IX. Zur Theorie der stationären Bewegung; von S. Oppenheim.

Es sei im Nachfolgenden ein Princip aufgestellt, nach welchem die Gesetze der stationären Bewegung, wie sie zuerst Clausius behufs einer Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf mechanische Grundsätze abgeleitet hat, sich in kürzerer Weise ergeben.

Bezeichnen wir nämlich mit $i_1 i_2$ die Perioden der stationären Bewegung, diesen Ausdruck im Sinne von Clausius' Entwicklungen genommen, ferner mit $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2 \dots$ die Componenten der Bahnlängen der bewegten Punkte, bezogen auf drei rechtwinkelige Coordinatenachsen, und mit $\dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{z}_1 \dot{x}_2 \dots$ die Componenten ihrer mittleren Geschwindigkeiten, so wollen wir:

$$(1) \quad \frac{x_1}{i_1} = \dot{x}_1, \quad \frac{x_2}{i_2} = \dot{x}_2 \dots \quad \frac{y_1}{i_1} = \dot{y}_1, \quad \dots \dots$$

u. s. w. setzen. Die nothwendige Bedingung hierzu ist, dass wir die Bewegung von einem bestimmten Augenblicke $t = t_0$ an betrachten, für welchen die entsprechenden Werthe der anderen Grössen sämmtlich verschwinden. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, und seien $(x_1) (y_1) (z_1) (x_2) \dots$ die entsprechenden Werthe der x_1 und $y_1 z_1$ u. s. w. für die Zeit $t = t_0$, dann setzen wir:

$$\frac{x_1 - (x)}{i_1} = \dot{x}_1, \quad \frac{x_2 - (x_2)}{i_2} = \dot{x}_2 \dots$$

und analog für y und z .

Die mittlere lebendige Kraft ist somit:

$$T = \sum \frac{m_i}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2).$$

Die Summation erstreckt sich über alle materiellen Punkte, die den Körper zusammensetzen. Durch die Gleichungen (1) geht dieselbe über in:

$$T = \sum \left(\frac{m_i}{2 i_1^2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \right),$$

ist also eine homogene quadratische Function der Grössen $x y z$, und nach einer bekannten Eigenschaft derselben erhalten wir:

$$(2) \quad 2T = \sum \left(x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} \right).$$

Das Princip der Erhaltung der Energie:

$$T - U = \text{Const.},$$

unter U den Mittelwerth des Potentials der auf die discreten Punkte wirkenden äusseren Kräfte verstanden, — liefert hierzu die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial x_2} - \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y_1} - \frac{\partial U}{\partial y_1} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial z_1} - \frac{\partial U}{\partial z_1} &= 0 \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

welche, in (2) eingesetzt:

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} \sum \left(x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} \right)$$

geben, einen Satz, welchen Clausius als den Satz vom mittleren Virial bezeichnet.¹⁾

Bezeichnen wir ferner mit:

$$\frac{dE}{dt} \delta i$$

eine Aenderung der totalen Energie, hervorgerufen dadurch, dass an Stelle der ursprünglichen Bewegung eine veränderte tritt, d. h. im concreten Falle, hervorgerufen durch eine Zufuhr oder Wegnahme von Energie, setzen somit:

$$\frac{dE}{dt} \delta i = \frac{dT}{dt} \delta i + \frac{dU}{dt} \delta i = \frac{dT}{dt} \delta i + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y}_1 + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z}_1 \right) \delta i,$$

so geht diese Gleichung mit Rücksicht auf (1) über in:

$$\frac{dE}{dt} \delta i = \frac{dT}{dt} \delta i + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} x + \frac{\partial U}{\partial y} y + \frac{\partial U}{\partial z} z \right) \frac{\delta i}{i},$$

und mit Rücksicht auf (3) in:

$$\frac{dE}{dt} \delta i = \frac{dT}{dt} \delta i + 2T \frac{\delta i}{i}, \quad \text{oder:}$$

$$(4) \quad \delta E = \delta T + T \delta \log i^2,$$

die Gleichung, welche als der mechanische Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie betrachtet wird.²⁾

1) Clausius, Pogg. Ann. **141**. p. 125. 1870.

2) Clausius, Pogg. Ann. **142**. p. 442. 1871.