6. *Experimentaluntersuchungen über die elastische Längs- und Torsionsnachwirkung in Metallen; von Louis Austin.*

(Aus der Strassburger Dissertation.)

(Hierzu Taf. XII Fig. 6—8.)

Die Thatsache, dass die Deformation eines elastischen Körpers, welcher irgend einer Spannung unterworfen wurde, selbst wenn die Elasticitätsgrenze nicht überschritten war, noch längere Zeit nach der Spannung andauert, wurde bekanntlich zuerst von W. Weber¹⁾ an Seidenfäden beobachtet und von ihm mit dem Namen „elastische Nachwirkung“ belegt.

Weitere Beobachtungen von F. Kohlrausch²⁾ an Glas, Kautschuk, Hartkautschuk und verschiedenen Metallen zeigten folgendes:

I. War ein Körper deformirt, so ist die darauf folgende elastische Nachwirkung nahezu der Deformation proportional.

II. Bei verschiedener Zeitdauer der Deformation ist die Nachwirkung nahe proportional einer Potenz dieser Zeit.

III. Diese Nachwirkung wächst bedeutend mit der Temperatur.

IV. Die Curven, welche den Verlauf der elastischen Nachwirkung nach verschieden starken, während gleicher Zeiträume wirkenden Deformationen darstellen, sind in erster Annäherung einander ähnlich.

V. Die Nachwirkung x nach einer constanten Deformation oder während einer constant wirkenden deformirenden Kraft liess sich in allen Fällen durch die Formel ausdrücken:

$$(1) \quad -\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t^n}; \quad x = Ce^{-\alpha t^m},$$

wo $\alpha = am$ und $n = 1 - m$ ist.

Oft genügt die specielle Form ($n = 1$)

$$(2) \quad -\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t}; \quad x = \frac{e}{t^\alpha}.$$

1) W. Weber, Pogg. Ann. **34**. p. 247; **54**. p. 1.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **119**. p. 338; **128**. p. 7. 207. 399; **158**. p. 337; **160**. p. 225.

Hier bedeutet t die Zeit seit dem Aufhören der vorangegangenen Deformation, bez. nach dem plötzlichen Eintreten der deformirenden Kraft, x den Abstand der augenblicklichen Körpergestalt von der endlichen Gleichgewichtsgestalt; a , n , C und c sind Constanten. Die Formel (2) gilt im allgemeinen in denjenigen Fällen, wo der Körper nicht während allzu langer Zeit im Zustande der Spannung verblieb.

Kohlrausch untersuchte hauptsächlich die Nachwirkung bei der Torsion; diejenige bei der Dehnung und Biegung nur an Kautschuk bez. Hartkautschuk.

Die späteren Beobachtungen von zahlreichen Verfassern, soweit sie sich auf die oben unter I bis V gegebenen Verhältnisse bezogen, haben sich durch diese Formeln darstellen lassen.

Eine theoretisch abgeleitete Formel für die elastische Nachwirkung hat Boltzmann¹⁾ gegeben. Dieselbe beruht auf der Annahme, dass eine vorausgegangene Deformation δ , welche während der Zeit $d\theta$ bestanden hatte, eine Nachwirkung hinterlässt, die mit $\delta \cdot d\theta$ und einer Function der seitdem verflossenen Zeit θ proportional ist, ferner, dass verschiedene Nachwirkungen sich einfach superponiren.

Eine specielle Form der Boltzmann'schen Hypothese sagt, dass die Nachwirkung proportional $\delta \cdot (d\theta / \theta)$ ist.

Wenn also ein Körper während der Zeit T die constante Deformation δ erlitten hatte, so wird zu der Zeit t seit dem Aufhören der Spannung eine Nachwirkung x vorhanden sein:

$$x = p \delta \int_t^{t+T} \frac{d\theta}{\theta} = p \delta \log \frac{t+T}{t}$$

wo p eine Constante des Körpers ist.

Beobachtungen über Längsnachwirkung *an Metallen* sind wohl nur von Miller²⁾ angestellt worden, und zwar in einer Form, die nicht den ganzen Verlauf des Vorganges zu verfolgen gestattete.

Ich habe deshalb auf Veranlassung von Prof. Kohlrausch eine Reihe von Beobachtungen über die Längsnachwirkung

1) Boltzmann, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 624.

2) Miller, Sitzungsber. d. k. bayr. Akad. 1878.

verschiedener Drahtsorten ausgeführt und zugleich auch die Nachwirkung einer vorausgegangenen Torsion an denselben Drähten untersucht.

Die Hauptfragen, welche ich in der folgenden Untersuchung zu beantworten suche, sind folgende:

I. Folgt die durch eine Dehnung hervorgerufene elastische Nachwirkung denselben Gesetzen, wie die durch Torsion veranlasste?

II. In welcher Weise hängt die Rückkehr zu der Gleichgewichtslage von der ursprünglichen Gestaltsänderung ab?

III. Sind die Curven der elastischen Längsnachwirkung während einer Belastung und nach derselben lange dauernden Belastung congruent?

IV. Welche Grössenbeziehungen bestehen zwischen der durch Torsion und der durch Dehnung erzeugten Nachwirkung?

Apparat.

Die *Längsnachwirkung* wurde in dem Thurm des physikalischen Instituts untersucht, welcher Drähte von 23 m Länge zu benutzen gestattet und durch seine nördliche Lage die Erhaltung einer hinreichend constanten Temperatur ermöglicht.

Die Drähte, welche zu den Untersuchungen benutzt wurden, waren mittels eiserner Klammern an einem 25 cm dicken Balken, der auf zwei diagonal gegenüberstehenden Pfeilern ruhte, befestigt. Um gegen zufällige Verschiebungen des Aufhängepunktes der Drähte gesichert zu sein, wurde mit Hilfe eines Mikroskopes, welches an einem zweiten Balken angebracht war, von Zeit zu Zeit eine an den einzelnen Drähten, in der Nähe des Aufhängepunktes befindliche Marke beobachtet.

