V.

Beobachtungen über die Klangfiguren auf ebenen nach allen Dimensionen schwingenden homo- genen Scheiben;

VON

STREHLKE, zweitem Lehrer d. Math. a. Gymn. zu Danzig.

Die sichere Hervorbringung der Klangfiguren hängt ab von der Wahl der klingenden Körper, von dem beweglichen Mittel, welches an gewissen Stellen der bewegten Oberfläche zur Ruhe kommt und von der sichern Aufstellung der tönenden Scheiben. Immer wird hier vorausgesetzt, daß die Erregung der Schwingungen durch einen Violinbogen geschieht.

Zur Hervorbringung der Klangfiguren scheinen sich vorzüglich möglichst genau gearbeitete Scheiben von Messing oder Glockenmetall zu eignen, von solcher Dicke, daß die Enden der Scheibe nicht in besondere, von den Hauptschwingungen unabhängige, Schwingungen versetzt werden können. Die Seitenlänge der von mir gebrauchten Quadratscheiben betrug 4 bis 6 Zoll Rheinl. bei einer Dicke von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ '''.

Den Gebrauch der Glascheiben kann ich nach meinen Erfahrungen weniger empfehlen, wenigstens dann nicht, wenn es darauf ankommt, möglichst bestimmte Figuren zur sichern Beobachtung hervorzu-
bringen. Denn nicht zu gedenken der gellenden Tö-

ne, welche tönende Glascheiben entwickeln, ein Umstand, der freilich nicht für jeden Beobachter und jede Umgebung gleich lästig wird, so geben gläserne Scheiben nie so reine und scharf begränzte Figuren, als metallene, zumal solche, die ein längerer Gebrauch fähig gemacht hat, volle und reine Töne anzugeben. Dafs jene Scheiben minder scharfe Figuren hervorbringen, mag vielleicht in der ungleichartigen Zusammensetzung der kleinsten Theile des Glases seinen Grund haben, nicht, wie es mir früher erschien, in der durch die Schwingungen der Scheibe erregten Elektrizität, welche die Bildung der Figuren auf einem Nichtleiter hindere, auf einer leitenden Metallscheibe ohne störenden Einfluß bleibe; denn auch isolirte Metallscheiben zeigen gleich regelmässige Bildungen. Uebrigens scheint die von Vielen bei der Bildung der Klangfiguren bemerkte Elektrizität nicht von der innern Bewegung des schwingenden Körpers abzuhängen, sondern von der Reibung des mit Harz bestrichenen Violinbogens, was um so wahrscheinlicher wird, da sie stets als negative auftritt.

Zur leichtern Orientirung in den Unterstützungspunkten und in den Stellen, wo die Scheibe durch den Bogen in Schwingung gesetzt werden soll, versteht man das Metall mit einem feinen Netze senkrecht einander durchschneidender Linien, welche selbst bei ansehnlicher Tiefe die regelmässige Bildung der Figuren nicht hindern, wie die Vergleichung mit ganz polirten Scheiben zeigt.

Die Bildung der Klangfiguren ist überdies noch durch die sichere Aufstellung der Scheiben bedingt. Die Scheiben mit den Fingerspitzen festzuhalten, ist

zunächst sehr unbequem, macht abhängig von der individuellen Struktur der Finger, deren größere oder geringere Oberfläche nicht ohne Einfluss auf die Hervorbringung der Figuren seyn kann; und möchte schon deshalb nicht rathsam seyn, weil durch die Finger dem Beobachter ein Theil der ruhenden Linien versteckt wird. Aber diese Art der Aufstellung wird sogar unmöglich in den dem Rande der Scheibe nahe gelegenen Punkten, wo die haltenden Finger nicht hinlängliche Kraft besitzen, um der am entgegengesetzten Ende der Scheibe, also am längern Hebelarme wirkenden Kraft des Bogens das Gleichgewicht zu halten.

Eine sehr sichere Aufstellung der Klangscheiben wird erreicht durch eine Art eiserner Gabel mit hölzernem Griffe, im Wesentlichen der obere Theil der von Hrn. Chladni zu diesen Versuchen vorgeschlagenen Schraube mit einigen Abänderungen. (Fig. 23. Taf. IV.)

