IV. Vorschriften zur Construction von Galvanoskopen, welche das Maximum der Empfindlichkeit besitzen;
von Heinrich Weber in Braunschweig.

In den Schriften der königl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 10 sind Vorschriften zur Construction von Galvanoskopen mit kreisförmigen Multiplicatoren entwickelt worden und ebendasselbst auch der Fall, wo der Multiplicator eine gestreckte, die Nadel mehr umschliessende Form besitzt, berührt worden. Da gerade die letztere Form der Galvanoskope bei physikalischen Untersuchungen mehr in Anwendung gekommen ist, als die erstere, so schien es mir der Mühe nicht unwerth zu seyn, die Bedingungen, von denen das Maximum der Empfindlichkeit abhängig ist, auch für die zweite Form von Galvanoskopen aufzusuchen. Da ich in der Lage war ein solches Galvanoskop in letzter Zeit zu construiren und die hierfür entwickelte theoretische Unterlage auch bei Construction anderer Galvanoskope von ähnlicher Form in Anwendung kommen kann, so werde ich mir erlauben im Folgenden die Begründung für die Regeln zur Construction empfindlicher Galvanoskope mit gestrecktem Multiplicator hier kurz mitzutheilen.

Unter Empfindlichkeit eines Galvanoskopes versteht man das Verhältniß des Drehungsmomentes, welches die Stromeinheit im Multiplicator auf die im magnetischen Meridian liegende Nadel ausübt zu dem Trägheitsmomente der Nadel, wenn es sich um Beobachtung des *Nadelausschlages nach einem ertheilten Stosse* handelt oder zu der Directions-kraft der Nadel, wenn es sich um Beobachtung einer *beharrlichen Ablenkung* handelt. Es ergiebt sich hieraus zunächst für den ersten Fall, daß je kleiner das Trägheitsmoment d. h. je geringer die Länge des Magneten ist, um so größer die Empfindlichkeit des Instrumentes seyn müsse. Denn obwohl mit der Verkleinerung der Länge des Mag-

neten auch dessen magnetisches Moment abnimmt und mit ihm das Drehungsmoment, welches dem magnetischen Moment proportional ist, so folgt das oben Gesagte dennoch, wenn man beachtet, daß das Trägheitsmoment bei *ähnlich gestalteten* Nadeln der fünften Potenz der Länge proportional, das magnetische Moment der dritten Potenz der Länge proportional wächst oder abnimmt. Im zweiten Falle ist sowohl das Drehungsmoment als auch die durch den Erdmagnetismus auf die Nadel ausgeübte Directionskraft proportional mit dem magnetischen Moment der Nadel, der Quotient ist demnach unabhängig von diesem. Das Drehungsmoment ist aber auch abhängig von der Form der die Nadel umgebenden Windungen und wenn diese entsprechend mit den Dimensionen der Nadel verändert werden, so ergibt sich für die hier behandelte Form der Windungen, daß das Drehungsmoment umgekehrt proportional mit der Quadratwurzel aus der Länge des Magneten ist. Folglich nimmt auch im zweiten Falle die Empfindlichkeit mit abnehmender Länge des Magneten zu.

Die Länge wird daher so klein genommen werden müssen, als es die übrigen Umstände erlauben. Z. B. die Bewegungen der Luft, die für die Beobachtung erforderliche oder bequeme Gröfse der Schwingungsdauer der Nadel, wie auch die Gröfse der Dämpfung, wo dieselbe für die Beobachtungen wichtig ist. Es muß demnach die Wahl der Länge der Nadel dem einzelnen Experimentator überlassen bleiben, da dieselbe nach der Art der Beobachtungen, welche mit dem Galvanoskope angestellt werden sollen, zweckmäfsig länger oder kürzer seyn kann. Im Allgemeinen jedoch muß die Regel gelten, den Magnet seiner Länge nach so klein zu nehmen, als es ohne Einbufse an Sicherheit geschehen kann.

Unsere Aufgabe kommt demnach auf folgende zurück einen Multiplikator für eine Nadel von gegebener Länge zu construiren, dessen Drehungsmoment, wenn ihn die Stromeinheit durchfließt und die Nadel sich im magnetischen Meridian befindet, ein Maximum wird. Es ist zu die-

sem Zwecke die Frage zu erörtern: 1) welche Form hat man dem Multiplicator zu geben, 2) wie lang ist der Galvanometerdraht zu nehmen und 3) welchen Querschnitt hat man in Anwendung zu bringen.