Zur Elimination der Temperaturstörungen wurden zwei Drähte desselben Materials benutzt. Der eine trug ein constantes kleines Gewicht und zugleich die Marke, welche als Nullpunkt bei den Beobachtungen diente; derjenige, an welchem die eigentlichen Untersuchungen über die elastische Nachwirkung angestellt wurden, hing 2 mm neben diesem „Thermometerdraht“ und lief durch das hohle Gewicht, welches diesen gespannt hielt. Am unteren Ende des zweiten Drahtes war die Schale befestigt, welche zur Aufnahme der Gewichte diente, und unter dieser stand ein gewöhnlicher grosser Wasser-

dämpfer. Um Torsionsschwingungen zu verhindern, war jeder Draht mit einem leichten Arm versehen, welcher ohne Zwang zwischen zwei an eisernen Stiften befestigten Stäben spielte.

Die Beobachtungen wurden am Ocularmikrometer eines Mikroskopes ausgeführt, welches Ablesungen bis zu 0,001 mm gestattete. Als Marken dienten Glasfäden, welche mit Siegelack an den Drähten befestigt waren.

Die von Hrn. Thompson ¹⁾ bei seiner Untersuchung über das Gesetz der elastischen Dehnung hergestellten Vorrichtungen konnten hierbei mehrfach benutzt werden.

Es war auch der Versuch gemacht worden, die Bestimmungen mit Hülfe von Spiegel und Scala zu bewerkstelligen; zu diesem Zwecke wurde ein leichter Drahtrahmen, der den Spiegel trug, mit drei Nadelspitzen versehen, von denen zwei in konischen Vertiefungen eines an dem Thermometerdraht befestigten Messingstückes ruhten, während die dritte in ähnlicher Weise einen Stützpunkt an dem Versuchsdrahte fand. Wenn der zweite Draht gespannt war, musste der Rahmen an einem dritten Ruhepunkte durch einen Draht gestützt werden, welcher so angebracht war, dass er den Rahmen aufging, wenn der zweite Draht sich ausdehnte. Allein, wenn der gespannte Draht von der Belastung befreit wurde und wieder als Stütze für den Rahmen mit Spiegel diente, so war der Nullpunkt auf der Scala gewöhnlich drei oder vier Millimeter verschoben, was die Anwendung dieser Methode unmöglich machte.

Um eine seitliche Bewegung zu verhindern, bewegten sich die Drähte ohne merkliche Reibung etwas unterhalb der Marken in einem von zwei dünnen, aber hinreichend steifen Glasfäden gebildeten Winkel; die Glasfäden waren an einem Rahmen befestigt, der von dem schon oben erwähnten Stifte getragen wurde.

Die Durchschnittstemperatur des Thurmes wurde aus der mit Hülfe eines zweiten Mikroskopes beobachteten Länge des Thermometerdrahtes berechnet.

Bei den Untersuchungen über die *Torsionsnachwirkung* hing der Versuchsdraht in einem Gehäuse an einem mit einer Theilung versehenen Torsionskopfe und trug an seinem unteren

1) J. O. Thompson, Wied. Ann. **44**. p. 555. 1892.

Ende einen Spiegel und ein kleines Spannungsgewicht, welches mit einem Wasserdämpfer verbunden war. Um zu grosse Schwingungsamplituden zu verhindern und das untere Ende des Drahtes bei der Anwendung der Torsion an seiner Stelle zu erhalten, ging von dem den Draht spannenden Gewichte ein seitlicher Arm aus, welcher zwischen zwei aufrechten Drähten spielte.

Anordnung der Messungen.

Die Längsnachwirkung. Die beiden Drähte wurden in der oben näher angegebenen Weise befestigt und dann 24 Stunden hindurch mit einem Gewichte belastet, welches doppelt so schwer war, als irgend eines der bei den folgenden Versuchen zu benutzenden Gewichte; hierauf wurden die Drähte von ihrer Belastung befreit und nach Verlauf von 3 bis 8 Tagen die Beobachtungen begonnen. Der ersten Beobachtung an einer Reihe, welche immer $\frac{1}{2}$ Minute nach Entfernung des Gewichtes gemacht wurde, kann kein grosses Gewicht beigelegt werden, da der Draht dann noch nicht vollständig zur Ruhe gekommen war; diese Zahlen sind deshalb bei der Berechnung der Constanten nicht benutzt worden.

Die Torsionsnachwirkung. Die Drähte, welche zur Beobachtung der Torsionsnachwirkung dienten, wurden an dem Kopfe befestigt, einer bedeutenden Torsion unterworfen und dann nach Ruhepausen von mehreren Tagen in einzelnen Fällen von mehreren Wochen, zur Untersuchung benutzt. Die nach Verlauf einer halben Minute gemachten Beobachtungen sind auch hier nicht hinreichend genau, da der Spiegel dann noch in Bewegung war.

Zwischen zwei Messungsreihen wartete man mindestens so lange, bis der Draht in der Zeit, welche für die neue Reihe erforderlich war, keine merkliche Bewegung mehr zeigte.

Die Bedeutung der angewandten Zeichen ist folgende:

τ bezeichnet die Temperatur, W das Belastungsgewicht, L die demselben entsprechende Verlängerung, φ den Torsionswinkel, T die Dauer der Deformation, t die nach der Aufhebung der Deformation bez. nach Eintritt derselben verflossene Zeit, x die Nachwirkung; x_1 ist die für $t = 1$ beobachtete, c die für $t = 1$ berechnete Nachwirkung, Δ ist gleich

x beob. — x berech., λ ist x_1/L bei der Verlängerung, λ' ist x_1/φ bei der Torsion.¹⁾

**Längsnachwirkung eines 23 m langen, 0,30 mm dicken
Messingdrahtes.**

Zugfestigkeit = 4,7 kg, constantes Spannungsgewicht = 0,65 kg, Verlängerung für 1 kg = 36,0 mm.

