibt und hiermit umgekehrt der zu beweisende Satz. In diesem Falle kann man auch, wenn E die electromotorische Kraft und w den Widerstand in der Brücke bedeutet, die Stromstärke in derselben sofort hinschreiben; es ist

$$i = \frac{E(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) - (E_1 + E_4)(w_2 + w_3) + (E_2 + E_3)(w_1 + w_4)}{w(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + (w_1 + w_4)(w_2 + w_3)}$$

Das Princip der Superposition gestattet ferner eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung auch dann, wenn die Strom-

stärke in einem Zweige mit Selbstinduction bestimmt werden soll. Um dies zu zeigen, nehmen wir den bekannten von Herrn v. Helmholtz behandelten Fall, wo in einem Kreise mit Selbstinduction ein Nebenschluss vorhanden ist und durch Schliessen der Batterie ein Inductionsstrom entsteht (Fig. 3). Die gegenseitige Induction der Zweige sei zu vernachlässigen. Um die Stromstärke i zu bestimmen, können wir uns denken, dass zunächst nur die electromotorische Kraft der Selbstinduction vorhanden sei; nennen wir dann den Strom i' , so wäre, wenn L der Selbstinductionscoefficient ist,

Fig. 3.

$$i' = - \frac{L \frac{di'}{dt}}{w + \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}} = - \frac{L (w_1 + w_2) \frac{di'}{dt}}{w w_1 + w w_2 + w_1 w_2}.$$

Hieraus folgt sofort

$$i' = C e^{-\frac{\Re t}{L (w_1 + w_2)}},$$

wo C die Integrationsconstante und $\Re = w w_1 + w w_2 + w_1 w_2$ ist. Wäre nur die electromotorische Kraft E vorhanden, so wäre der Strom in dem Zweige, $i'' = (E w_1) / \Re$, folglich ist

$$i = \frac{E w_1}{\Re} + C e^{-\frac{\Re t}{L (w_1 + w_2)}}.$$

C bestimmt sich aus der Bedingung, dass $i = 0$ für $t = 0$, also $C = - (E w_1) / \Re$ und

$$i = \frac{E w_1}{\Re} \left\{ 1 - e^{-\frac{\Re t}{L (w_1 + w_2)}} \right\}$$

Es könnte auf den ersten Blick auffällig erscheinen, dass in der Gleichung für i' auf der rechten Seite di'/dt und nicht di/dt in die Rechnung eingeführt ist, da doch die electromotorische Kraft der Selbstinduction von der Aenderung des Gesamtstromes (i) bedingt scheint. Allein da $i = i' + i''$ und $i'' = \text{const.}$, so ist $di/dt = di'/dt$, und gerade hierin liegt eine weitere Vereinfachung der Rechnung.

Selbstverständlich ist das Princip der Superposition auch anwendbar, wenn in dem Zweige noch magnetomotorische Kräfte wirken, also beispielsweise die Spirale einen Eisenkern

enthält. Auch in diesem Falle ergibt sich die Stromintensität durch eine algebraische Summirung, wie übrigens aus den bekannten Formeln unmittelbar herauszulesen ist.

Es braucht endlich kaum bemerkt zu werden, dass das Princip der Superposition auch zur Geltung kommt bei den electrischen Schwingungen, sowie bei der besonderen Form miteinander verketteter Wechselströme, welche unter dem Namen Drehstrom in neuester Zeit für die electrische Kraftübertragung eine so grosse Bedeutung gewonnen haben.

Nach alledem dürfte es nicht ganz unnütz sein, die Aufmerksamkeit auf dieses alte Princip zu lenken, da es merkwürdigerweise durch die Kirchhoff'schen Sätze auch dort verdrängt worden ist, wo es, wie wir gesehen haben, weit rascher zum Ziele führt als die für viele Fälle ja unentbehrlichen Sätze von Kirchhoff.

Berlin, im Januar 1892.