Unter den verschiedenen Formen, welche dem Multiplicator gegeben werden können, werde ich diejenige im Folgenden zu Grunde legen, welche bereits in der erwähnten Abhandlung betrachtet worden ist und welche sich praktisch am leichtesten realisiren läßt. Der Multiplicator bestehe (Fig. 1 Taf. IV) aus einer Reihe von Umwindungen nebeneinander und übereinander, welche in Verticalebenen liegen, die unter sich und mit der durch die Nadelaxe gelegten Verticalebene parallel sind. Jede dieser Windungen bestehe aus zwei mit der Nadelaxe parallelen Stücken AB und $A'B'$ (Fig. 2) oberhalb und unterhalb der Nadel, deren Länge dem Abstände der Pole M und N der Nadel gleich kommt, wenn man unter Polen diejenigen Punkte versteht, in denen für die Wirkung des Multiplicators auf die im Meridiane befindliche Nadel Nord- und Süd-Magnetismus concentrirt gedacht werden dürfen. Endlich bilde die Fortsetzung der Windung von A nach A' und von B nach B' zwei Halbkreise, welche von beiden Polen aus beschrieben werden, wobei wir annehmen, daß die betrachtete Windung in der durch die Nadelaxe gelegten Verticalebene liege.

Legt man eine zur Nadelaxe senkrechte Ebene durch den Multiplicator, so soll auf derselben der Querschnitt der Drahtwindungen zwei Rechtecke bilden, in deren Mitte die Nadel frei schwebt. Die Form des Multiplicators ist unter diesen Verhältnissen völlig bestimmt, wenn die Höhe $CG = C'G' = h$ (Fig. 3 Taf. IV) und die Breite $CD = C'D' = 2h'$ gegeben sind. Letztere finden sich aber aus der Bedingung, daß das Drehungsmoment des ganzen Multiplicators ein Maximum seyn soll.

Das Maximum hängt aber nicht allein ab von der Gestalt des Multiplicators, sondern auch von der Länge und dem Querschnitte des Drahtes, welcher die Windungen des-

selben bilden d. h. von dem Widerstande der Drahtwindungen. Nach einer bekannten Regel muß, wenn Empfindlichkeit einziger Zweck ist, der nicht durch andere Zwecke des zu messenden Stromes beschränkt wird, der Widerstand des Multiplicators gleich dem Widerstande seyn, welche die übrige mit dem Multiplicator in Verbindung stehende Kette besitzt. Aus dieser letzteren Bedingung ergeben sich die Länge und der Querschnitt des Drahtes, der bei der Construction des Multiplicators zu verwenden ist.

Wir betrachten zunächst das Drehungsmoment einer einzigen Windung. Der Mittelpunkt der Nadel sey der Anfangspunkt eines Coordinatensystemes, dessen X -Axe mit der Nadelaxe zusammenfällt, dessen Y -Axe senkrecht zur X -Axe und in der durch die Nadelaxe horizontal gelegten Ebene liegt und dessen Z -Axe endlich in die durch die Nadelaxe gelegten Verticalebene fällt. Ferner werde Fig. 4 Taf. IV der Abstand $MC = MD$ der Verticalebene, in welcher sich die betrachtete Windung befindet von der XZ -Ebene durch y , der Abstand der beiden parallelen Drahtstücken AB und $A'B'$ von einander durch $2z$ und endlich der Abstand der beiden Pole M und N von einander durch R bezeichnet, dann ist, wenn wir uns in den Polpunkten M und N die magnetischen Massen $+\mu$ und $-\mu$ concentrirt denken, die Summe der Drehungsmomente, welche der Halbkreis AA' auf M , BB' auf N ausübt

$$\pi \mu R \frac{z^2}{[y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

wenn die Stromintensität gleich eins genommen wird. Ferner wird unter derselben Voraussetzung das Drehungsmoment der beiden Stücken AB und $A'B'$ durch ihre Wirkungen auf M und N