Als Einheit für die Längsnachwirkung wird in den Tabellen 0,01 mm genommen.

Tabelle I giebt die elastische Längsnachwirkung, welche nach verschiedenen starken Belastungen in gleichen Zeiträumen und nach gleicher Belastung in verschiedenen Zeiträumen erhalten wurde.

Tabelle Ia.

Dauer $T = 3$ Min.

$W = 0,5$ kg $\tau = 20,7^\circ$ $0,7$ kg $19,3^\circ$ 1 kg $19,7^\circ$
 $10^{-2} \cdot L = 1800$ mm 2520 mm 3600 mm

t Min.	x			x			x		
	beob.	ber.	Δ	beob.	ber.	Δ	beob.	ber.	Δ
0,5	2,0	2,16	—	3,2	3,43	—	4,6	4,85	—
1	1,6	1,55	+ 0,05	2,4	2,46	— 0,06	3,2	3,48	— 0,28
2	1,2	1,11	+ 0,09	1,8	1,76	+ 0,04	2,6	2,50	+ 0,10
3	1,0	0,91	+ 0,09	1,5	1,45	+ 0,05	2,2	2,05	+ 0,15
5	0,7	0,72	— 0,02	1,2	1,14	+ 0,06	1,8	1,61	+ 0,19
7	0,5	0,61	— 0,11	1,0	0,97	+ 0,03	1,4	1,37	+ 0,03
10	0,3	0,51	— 0,21	0,8	0,81	— 0,01	1,2	1,15	+ 0,05
15	—	—	—	0,6	0,67	— 0,07	0,9	0,95	— 0,05
20	—	—	—	0,5	0,58	— 0,08	0,8	0,83	— 0,03
$c = 1,55$				$c = 2,46$			$c = 3,48$		

$$\alpha = 0,48$$

$$x = \frac{c}{t^\alpha}$$

Da die sämtlichen von Kohlrausch beobachteten Nachwirkungen nach einer kurz dauernden Deformation sich aus der Formel (2) (p. 659) berechnen liessen, und zwar die meisten mit nahe demselben Exponenten α , so war der Versuch anzustellen, ob die Längsnachwirkung in Metallen dieselbe Beziehung zeigte. Man sieht, dass dies hinreichend genähert der Fall ist. Dass die Nachwirkung nach den grösseren De-

1) x_1 und L bez. x_1 und φ je in gleichem Maass gemessen.

formationen ein wenig langsamer als nach den geringeren verschwindet, stimmt mit den Beobachtungen Kohlrausch's über die Torsion von Metalldrähten.

Tabelle Ib.

$$W = 1 \text{ kg, } 10^{-2}, L = 3600 \text{ mm}$$

$$T = 27 \text{ Min.}$$

$$\tau = 20,0^{\circ}$$

$$T = 81 \text{ Min.}$$

$$\tau = 19,7^{\circ}$$

t Min.	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.	
1	10,2	10,13	+ 0,07	16,0	15,89	+ 0,11
2	8,8	8,78	+ 0,02	13,8	14,06	- 0,26
3	7,8	7,96	- 0,16	12,8	12,92	- 0,12
5	6,8	6,91	- 0,11	11,4	11,44	- 0,04
7	6,1	6,21	- 0,11	10,6	10,44	+ 0,16
10	5,4	5,48	- 0,08	9,2	9,38	- 0,18
15	4,6	4,67	- 0,07	8,2	8,18	+ 0,02
20	4,0	4,12	- 0,12	7,4	7,34	+ 0,06
30	3,4	3,39	+ 0,01	6,4	6,21	+ 0,19
40	3,2	2,90	+ 0,30	—	—	—
50	2,8	2,55	+ 0,25	5,0	4,87	+ 0,13
70	2,0	2,06	- 0,06	—	—	—
80	—	—	—	3,8	3,75	+ 0,05
110	—	—	—	3,2	3,08	+ 0,12

$$C = 18,80; a = 0,618$$

$$C = 27,00; a = 0,530$$

$$m = 0,30 \quad x = C e^{-a t^m}$$

Ebenso ist mit jenen Beobachtungen in Uebereinstimmung, dass die Nachwirkung nach länger dauernden Deformationen sich der Specialformel (2) nicht fügt, sondern die allgemeine Formel verlangt.

Kohlrausch fand ferner, dass bei einer bestimmten Temperatur der Werth von x_1 nahezu dem Drehungswinkel φ bei der Torsionsnachwirkung oder dem Belastungsgewicht W bei der Längsnachwirkung und ausserdem einer Potenz der Zeitdauer T proportional ist, oder:

$$x_1 = K W T^{\beta}.$$

Um diese Beziehung für die Längsnachwirkung zu prüfen, habe ich die Beobachtungen der Tab. I und ferner einige andere benutzt, welche nicht ausführlich wiedergegeben sind.

Alle Beobachtungen (Tab. II) sind auf die Temperatur $20,0^{\circ}$ reducirt (vgl. S. 667).

Setzt man $x_1 = 2,13 \cdot W T^{0,46}$, so erhält man

Tabelle II.