Die beiden Schenkel der Gabel sind aus starkem Eisen verfertigt. Die Länge eines jeden Schenkels beträgt in meinem Exemplare 4 Zoll, die Breite $\frac{1}{4}$, die Höhe eben so viel. Der obere Schenkel endigt sich in einen Cylinder, durch welchen eine Schraube geht, die an ihrem obern Ende eine geriffte Kreisplatte von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser trägt. Der untere Theil der Schraube drückt auf eine Feder, welche am obern Theile des Verbindungsstücks der beiden Schenkel durch kleine Schrauben festgehalten wird. Der *obere* Theil, der in eine kleine Kreisplatte sich endigenden Feder nimmt in einer Vertiefung die Schraube auf, der *untere* Theil trägt eine kleine

Tuchscheibe von etwa 2^{'''} Durchmesser. Eine gleich große Tuchscheibe befindet sich, dieser gerade gegenüber auf einem kleinen metallenen Cylinder, welcher sich in den obern Theil des untern Schenkels einschrauben läßt. Man darf nicht vergessen, sowohl die Feder, als diesen Cylinder so einrichten zu lassen, daß sie beide leicht herausgenommen werden können. Denn bei einem längern Gebrauche haften die zum Bestreuen angewandten Sandkörner so fest an den Tuchscheiben, daß sie bei jeder Feststellung der Scheibe das Metall an dieser Stelle der Politur berauben. Dieser Umstand würde noch lästiger seyn ohne den Gebrauch der Feder, auf welche die Schraube ihre Wirkung äusert. Denn die Sandkörnchen, welche jetzt im schlimmsten Falle nur leichte Eindrücke in einzelnen Punkten des Metalls zurücklassen, würden, bei unmittelbarer Befestigung der Tuchscheibe an der Schraube, kreisförmige Verletzungen auf der Scheibe hervorbringen. Der hölzerne Griff der Gabel ist in der Figur nur angedeutet worden.

Die erwähnten Vorichtsmaßregeln hatten zum Zweck, die wohl unterstützte Klangscheibe in freie Schwingung zu versetzen; jetzt mögen die beweglichen Mittel betrachtet werden, welche dazu dienen, die durch die entgegengesetzten Schwingungen zur Ruhe gebrachten Stellen dem Auge sichtbar zu machen. Dazu können aber sowohl kleine Theilchen fester Körper als Flüssigkeiten dienen. Unter den festen Körpern scheint der reine staubfreie Quarzsand und noch mehr der schwere magnetische Eisenand, welcher sich an den Küsten des Meeres und an den Ufern der Binnenseen der Ostseeländer vorfindet, den

Vorzug zu verdienen. Weniger dürfte der von Hrn. Professor Oersted *) hierzu vorgeschlagene Pulvis Lycop. tauglich seyn. Denn da dieser zarte Staub sich so fest an das Metall hängt, daß er auch bei erfolgter Umkehrung der Scheibe nicht herabfällt, selbst dann nicht, wenn der Schlag eines Hammers auf die Scheibe geführt wird; wie darf man dann erwarten, daß die Schwingungen der Scheibe an Stellen, wo die ruhenden Linien sich sehr nahe kommen, im Stande seyn werden, den Staub abzuwerfen, der mit so großer Kraft an der Scheibe zurückgehalten wird? In der That hat auch die Anwendung jenes Staubes die Bildungen der Figuren versteckt.

Aber auch der Gebrauch des ganz staubfreien Sandes auf der sorgfältig gereinigten Scheibe erfordert noch einige Voricht. Denn sind *AB* und *CD* zwei ruhende Linien, beide einander sehr nahe: so werden sie für den zwischen ihnen liegenden Sand die Grenzen angeben, über welche ihn die Bewegung der Scheibe nicht führen kann; ist nun der Zwischenraum mit einer dicken Sandschicht bedeckt, so wird der Beobachter in der Biegung den Durchschnitt zweier Linien zu sehen glauben, wo in der That kein Durchschnitt vorhanden ist. Darum ist es nothwendig, die Scheibe nur mit wenig Sand zu bestreuen, so viel eben

*) Gehlens Journal für die Chemie, Phys. u. Mineralogie. VIII. 223. O. bediente sich indeß auch des Pulvers anderer Substanzen, unter welchen er besonders das gepülverte Blei, als dasjenige rühmt, welches die schärfsten Linien giebt. P.

hinreicht, die ruhenden Stellen sichtbar zu machen und keine derselben zu übergehen.

Mit diesen Vorichtsmafsregeln wird man es nach einer geringen Uebung in der sichern Führung des Bogens leicht dahin bringen, die Klangfiguren so rein und zart darzustellen, daß kein Sandkörnchen vereinzelt auf der glänzenden Tafel liegt, sondern alle einzeln an einander ruhen, wie auf einem unsichtbaren, mathematischen Faden aufgereiht.