$$2\mu R^2 \frac{z}{(y^2 + z^2) \sqrt{R^2 + y^2 + z^2}}$$

Endlich ist die Summe der Drehungsmomente, welche der Halbkreis AA' durch seine Wirkung auf N und der Halbkreis BB' durch seine Wirkung auf M hervorbringt

$$2\mu Rz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(z + R \cos \varphi) d\varphi}{[R^2 + y^2 + z^2 + 2Rz \cos \varphi]^{\frac{3}{2}}}$$

wobei φ den Winkel bedeutet, den irgend ein von C oder D nach der Peripherie des zunächst liegenden Halbkreises gezogener Radius mit der Verlängerung von CD macht.

Wir erhalten demnach für das Drehungsmoment, welches die ganze Windung auf den Magnet hervorbringt, indem wir $R\mu = m$ gleich dem magnetischen Moment der Nadel setzen

$$\pi m \frac{z^2}{[y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + 2mR \frac{z}{(y^2 + z^2) \sqrt{R^2 + y^2 + z^2}} + 2mz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(z + R \cos \varphi) d\varphi}{[R^2 + y^2 + z^2 + 2Rz \cos \varphi]^{\frac{3}{2}}} \dots (1).$$

Es bestehe nun eine Vertikalschicht aus ν übereinander in unmittelbarer Berührung sich befindenden Drähten von, gleichem Querschnitt. Ist Δz der Durchmesser des Drahtes $2a$ der senkrechte Abstand der beiden parallelen Stücke AB und $A'B'$ der untersten Windung von einander, so erhält man das Drehungsmoment der ganzen Vertikalschicht in dem Abstände y von dem Mittelpunkte der Nadel, wenn man der Reihe nach in (1) an Stelle von z $a + \frac{\Delta z}{2}$, $a + \frac{\Delta z}{2} + \Delta z$, $a + \frac{\Delta z}{2} + 2\Delta z$, $a + \frac{\Delta z}{2} + (\nu - 1)\Delta z$ setzt und die Summe bildet, wobei wir voraussetzen, daß der Strom als in der Axe des Drahtes fließend angenommen werden dürfe.

Bezeichnet man der Kürze halber das Drehungsmoment (1) insofern es eine Funktion von z ist durch $f(z)$, so wird das Drehungsmoment einer Vertikalschicht

$$f\left(a + \frac{\Delta z}{2}\right) + f\left(a + \frac{\Delta z}{2} + \Delta z\right) + f\left(a + \frac{\Delta z}{2} + 2\Delta z\right) + \dots + f\left(a + \frac{\Delta z}{2} + (\nu - 1)\Delta z\right).$$

Nach Euler ist aber

$$\begin{aligned} & \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha + \Delta x) + \varphi(\alpha + 2\Delta x) + \dots + \varphi[\alpha + (n-1)\Delta x] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+\lambda} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} [\varphi(\alpha + \lambda) - \varphi(\alpha)] \Delta x \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12} [\varphi'(\alpha + \lambda) - \varphi'(\alpha)] \Delta x^2 \dots \dots \right\} \end{aligned}$$

wobei $\lambda = n\Delta x$ ist. Wendet man diesen Satz auf obige Reihe an, so folgt da $n\Delta z = h$ ist als Werth jener Reihe

$$\frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha + \frac{\Delta z}{2}}^{\alpha + \frac{\Delta z}{2} + h} f(z) dz$$

wenn man die Glieder, welche mit $\Delta z \Delta z^2 \dots$ multiplicirt sind, wegläßt, was geschehen darf unter der Voraussetzung, daß der Durchmesser Δz des Drahtes nur sehr klein sey gegen die Höhe der Schicht h . Unter der nämlichen Voraussetzung geht obiges Integral in das Folgende über

$$\frac{1}{\Delta z} \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(z) dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Durch eine ähnliche Betrachtung kann man nun leicht die Summe der Drehungsmomente sämtlicher Vertikalschichten bilden. Es ist nämlich $f(z)$ auch eine Funktion des Abstandes y der betrachteten Vertikalschicht von dem Mittelpunkte der Nadel also ist für $f(z)$ $f(z, y)$ zu setzen. Bedeutet entsprechend wie vorher Δy den Abstand der Axen zweier nebeneinander liegender Drähte, so erhält man das Drehungsmoment des ganzen Multipliers, indem man in $f(z, y)$ der Reihe nach für y die Werthe einsetzt, welche den einzelnen Vertikalschichten zukommen und sämtliche so erhaltene Ausdrücke addirt. Unter der Voraussetzung, daß die Dicke der Drähte $\Delta y = \Delta z$ gegen die Dimensionen des Multipliers klein ist, erhält man für das Drehungsmoment D des ganzen Multipliers