W	T	x_1 beob.	x_1 ber.	Δ
1 kg	1 Min.	2,14	2,13	+ 0,01
1 "	3 "	3,23	3,53	- 0,30
1 "	9 "	5,80	5,85	- 0,05
1 "	27 "	10,20	9,70	+ 0,50
1 "	81 "	16,12	16,08	+ 0,04
0,7 "	3 "	2,44	2,47	- 0,03
0,5 "	3 "	1,58	1,76	- 0,18

Die Verlängerung des Drahtes für ein Gewicht von 1 kg beträgt 36 mm. Ersetzt man hiernach die Belastung W durch die Verlängerung L , so bekommt man also mit Rücksicht darauf, dass x_1 in 0,01 mm ausgedrückt ist, für $20,0^\circ$ und $T = 1$ Min.

$$\lambda = \frac{x_1}{L} = 0,00059.$$

**Torsionsnachwirkung eines 35 cm langen, 0,3 mm dicken
Messingdrahtes.**

Von diesen Beobachtungen, welche durchweg den schon bekannten Beziehungen folgten, theile ich nur eine kleine Zahl mit.

Tabelle III zeigt in den Resultaten dreier Beobachtungsreihen den Verlauf der Nachwirkung für verschieden starke Torsion, φ bedeutet den Drehungswinkel, die anderen Zeichen haben dieselbe Bedeutung wie in Tabelle I.

Tabelle III.

Dauer $T = 2$ Min.

$\varphi = 30^\circ$; $\tau = 23,3^\circ$. $\varphi = 60^\circ$; $\tau = 23,2^\circ$. $\varphi = 90^\circ$; $\tau = 23,6^\circ$.

t Min.	x		Δ	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.		beob.	ber.	
0,5	4,0	4,50	—	8,0	8,56	—	12,8	13,23	—
1	2,9	2,99	- 0,09	5,5	5,69	- 0,19	8,5	8,79	- 0,29
2	2,1	1,99	+ 0,11	4,0	3,78	+ 0,22	6,0	5,84	+ 0,16
3	1,8	1,56	+ 0,24	3,1	2,98	+ 0,12	4,8	4,60	+ 0,20
5	1,0	1,16	- 0,16	2,4	2,20	+ 0,20	3,6	3,40	+ 0,20
7	0,9	0,95	- 0,05	2,0	1,81	+ 0,19	2,9	2,79	+ 0,11
10	0,8	0,77	+ 0,03	1,3	1,46	- 0,16	2,1	2,26	- 0,16
15	—	—	—	1,1	1,15	- 0,05	1,8	1,78	+ 0,02
20	—	—	—	0,9	0,97	- 0,07	1,5	1,50	$\pm 0,00$

$c = 2,99$

$c = 5,69$

$c = 8,79$

$$\alpha = 0,59 \quad x = \frac{c}{t^\alpha}$$

x ist hier in Scalentheilen, welche einzeln gleich $0,018^\circ$ sind, gegeben. Der Werth von x_1 für $T = 1$ und $\tau = 20^\circ$ ist durch den Drehungswinkel ausgedrückt:

$$\lambda' = \frac{0,018 \cdot x_1}{\varphi} = 0,0011.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit den entsprechenden für die Dehnung erhaltenen, so ergibt sich: $\lambda' = 1,9 \lambda$

Der Einfluss der Temperatur. Beobachtungen über den Einfluss der Temperatur auf die Dehnungsnachwirkung liessen sich leider nur lückenhaft ausführen.

Tabelle IV gibt Werthe von x_1 bei der Torsion für $\varphi = 120^\circ$ und $T = 1$ Min. bei vier, und diejenige bei der Dehnung für $W = 1$ kg und $T = 3$ Min. bei zwei verschiedenen Temperaturen.

Tabelle IV.

Torsion		Dehnung	
τ	x_1	τ	x_1
23°	7,8	20°	3,3
19°	7,1	—	—
16°	6,7	—	—
11°	5,8	10°	2,4

Die Beobachtungen bestimmen den Werth des Temperaturcoefficienten γ , welcher den Zuwachs der Nachwirkung in Theilen von derjenigen bei 10° für einen Temperaturzuwachs von 1° angibt, für die Torsion nahezu:

$$\gamma = 0,029.$$

Der Werth für die Längsnachwirkung wird $\gamma = 0,037$ gefunden. Die Beobachtungen sind nicht genau genug, um zu entscheiden, ob der Unterschied wirklich vorhanden ist.

Der Einfluss der Temperaturänderungen auf den Werth von α ist, wenn überhaupt vorhanden, äusserst gering; aus einigen meiner Resultate schliesse ich indessen, dass α mit wachsender Temperatur ein wenig abnimmt.

Nachwirkung am Messing nach länger anhaltender Belastung. Die genaue Beobachtung der Nachwirkung nach dauernder Dehnung ist höchst schwierig, da selbst eine kleine Belastung, lange genug angewandt, hinreichend zu sein scheint, um eine

dauernde Veränderung in einem Drahte zu erzeugen. Aus diesem Grunde konnten keine absolut sicheren Schlüsse hinsichtlich des gegenseitigen Verhaltens der Curven während der Belastung und nach der Entlastung gezogen werden.

In Fig. 6 sind drei Paare von Curven wiedergegeben; die ausgezogenen Linien stellen den Verlauf der Nachwirkung während der Belastung, die punktirten Linien den Verlauf nach der Entlastung dar. Die Curven (1) und (2) beziehen sich auf die Temperatur 20°, Curve (3) auf 10°.

Die von Hrn. Kohlrausch ¹⁾ an Gummifäden angestellten Untersuchungen zeigten, dass für kleine Gestaltsänderungen die beiden Curven mehr und mehr congruent werden, sodass sie für eine sehr kleine Aenderung wahrscheinlich zusammenfallen würden. In Uebereinstimmung hiermit finden sich in Curve Nr. 3 zwischen Belastungs- und Entlastungscurven nur kleine Unterschiede.

Die grossen Unterschiede in Nr. 1 können meiner Ansicht nach auf dauernde Gestaltungsänderung durch die Belastung zurückkommen.

Längsnachwirkung eines 23 m langen, 0,29 mm dicken Kupferdrahtes.

Zugfestigkeit = 2,3 kg; constantes Spannungsgewicht = 0,44 kg; Verlängerung für 1 kg = 28,0 mm.

Tabelle Va.

Dauer $T = 0,5$ Min.

$W = 0,25$ kg

$W = 0,5$ kg

$W = 0,6$ kg

$L = 700$; $\tau = 18,0^\circ$.

$L = 1400$; $\tau = 20,3^\circ$.

$L = 1680$; $\tau = 18,6^\circ$.

t Min.	x		Δ	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.		beob.	ber.	
0,5	1,2	0,90	—	2,8	2,53	—	4,0	3,47	—
1	0,8	0,71	+0,09	2,0	2,00	$\pm 0,00$	2,6	2,74	-0,14
2	0,6	0,56	+0,04	1,6	1,58	+0,02	2,2	2,16	+0,04
3	0,5	0,49	+0,01	1,4	1,38	+0,02	2,0	1,88	+0,12
5	0,3	0,41	-0,11	1,2	1,16	+0,04	1,6	1,58	+0,02
7	—	—	—	1,0	1,03	-0,03	1,4	1,41	-0,01
10	0,2	0,33	-0,13	0,9	0,92	-0,02	1,3	1,25	+0,05
15	—	—	—	0,8	0,80	$\pm 0,00$	1,1	1,09	+0,01
20	—	—	—	0,7	0,74	-0,04	1,0	1,01	-0,01

$c = 0,713$

$c = 2,002$

$c = 2,737$

$$\alpha = 0,34 \quad x = \frac{c}{t^\alpha}.$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 158. p. 337. 1876.

Tabelle Vb.

$W = 0,5 \text{ kg,}$ $10^{-2} L = 1400 \text{ mm.}$
 $T = 3 \text{ Min.; } \tau = 10,0^\circ.$ $T = 20 \text{ Min.; } \tau = 10,1^\circ.$

t	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.	
1	3,6	3,67	-0,07	7,7	7,67	+0,03
2	3,2	3,10	+0,10	6,7	6,61	+0,09
3	2,8	2,76	+0,04	6,0	5,99	+0,01
5	2,3	2,33	-0,03	5,3	5,21	+0,09
7	2,0	2,05	-0,05	4,6	4,69	-0,09
10	1,8	1,75	+0,05	4,0	4,15	-0,15
15	1,4	1,42	-0,02	3,5	3,53	-0,03
20	1,1	1,18	-0,08	3,0	3,09	-0,09
30	0,9	0,84	+0,06	2,5	2,47	+0,03
50	—	—	—	1,7	1,69	+0,01
70	—	—	—	1,3	1,17	+0,13

$$c = 3,67 \quad p = 0,001370$$

$$c = 7,67 \quad p = 0,002515$$

$$x = c - p L \log t.$$

Während Kupfer einerseits für eine bestimmte Gestaltsänderung eine grössere Nachwirkung zu erkennen gibt, als die anderen untersuchten Metalle, lässt es andererseits infolge seiner niedrigen Elasticitätsgrenze nur die Anwendung von Gewichten zu, welche verhältnissmässig kleiner sind, als die bei Messing benutzten.

Die drei ersten Reihen sind nach Formel (2) berechnet und lassen hinsichtlich der Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werthen nichts zu wünschen übrig; α ist hier etwas kleiner als Messing.

Die beiden letzten Reihen der Tabelle V habe ich nach der von Boltzmann angegebenen Formel (p. 660) zu berechnen versucht, jedoch gefunden, dass die Formel keine befriedigenden Resultate liefert.

Dagegen gibt die Formel $x = c - p L \log t$ Werthe, welche mit der Beobachtung gut übereinstimmen. Diese Formel ist praktisch gleich derjenigen, von welcher Prof. Kohlrausch¹⁾ in anderer Weise ausging, als er der Formel für $T = \infty$ einen Sinn zu geben suchte.

Die elastische Nachwirkung im Kupfer wächst verhältniss-

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 160. p. 225. 1877.

mässig etwas schneller als das Gewicht W ; sie lässt sich für $T = 0,5$ min. und $\tau = 20,0^\circ$ darstellen durch:

$$x_1 = 2,62 W + 2,97 W^2 = 0,00094 L + 0,00000038 L^2.$$

Wir erhalten dann

Tabelle VIa.

W	x_1 beob.	x_1 ber.	Δ
0,25 kg	0,84	0,84	+ 0,00
0,50 „	1,99	2,05	- 0,06
0,60 „	2,68	2,64	+ 0,04

Die Abhängigkeit von der Dauer T stellen wir für die Belastung 0,5 kg und die Temperatur $20,0^\circ$ dar durch

$$x_1 = 2,71 \cdot T^{0.44}$$

und bekommen

Tabelle VIb.

T	x_1 beob.	x_1 ber.	Δ
0,5	1,99	2,00	- 0,01
1	2,70	2,71	- 0,01
3	4,68	4,39	+ 0,29
20	10,01	10,11	- 0,10

Zusammenfassend können wir also für 20° schreiben:

$$x_1 = (0,00127 L + 0,0000005 \cdot L^2) \cdot T^{0.44}.$$

Torsionsnachwirkung am Kupferdraht.

Tabelle VII.

$T = 1$ Min.