$$D = \frac{1}{\Delta y} \int_{-h'}^{h'} dy \frac{1}{\Delta z} \int_a^{a+h} f(z, y) dz = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} f(z, y) dz \quad (3)$$

wobei $f(z, y)$ das Drehungsmoment (1) einer Windung bezeichnet.

Um das Drehungsmoment D des ganzen Multiplicators in seiner Abhängigkeit von h und h' explicite darzustellen, bleibt noch übrig Δy und Δz als Funktionen von h und h' auszudrücken.

Bezeichnet man zu dem Zwecke mit q den Querschnitt des von der Ueberspinnung freien Metalldrahtes, mit $Q = (1 + \gamma)q$ den Querschnitt des übersponnenen Drahtes, also mit γq die Fläche, um welche der Querschnitt des Drahtes in Folge der Ueberspinnung zunimmt, mit l die Länge des aufgewundenen Drahtes, so wird, wenn n die Anzahl in einer Horizontalschicht sich befindenden Drähte bedeutet

$$l = \frac{n}{\Delta z} \int_a^{a+h} (2R + 2\pi r) dr + \frac{hn}{\Delta z} [2R + \pi(2a + h)]$$

oder weil $n \Delta y = 2h'$ ist

$$l = \frac{2hh'}{\Delta y \Delta z} [2R + \pi(2a + h)]$$

Hieraus findet sich für den Querschnitt q des Drahtes, wenn W den Widerstand des ganzen Multiplicatordrahtes, k den specifischen Widerstand bezeichnet, nach Ohm

$$q = \frac{k}{W} l$$

Es ist aber

$$\Delta y \Delta z = \frac{4}{\pi} Q = \frac{4}{\pi} \frac{(1+\gamma)k}{W} l$$

also

$$\frac{1}{\Delta y \Delta z} = \frac{\pi}{4} \frac{W}{(1+\gamma)k} \cdot \frac{1}{l}.$$

Hierin bezeichnet γ eine sehr kleine Gröfse, welche in den meisten Fällen gleich null gesetzt werden darf, insofern durch die Ueberspinnung der Querschnitt des Drahtes nur um

einen sehr kleinen Bruchtheil vergrößert wird. Will man jedoch die Vergrößerung des Querschnittes durch die Ueberspinnung nicht vernachlässigen, so kann man näherungsweise γ für Drähte von verschiedener Dicke wie eine constante Gröfse ansehen und $(1 + \gamma)k = k'$ setzen, wo dann k' der *scheinbare spezifische Widerstand* des Drahtes genannt werden kann. In dem Folgenden jedoch soll die Ueberspinnung so fein angenommen werden, dafs γ gegen 1 vernachlässigt werden darf.¹⁾ Unter dieser Annahme ergibt sich, wenn man für l seinen Werth setzt

$$\frac{1}{Ay \, dz} = \frac{1}{\sqrt{hh'[2R + \pi(2a + h)]}} \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{W}{k}} \quad . \quad . \quad (4)$$

und folglich

$$l = \sqrt{hh'[2R + \pi(2a + h)]} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{W}{k}} \quad . \quad . \quad (5)$$

$$q = \sqrt{hh'[2R + \pi(2a + h)]} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{k}{W}} \quad . \quad . \quad (6)$$

Demnach folgt für das Drehungsmoment des ganzen Multipliers aus (3)

$$D = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{W}{k}} \cdot \frac{A}{\sqrt{hh'[2R + \pi(2a + h)]}} \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn

- 1) Bezeichnet $r + \delta$ den Radius des Querschnittes Q , r den Radius des Querschnittes q , δ also die Dicke der Umspinnung, so ist

$$\gamma = 2\sqrt{\frac{\pi}{q}} \cdot \delta + \frac{\pi}{q} \cdot \delta^2.$$

Um die Dicke der Ueberspinnung δ zu berücksichtigen, hat man zunächst den Werth von q bei Vernachlässigung von γ aus dem am Schlusse (Formel 16) für q gegebenen Ausdruck zu bestimmen, diesen Werth in den Ausdruck für γ einzusetzen, woraus sich dann für eine gegebene Dicke δ der Ueberspinnung der Werth von γ ergibt. Setzt man dann $k' = (1 + \gamma)k$ an die Stelle von k , so erhält man die Dimensionen des Multipliers mit Rücksicht auf die Umspinnung.

$$\begin{aligned}
A = \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} f(y, z) dz = m \left[\pi \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} \frac{z^2 dz}{[y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right. \\
+ 2R \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} \frac{z dz}{(y^2 + z^2) \sqrt{R^2 + y^2 + z^2}} \\
\left. + 2 \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} z dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(z + R \cos \varphi) d\varphi}{[R^2 + y^2 + z^2 + 2Rz \cos \varphi]^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (8)
\end{aligned}$$

gesetzt wird.

Um zu untersuchen, für welche Werthe h und h' das Drehungsmoment ein Maximum wird und nur ein solches kann nach der Natur der Aufgabe eintreten, brauchen wir nur den Ausdruck (7) nach h und h' zu differenziren und jedes Differenzial für sich gleich null zu setzen.

Dies gibt offenbar die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A - 2h' \frac{\partial A}{\partial h'} &= 0 \\ A - \frac{h[2R + \pi(2a + h)]}{R + \pi(a + h)} \frac{\partial A}{\partial h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \quad (9)$$

aus denen h und h' zu bestimmen sind, sobald über R und a bestimmte Annahmen gemacht worden sind.

Ehe wir die Werthe von A , $\frac{\partial A}{\partial h}$, $\frac{\partial A}{\partial h'}$ entwickeln, betrachten wir zuerst das letzte Integral in dem Ausdrucke (8), welches ein elliptisches Integral erster Gattung ist und sich leicht auf die Normalform bringen läßt. Man hat nämlich bei Vertauschung der Integrationsordnung

$$\begin{aligned}
& \int_a^{a+h} z dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(z + R \cos \varphi) d\varphi}{[R^2 + y^2 + z^2 + 2Rz \cos \varphi]^{\frac{3}{2}}} \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^{a+h} dz z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + y^2 + z^2 + 2Rz \cos \varphi}} \right).
\end{aligned}$$

Führt man hierin die angedeutete Integration nach z partiell aus, setzt dann $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ und führt $\frac{\varphi}{2} = \psi$ als neue Variable ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2(a+h)}{V(R+a+h)^2+y^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{V1 - \frac{4R(a+h)}{(R+a+h)^2+y^2} \sin^2 \psi} \\
 & + \frac{2a}{V(R+a)^2+y^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{V1 - \frac{4Ra}{(R+a)^2+y^2} \sin^2 \psi} \\
 & + 2 \int_a^{a+h} \frac{dz}{V(R+z)^2+y^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{V1 - \frac{4Rz}{(R+z)^2+y^2} \sin^2 \psi}.
 \end{aligned}$$

Unter Annahme der Legendre'schen Bezeichnung ergibt sich hiernach für das dritte Glied des Ausdruckes (8)

$$\begin{aligned}
 & - 4m \int_{-h'}^{h'} \frac{(a+h)dy}{V(R+a+h)^2+y^2} F\left(k', \frac{\pi}{4}\right) \\
 & + 4m \int_{-h'}^{h'} \frac{ady}{V(R+a)^2+y^2} F\left(k'', \frac{\pi}{4}\right) \\
 & + 4m \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} \frac{dz}{V(R+z)^2+y^2} F\left(k''', \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

wo

$$k'^2 = \frac{4R(a+h)}{(R+a+h)^2+y^2}, \quad k''^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2+y^2}, \quad k'''^2 = \frac{4Rz}{(R+z)^2+y^2}$$

die Module der elliptischen Integrale bedeuten. Entwickelt man $F\left(k, \frac{\pi}{4}\right)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen des Moduls k , so findet sich