$\varphi = 20^\circ$; $\tau = 20,2^\circ$. $\varphi = 30^\circ$; $\tau = 19,9^\circ$. $\varphi = 40^\circ$; $\tau = 18,6^\circ$.

t	x		Δ	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.		beob.	ber.	
0,5	11,5	11,19	—	18,0	17,57	—	25,5	24,79	—
1	7,9	7,86	+ 0,04	12,5	12,34	+ 0,16	17,6	17,41	+ 0,19
2	5,4	5,52	- 0,12	8,8	8,66	+ 0,14	12,5	12,23	+ 0,27
3	4,4	4,49	- 0,09	6,9	7,04	- 0,14	9,8	9,94	- 0,14
5	3,4	3,46	- 0,06	5,1	5,43	- 0,33	7,4	7,66	- 0,26
7	2,9	2,91	- 0,01	4,4	4,57	- 0,17	6,2	6,45	- 0,25
10	2,5	2,43	+ 0,07	3,8	3,81	- 0,01	5,2	5,38	- 0,18
15	2,1	1,98	+ 0,12	3,2	3,10	+ 0,10	4,3	4,37	- 0,07
20	1,9	1,71	+ 0,19	2,8	2,68	+ 0,12	3,5	3,78	- 0,28

$c = 7,86$

$c = 12,34$

$c = 17,41$

$$\alpha = 0,51 \quad x = \frac{c}{t^\alpha}.$$

Für grössere Torsionen scheint die Rückkehr zur Ruhelage ein wenig schneller vor sich zu gehen, als für kleinere.

Der Werth von α ist grösser als bei der Dehnung, aber nicht so gross, wie bei Messing; x_1 wächst etwas schneller als der Drehungswinkel, und für $T = 1$ Min. und $\tau = 20,0^\circ$ findet man, da jeder Scalentheil gleich $0,014^\circ$ ist,

$$x_1 = 0,00454 \varphi + 0,000046 \varphi^2.$$

Es ist also für kleine Torsionswinkel von der Dauer 1 Min. bei 20°

$$\lambda' = 0,0045.$$

Für die Längsnachwirkung ergab sich $\lambda = 0,00127$, mithin

$$\lambda' = 3,6 \lambda.$$

Einfluss der Temperatur auf Kupfer. In Tab. VIII sind für verschiedene Temperaturen die Nachwirkungen zusammengestellt, wie sie sich bei der Torsion für $\varphi = 20^\circ$ und $T = 1$ Minute, und bei der Dehnung für $W = 0,5$ kg und $T = 0,5$ Minuten ergeben haben:

Tabelle VIII.

τ	x_1 Torsion	x_1 Dehnung
20°	7,8	2,0
15°	6,8	—
12°	6,2	—
10°	—	1,6

Für γ findet man bei der Torsion 0,034, also nahe denselben Werth, wie für den Temperaturcoefficienten von Messing, für die Dehnung 0,025.

Nachwirkung im Kupfer nach länger dauernder Belastung. Kupfer zeigt in bedeutend stärkerem Maasse als Messing die Eigenschaft, bei anhaltender Belastung eine dauernde Veränderung zu erleiden; die Untersuchung war dementsprechend noch schwieriger; aber die Schlüsse, die wir aus den Beobachtungen ziehen können, sind befriedigender, als es bei Messing der Fall war.

Fig. 2 zeigt zwei Paare von Curven; die ausgezogenen Linien stellen, wie früher, die Nachwirkungscurve während der

Belastung, die punktirten Linien ebenso den Verlauf der Nachwirkung nach der Entlastung dar.

Nr. 1 ($W = 0,3$ kg, $T = 5500$ Minuten. Durchschnittstemperatur $\tau = 10,1^\circ$) zeigt eine dauernde Veränderung, welche nahezu ein Viertel der ganzen Curvenhöhe beträgt, und es ist somit zwecklos, einen Vergleich zwischen den beiden Theilen anzustellen.

Nr. 2 ($W = 0,15$ kg, $T = 2800$ Minuten, Durchschnittstemperatur $\tau = 11^\circ$) lässt eine dauernde Veränderung von einem Sechszehntel der ganzen Curvenhöhe erkennen; dass dies wirklich als eine dauernde Veränderung und nicht etwa als eine Folge der langsameren Rückkehr der punktirten Linie anzusehen ist, kann ich mit Bestimmtheit behaupten, weil ich den Draht länger als eine Woche nach der zuletzt eingetragenen Messung beobachtet und gefunden habe, dass die Stellung der Marke während dieser Zeit sich nicht um $0,001$ mm änderte. Ich halte es daher für wahrscheinlich, dass die Curven, falls keine Veränderung stattgefunden hätte, coincidiren würden; mag dies aber der Fall sein oder nicht, soviel ist jedenfalls sicher, dass *die durch lange dauernde Belastung hervorgerufene Nachwirkung zu ihrem Verschwinden ungefähr ebensoviel Zeit braucht, als vorher zu ihrer Erzeugung erforderlich war.*

Längsnachwirkung an einem 23 m langen und 0,32 mm dicken Silberdraht.

Zugfestigkeit = 3,8 kg; constantes Spannungsgewicht = 0,65 kg; Verlängerung für 1 kg = 38,0 mm.

Der gemeinschaftliche Exponent α , mit welchem die vier ersten Beobachtungen berechnet sind, ist kleiner, als bei Messing und Kupfer. In den ersten drei Reihen ist die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werthen gut. Die vierte Reihe ($W = 1$ kg) zeigt keine so grosse Uebereinstimmung, und die Vermuthung liegt nahe, dass vielleicht in diesem Falle die Belastungen der Elasticitätsgrenze etwas zu nahe gekommen waren, wodurch die Nachwirkung unregelmässig zu werden scheint.

Es scheint freilich andererseits auch, als ob die Nachwirkung nach grösseren Dehnungen etwas rascher ablaufe.

Ein grösseres α würde die dritte und noch mehr die vierte Reihe verbessern.

Tabelle IXa.

 $T = 1 \text{ Min.}$

$W = 0,4 \text{ kg}$ $10^{-2} L = 1520$ $\tau = 10,0^\circ$ $0,6 \text{ kg}$ 2280 $9,8^\circ$ $0,8 \text{ kg}$ 3040 $9,0^\circ$ 1 kg 3800 $9,9^\circ$

t Min.	x			x			x			x		
	beob.	ber.	Δ	beob.	ber.	Δ	beob.	ber.	Δ	beob.	ber.	Δ
0,5	1,6	1,31	—	2,3	2,08	—	2,7	2,37	—	3,8	3,56	—
1	1,1	1,09	+0,01	1,7	1,72	-0,02	2,0	1,97	+0,03	3,0	2,95	+0,05
2	0,9	0,90	$\pm 0,00$	1,4	1,43	-0,03	1,7	1,63	+0,07	2,6	2,45	+0,15
3	0,8	0,81	-0,01	1,3	1,28	+0,02	1,5	1,46	+0,04	2,3	2,19	+0,11
5	0,7	0,71	-0,01	1,2	1,12	+0,08	1,2	1,28	-0,08	2,0	1,91	+0,09
7	—	—	—	1,0	1,02	-0,02	1,1	1,16	-0,06	1,7	1,74	-0,04
10	0,6	0,59	+0,01	0,9	0,93	-0,03	1,0	1,06	-0,06	1,5	1,58	-0,08
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,2	1,42	-0,22
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0	1,31	-0,31

 $c = 1,090$ $c = 1,722$ $c = 1,968$ $c = 2,951$ $\alpha = 0,27$ $x = \frac{c}{t^\alpha}$

Tabelle IXb.

 $W = 0,6 \text{ kg}$ $L = 2280$

$T = 10 \text{ Min.}; \tau = 9,0^\circ.$ $T = 30 \text{ Min.}; \tau = 7,8^\circ$

t Min.	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.	
1	3,4	3,48	-0,08	6,2	6,28	-0,08
2	3,0	2,95	+0,05	5,5	5,54	-0,04
3	2,7	2,64	+0,06	5,2	5,10	+0,10
5	2,2	2,25	-0,05	4,6	4,56	+0,04
7	2,0	1,99	+0,01	4,2	4,20	$\pm 0,00$
10	1,8	1,71	+0,09	3,8	3,81	-0,01
15	1,4	1,40	$\pm 0,00$	3,4	3,38	+0,02
20	1,2	1,18	+0,02	3,2	3,07	+0,13
40	0,6	0,65	-0,05	2,3	2,33	-0,03
60	—	—	—	1,9	1,89	+0,01
80	—	—	—	1,5	1,58	-0,08

 $c = 3,48$ $c = 6,28$ $p = 0,000776$ $p = 0,001082$ $x = c - p L \log t.$

Diejenigen Reihen, welche die Nachwirkung für grössere Werthe von T angeben, sind nach der Formel $x = c - p L \log t$

berechnet und zeigen sehr gute Uebereinstimmung mit der Beobachtung.

Auch die Reihen Nr. 1 bis 3 lassen sich hiernach gut darstellen.

Tabelle X.

T	x_1 beob,	x_1 ber.	Δ
0,5	1,56	1,71	- 0,15
1	2,23	2,23	$\pm$ 0,00
3	3,72	3,39	+ 0,33
10	4,52	5,35	- 0,83
30	8,56	8,12	+ 0,44

Die obige Tabelle gibt für verschiedene Werthe von T und für $W = 0,6$ kg und $\tau = 20^\circ$ die entsprechenden Werthe von x_1 .

Die Rechnung geschieht nach:

$$x_1 = 2,23 \cdot T^{0,38}.$$

x_1 ändert sich ungefähr proportional mit W und als allgemeinen Ausdruck bei $\tau = 20^\circ$ können wir schreiben:

$$x_1 = 3,74 \cdot W \cdot T^{0,38},$$

oder durch die Verlängerung ausgedrückt:

$$x_1 = 0,00098 L \cdot T^{0,38} \text{ also } \lambda = 0,00098.$$

Torsionsnachwirkung des Silbers.

Die Resultate, welche drei Beobachtungsreihen bezüglich der Torsionsnachwirkung in dem Silberdrahte für $T=1$ Minute ergeben, sind in Tab. XI enthalten.

Die theoretischen Werthe wurden mit $\alpha = 0,49$ für alle Reihen nach Formel (2) berechnet. x_1 ist sehr nahe proportional zu φ und für $\tau = 20^\circ$ ergibt sich in Scalentheilen $x_1 = 0,129 \varphi$, oder durch Multiplication mit 0,014 (dem Werthe eines Scalentheiles in Bogengraden):

$$\lambda' = 0,014 \frac{x_1}{\varphi} = 0,0018;$$

hieraus folgt für $\tau = 20^\circ$

$$\lambda' = 1,84 \lambda.$$

Tabelle XI.