$$\begin{aligned}
F\left(k, \frac{\pi}{4}\right) = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1^3}{2^2} k^2 \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 \left[\frac{\pi}{2} - \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right] \right. \\
& + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 \left[\frac{\pi}{2} - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} \right) \right] \\
& \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} k^8 \left[\frac{\pi}{2} - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right) \right] + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Diese Reihe convergirt für jedes $k \leq 1$ und zwar um so rascher als auch der in Klammer stehende Factor vor den Potenzen k sich immer fort der Null nähert, da bekanntlich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

ist. Beschränkt man sich bei dieser Reihenentwicklung auf die beiden ersten Glieder, so erhält man für Δ

$$\begin{aligned}
\Delta = m \left[\pi \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} \frac{z^2 dz}{[y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + 2R \int_{-h'}^{h'} dy \int_a^{a+h} \frac{z dz}{(y^2 + z^2) \sqrt{R^2 + y^2 + z^2}} \right. \\
- \int_{-h'}^{h'} dy \frac{(a+h) \left[\pi + (\pi-2) \frac{k'^2}{4} \right]}{\sqrt{(R+a+h)^2 + y^2}} + \int_{-h'}^{h'} dy \frac{a \left[\pi + (\pi-2) \frac{k''^2}{4} \right]}{\sqrt{(R+a)^2 + y^2}} \\
\left. + \int_{-h'}^h dy \int_a^{a+h} dz \frac{\pi + (\pi-2) \frac{k'''^2}{4}}{\sqrt{(R+z)^2 + y^2}} \right] \dots \dots \dots (10)
\end{aligned}$$

Führt man die angedeuteten Integrationen aus und drückt ausserdem h , h' und a in Theilen des Abstandes der Pole R aus, setzt also

$$h = \lambda R \quad h' = \lambda' R \quad a = \varepsilon R \quad . \quad (11)$$

so ergibt sich, indem wir noch folgende Abkürzungen einführen

$$\begin{aligned}
A &= n \lg \left\{ \frac{(V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2+1+\varepsilon+\lambda)(V(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2+\varepsilon+\lambda)}{(V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2+1+\varepsilon)(V\varepsilon^2+\lambda'^2+\varepsilon)} \right\} + \lg \left\{ \frac{(V(1+(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2-1)(V(1+\varepsilon^2+\lambda'^2+1))}{(V(1+(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2+1)(V(1+\varepsilon^2+\lambda'^2-1))} \right\} \\
B &= \lg \left\{ \frac{(V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2+\lambda')(V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2-\lambda')(V(1+\varepsilon^2+\lambda'^2+\lambda'))}{(V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2-\lambda')(V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2+\lambda)(V(1+\varepsilon^2+\lambda'^2-\lambda))} \right\} \\
C &= -\frac{(\varepsilon+\lambda)^2\lambda'}{(1+\varepsilon+\lambda)^2V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + \frac{\varepsilon^2\lambda'}{(1+\varepsilon)^2V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2} - \frac{V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2}{\lambda'(1+\varepsilon+\lambda)} \\
D &= (\varepsilon+\lambda) \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda'}{(\varepsilon+\lambda)V(1+(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2)} \right) - \varepsilon \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda'}{\varepsilon V(1+\varepsilon^2+\lambda'^2)} \right) \\
E &= -\frac{\varepsilon+\lambda}{V(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + \frac{\varepsilon}{V\varepsilon^2+\lambda'^2} - \frac{\varepsilon+\lambda}{V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + \frac{\varepsilon}{V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2} \\
F &= -\frac{(\varepsilon+\lambda)^2}{[(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varepsilon^2}{[(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1+\varepsilon+\lambda}{\lambda'^2V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + \frac{1+\varepsilon}{\lambda'^2V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2} \\
&\quad - \frac{1}{V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + \frac{1}{V(1+\varepsilon)^2+\lambda'^2} \\
G &= \frac{\pi\lambda'}{V(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + \frac{\pi(\varepsilon+\lambda)\lambda'}{(1+\varepsilon+\lambda)V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} - \frac{\pi(\pi-2)(\varepsilon+\lambda)\lambda'}{(1+\varepsilon+\lambda)^2V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} \\
&\quad + \frac{2(\pi-2)(\varepsilon+\lambda)^2\lambda'}{(1+\varepsilon+\lambda)^3V(1+\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2} + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda'}{(\varepsilon+\lambda)V(1+(\varepsilon+\lambda)^2+\lambda'^2)} \right)
\end{aligned}$$

wobei die Logarithmen natürliche Logarithmen bezeichnen

$$\left. \begin{aligned} A &= 2mR[\lambda' A + B + (\pi - 2)C + 2D] \\ \frac{\partial A}{\partial h'} &= \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \lambda'} = 2m[A + \pi E + (\pi - 2)F] \\ \frac{\partial A}{\partial h} &= \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \lambda} = 2mG \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

Die Bedingungsgleichungen (9) werden jetzt

$$\left. \begin{aligned} -\lambda' A + B + (\pi - 2)C + 2D - 2\pi \lambda' E - 2(\pi - 2)\lambda' F &= 0 \\ \lambda' A + B + (\pi - 2)C + 2D - \frac{\lambda[2 + \pi(2\varepsilon + \lambda)]}{1 + \pi(\varepsilon + \lambda)} G &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

woraus λ und λ' gefunden werden können, wenn über ε eine bestimmte Annahme gemacht worden ist.

Ich werde nun in Folgenden annehmen, daß näherungsweise der Abstand α der Pole von den ihnen zunächst liegenden Enden eines Magneten gleich $\frac{1}{12}$ seiner Länge sey, d. h. also daß

$$\alpha = \frac{1}{12}(2\alpha + R)$$

sey, woraus sich ergibt

$$\alpha = \frac{1}{10}R.$$

Der Abstand a der ersten horizontalen Windungsschicht von dem Pole soll, damit hinreichend Platz für die Suspension übrig bleibt

$$a = \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{20}R$$

angenommen werden. Nach (11) ist daher bei diesen Annahmen

$$\varepsilon = \frac{3}{20} = 0,15$$

und man findet aus den Gleichungen (13) mit zu Grundelegung dieses Werthes

$$\lambda = 0,61922 \quad \lambda' = 0,45324 \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Durch diese beiden Werthe sind sämtliche Verhältnisse des zu construierenden Galvanometers gegeben. Bezeichnet nämlich L die Länge des Magneten, welcher bei der Construction verwendet werden soll und dessen Gröfse dem freien Ermessen, je nach den Anwendungen, welche mit dem Galvanometer gemacht werden sollen, überlassen bleibt, so hat man

$$L = R + 2\alpha = \frac{6}{5}R \text{ also } R = \frac{5}{6}L.$$

Drücken wir alle Größen durch die Länge L des Magneten aus, so ergibt sich nach (11)

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{3}{20}R = \frac{1}{8}L \\ h &= 0,51602 \cdot L \\ h' &= 0,37770 \cdot L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

Ferner folgt aus (11), (5) und (6) für die Länge l und den Querschnitt q des anzuwendenden, von der Umspinnung freien Drahtes

$$\left. \begin{aligned} l &= 1,1167 L^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{W}{k}} \\ q &= 1,1167 L^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{k}{W}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16).$$

Endlich ergibt sich aus (7) für das Drehungsmoment des ganzen Multipliers auf die im magnetischen Meridian befindliche Nadel, und für das Gewicht P des ganzen Drahtes, wenn d das spezifische Gewicht des Metalles, aus dem der Draht besteht, bezeichnet

$$\left. \begin{aligned} D &= 2,8884 \frac{m}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{W}{k}} \\ P &= l q d = 1,2470 \cdot d L^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

wobei P in Grammen gefunden wird, wenn L in Centimetern ausgedrückt ist.

Durch die Beziehungen (15), 16) und (17) sind alle Größen, die bei Construction eines Galvanometers in Betracht kommen, bestimmt, sobald über die Länge L der Magnetnadel, über den Widerstand W , welchen das Galvanometer besitzen soll und endlich über das Metall, aus dem der Galvanometerdraht bestehen soll, d. h. über den spezifischen Widerstand k und über das spezifische Gewicht d eine Entscheidung getroffen worden ist. Zugleich ergibt sich, daß sofern einmal die Länge der Nadel festgesetzt ist, die Dimensionen des Galvanometers, nämlich die Öffnung $GC' = 2a$ (Fig. 3 Taf. IV), die Höhe der Windungen $CG = h$, die Breite der Windungen $GF = 2h'$ und

das Gewicht P des Galvanometerdrahtes völlig bestimmt und unabhängig sind, von dem Widerstande W und dem specifischen Widerstande k des Drahtes.