 $T = 1 \text{ Min.}$ $\varphi = 60^\circ; \tau = 18,2^\circ. \quad \varphi = 90^\circ; \tau = 17,2^\circ. \quad \varphi = 150^\circ; \tau = 20,0^\circ.$

t	x		Δ	x		Δ	x		Δ
	beob.	ber.		beob.	ber.		beob.	ber.	
0,5	9,5	10,28	- 0,78	14,5	14,79	- 0,29	28,0	28,05	- 0,05
1	7,2	7,32	- 0,12	10,2	10,53	- 0,33	19,8	19,97	- 0,17
2	5,4	5,21	+ 0,19	7,8	7,50	+ 0,30	14,3	14,22	+ 0,08
3	4,4	4,28	+ 0,12	6,1	6,16	- 0,06	11,1	11,67	- 0,57
5	3,3	3,33	- 0,03	4,9	4,79	+ 0,11	9,4	9,08	+ 0,32
7	2,7	2,82	- 0,12	4,2	4,06	+ 0,14	8,0	7,70	+ 0,30
10	2,3	2,37	- 0,07	3,6	3,41	+ 0,19	6,8	6,46	+ 0,34
15	—	—	—	—	—	—	5,4	5,30	+ 0,10
20	—	—	—	—	—	—	4,6	4,60	$\pm 0,00$
40	—	—	—	—	—	—	3,6	3,28	+ 0,32

 $c = 7,32$ $c = 10,53$ $c = 19,97$

$$\alpha = 0,49 \quad x = \frac{c}{t^\alpha}$$

Prof. Kohlrausch¹⁾ fand bei seinen Untersuchungen über die Torsionsnachwirkung bei Silber an einem Drahte, welcher 125 mm lang war und einen Durchmesser von 0,092 mm hatte, für eine Torsion von 1 Minute bei 20° Temp. $\alpha = 0,39$ und $\lambda' = 0,00102$, wir dagegen 0,49 und 0,0018.

Dieser Unterschied liess mich vermuthen, dass vielleicht der Durchmesser des Drahtes die Nachwirkung beeinflussen könnte. Ich liess daher ein Stück des zu den obigen Untersuchungen benutzten Drahtes bis fast auf die Hälfte des früheren Durchmessers ausziehen, konnte indess nicht finden, dass diese Reduction des Durchmessers die Nachwirkung irgendwie ändert. Es ist daher eher wahrscheinlich, dass der Umstand, dass mein Draht reines Silber, der von Kohlrausch gebrauchte aber ein wenig legirt war, die erwähnte Verschiedenheit bedingt hat.

Einfluss der Temperatur. Der Einfluss der Temperatur auf die Nachwirkung bei Silber scheint nahe derselbe zu sein, wie bei Messing. Es liegen aber nur Untersuchungen an der Torsion vor.

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 158. p. 342. 1876.

Tabelle XII.

 $\varphi = 120^\circ$; $T = 1$ Min.

τ	x_1 (Torsion)
20°	15,8
16°	14,4
12°	12,3
8°	11,1

Hieraus folgt als Werth für den Temperaturcoefficienten:

$$\gamma = 0,036.$$

Längsnachwirkung bei länger dauernder Belastung. Fig. 3 zeigt zwei Curven, welche den Verlauf der Nachwirkung während der Belastung und nach der Entlastung für $T = 2880$ Minuten und $W = 0,4$ kg, bez. $W = 0,2$ kg wiedergeben. Die Resultate sind ähnlich wie bei Messing und Kupfer.

Zusammenfassung der erhaltenen Resultate.

Die elastische Längsnachwirkung in Metallen scheint im allgemeinen denselben Gesetzen zu folgen, wie die Torsionsnachwirkung; sie ist nahezu der ursprünglichen Gestaltsänderung proportional; die Curven, welche ihre Abnahme darstellen, sind nahe ähnliche, solange die Dauer der vorausgehenden Deformation klein bleibt. Für längere Dauer sinkt die Curve langsamer.

Die Nachwirkung wächst mit der Temperatur. Die letztere hat auf die Schnelligkeit des Verschwindens der Nachwirkung sehr geringen Einfluss.

Der Verlauf der Nachwirkung x nach einer kurz dauernden Deformation lässt sich für Dehnung und für Torsion darstellen durch Kohlrausch's Formel:

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t} \quad \text{oder} \quad x = \frac{c}{t^\alpha}.$$

In der folgenden Tabelle stellt λ' bez. λ für Torsion bez. Dehnung die Nachwirkung bei 20° nach einer Deformation Eins, welche 1 Minute bestanden hatte und vor 1 Minute aufgehoben war. γ ist der Zuwachs der Torsionsnachwirkung auf $+1^\circ$ Temp., ausgedrückt in Bruchtheilen der für 10° geltenden Nachwirkung.

Tabelle XIII.

	α		λ'		$\frac{\lambda'}{\lambda}$	γ
	Torsion	Dehnung	Torsion	Dehnung		
Messing	0,59	0,48	0,0011	0,00059	1,9	0,029
Kupfer	0,51	0,34	0,0045	0,0018	3,6	0,034
Silber.	0,49	0,27	0,0018	0,00098	1,8	0,036

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass die Längsnachwirkung viel geringer als die Torsionsnachwirkung, und dass α (Torsion) grösser als α (Dehnung) ist.

Die Nachwirkungen in Kupfer, Silber und Messing verhielten sich zu einander ungefähr wie 7:3:2 bei der Torsion und wie 4:3:2 bei der Dehnung. (Die ersteren Beobachtungen sind genauer als die letzteren.)

Der Temperaturcoefficient liegt bei der Torsion für alle drei untersuchten Metalle nicht weit von 1/30. Für die Ausdehnung scheint er ungefähr denselben Betrag zu erreichen.

Die Resultate, betreffend den Verlauf der Nachwirkung während und nach einer lange dauernden Belastung, sind wenig befriedigend, da sie alle eine dauernde Veränderung des Drahtes vermuthen lassen; es geht aus ihnen nur hervor, dass für nicht zu grosse, mehrere Tage dauernde Spannungen die Nachwirkung anscheinend zu ihrem Verschwinden ebensoviel Zeit braucht, wie für ihre Erzeugung, und dass die beiden Curven, wenn die Spannungen klein sind, ungefähr denselben Verlauf nehmen.

Aus den am Silberdrahte angestellten Untersuchungen scheint zu folgen, dass die Nachwirkung von dem Durchmesser des Drahtes wenig beeinflusst wird.