Für physikalische Laboratorien würde es sich daher empfehlen für ein und dieselbe Nadel einen ganzen Satz von Multiplicatoren aus Drähten von verschiedenem Querschnitte zu construiren, welche, da sie denselben Raum einnehmen, auf Rahmen von gleicher Gröfse sich aufwickeln lassen, aber in Folge der verschiedenen Querschnitte verschiedene Widerstände darbieten, und hiermit würde sich das Princip der doppelten Wickelung in Verbindung bringen lassen. Die Suspension der Nadel geschieht am einfachsten durch einen hackenförmigen Halter, wie ihn Fig. 5 Taf. IV darstellt, in dessen beiden Y der Magnet eingelegt wird. Aluminiumblech eignet sich am besten zur Herstellung desselben. Handelt es sich darum ein Galvanometer mit astatischem Nadelpaare zu construiren, so genügt es an demselben Halter oberhalb der Windungen ein zweites Paar von Y anzubringen und in dasselbe einen zweiten Magnet, dem unteren parallel und mit entgegengesetzten Polen einzulegen.

Für viele Fälle ist es ferner zweckmäfsig, die die Nadel umgebende Wand des Galvanometerrahmens aus Kupferblech herzustellen, da man hierdurch einerseits eine Dämpfung der Nadelschwingungen erreicht, andererseits aber eine Raumersparnifs eintritt. Damit endlich die Nadel mit Sicherheit ohne Anstofs in der Oeffnung des Galvanometers schwingen könne, kann man die Enden der Nadel halbkugelförmig abrunden lassen.

Um die Anwendung der obigen Formeln zu zeigen, möge die kleine Tafel den Schlufs bilden. Dieselbe gilt nur bei Anwendung von Kupferdraht, dessen specifischer Widerstand $k = 219274 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$ genommen wurde, wobei das Millimeter und das Quadratmillimeter das Längen- und Flächenmaafs bilden und dessen specifisches Gewicht $d = 8,623$ gesetzt wurde.

Widerstand W des Drahtes	Länge L der Nadel	Breite $2a$ der Öffnung	Höhe h der verticalen Schicht	Breite $2h'$ der Windungen	Länge l des Drahtes	Querschnitt q des Drahtes	Gewicht P des von der Um- spinnung freien Drahtes
$\frac{1}{2}$ B. A. U.	mm 50	mm 12,5	mm 25,8	mm 37,8	m 59,62	□mm 2,6146	Klgr. 1,344
1 B. A. U.	100	25,0	51,6	75,5	238,48	5,2291	10,753
10 B. A. U.	100	25,0	51,6	75,5	754,13	1,6536	10,753
2 B. A. U.	150	37,5	77,4	113,3	619,58	6,7928	36,291

Hierin bedeutet B. A. U. *British Association Unit*.
 $= 10^{10} \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$.

VII. Ueber die Form und Constitution der Pud- delschlackenkrystalle von dem Stahlwerke Hom- bourg-haut bei St. Avold im Moseldepartement; von B. Kosmann.

Während eines einjährigen Betriebs im Laufe der Jahre 1866 und 1867 hatte ich als technischer Betriebsführer auf dem genannten Werke fast täglich Gelegenheit, die Bildung der oben bezeichneten Krystalle zu beobachten und folglich auch das Material für die folgenden Untersuchungen in größerer Menge anzusammeln. Es wird daher dem Leser zur Beurtheilung der Bedingungen, unter welchen die Bildung solcher Krystalle erfolgte, erwünscht seyn, die äußeren Umstände wie die etwaigen Vorbereitungen zu erfahren, durch welche die Erzeugung jener Krystalle herbeigeführt wurde. Es scheint mir nämlich zur Beurtheilung der hier niedergelegten Ergebnisse ein besonderer Werth darauf gelegt werden zu müssen, daß der chemischen Analyse nicht die beliebig gewählte Schlackenmasse vom Pud-