Außer den festen Körpern können auch Flüssigkeiten, am bequemsten Wasser, in einer dünnen Schicht über die Scheibe gegossen, zur Bezeichnung der ruhenden Stellen dienen. Dieses Mittel, welches Hr. Wheatstone bekannt gemacht hat, dessen früheste Anwendung aber von Hrn. Chladni herrührt, wie man aus seiner Akustik sieht, wird ohne Zweifel dazu dienen, tiefer in diese verwickelten Erscheinungen der Akustik einzudringen, weil die Bewegung der Flüssigkeit sich unaufhörlich wiederholen läßt. Bei dieser Bewegung erscheint die ganze Oberfläche der Flüssigkeit wie mit einem Netze überzogen, welches anfangs weiter ist bei den tiefern Tönen der Scheibe, mit der zunehmenden Höhe der Töne sich zusammenzieht, und bei den höchsten Tönen, welche die Scheibe hervorbringen kann, dem feinsten Gewebe von der regelmäfsigsten Bildung gleicht. Dieses scheinbare Gewebe wird durch die kleinen Wellen hervorgebracht, die sich in verschiedenen Richtungen durchschneiden. Dabei folgen dieselben so regelmäfsig auf einander, daß man die Summe der einzelnen Wellen, welche sich zwischen zweien auf der Scheibe eingegrabenen Linien befin-

den, sehr genau zählen kann. Die Versuche mit einer solchen Wasserschicht zeigen auch zugleich deutlich, daß die ruhenden Stellen durch entgegengesetzte Bewegungen entstehen und daß die schwingende Scheibe nach allen 3 Dimensionen bewegt werde.

Zu einigen besondern Versuchen kann auch angefeuchteter Sand mit Vortheil angewendet werden. So läßt sich auf diese Weise darthun, daß in den Klangscheiben die ruhenden Stellen durch die Scheibe senkrecht auf die Oberfläche hindurch gehen. Auch kann dieses Mittel gebraucht werden, um die Schwingungen eines cylindrischen Glasgefäßes sichtbar zu machen. Ueberzieht man die innere und äußere Seite eines gewöhnlichen Trinkglases mit stark angefeuchtetem Sande, (welches für die innere Seite sehr leicht geschieht durch Drehung des Glases um seine horizontal gelegte Axe, wobei der angefeuchtete Sand sich an der innern Seite des Gefäßes anlegt,) und setzt das Glas durch einen Violinbogen in Schwingung, so vertheilt sich der Sand in 4 oder 6 Dreiecke, welche ihre Spitzen in dem Rande des Glases haben, während die übrigen Stellen desselben frei und durchsichtig werden (Fig. 22. T. IV.). Auf der äußern Seite erscheint eine gleich große Anzahl ruhender Stellen, welche aber zwischen den ruhenden der innern Seite liegen, nicht diese decken, wie es bei ebenen Scheiben der Fall ist.

Wendet man das oben beigebrachte Verfahren an, die ruhenden Stellen einer schwingenden Scheibe durch trockenen, staubfreien Quarz oder Eisenand sichtbar zu machen, so wird man sich von der Wahrheit folgender Beobachtungen überzeugen können:

- I. *Die Klangfiguren, oder die bei schwingenden Scheiben in Ruhe bleibenden Stellen der Oberfläche sind nicht gerade, sondern stets krumme Linien, aber Linien im Sinne der Geometrie, keine Flächen.*
- II. *Diese Linien durchschneiden sich nicht.*

Um diese Beobachtungen zu erläutern, wähle ich die einfachern Schwingungen einer Quadratscheibe, bemerke aber zuvor, daß bei allen folgenden Angaben das Tonverhältniß absichtlich übergangen ist; weil eine kleine Aenderung in den Unterstützungspunkten eine wesentliche Aenderung der Figur hervorbringen kann, ohne den Ton zu verändern. Deshalb ist es vorgezogen worden, zwei Seiten des vertikal vor dem Beobachter gedachten Quadrats als ein Axensystem anzusehen, dessen Anfangspunkt an dem linken Ende der untern Seite liegt, und die Lage des Unterstützungspunktes der Scheibe durch die zu diesen Axen parallele Coordinaten A, B , den Punkt der Schwingungsanregung durch a, b zu bezeichnen, wo die zur Einheit angenommene Seite des Quadrats, bei Rechtecken die längere Seite, als Maass der Coordinaten gilt. In den Zeichnungen deutet das Zeichen o die Stelle der Schwingungsanregung an *).

Legt man durch den Mittelpunkt der Scheibe zwei den Axen parallele Linien, wie in Fig. 2, Taf. III, und unterstützt in der Nähe des Mittelpunktes einen Punkt der Scheibe, der zwischen den beiden Schen-

*) Die mit Ch. bezeichneten Figuren sind die aus Hrn. Chladni's Akustik entlehnten hieher gehörigen.

keln eines der 4 rechten Winkel liegt, wobei es gleichgültig ist, welche der 4 Ecken des Quadrats in Schwingung versetzt wird; so erscheint entweder Fig. 1 oder 1*.

Fig. 1 für $\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} - \alpha \\ B = \frac{1}{2} - \beta \end{array} \right.$; $\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} + \alpha \\ B = \frac{1}{2} + \beta \end{array} \right.$

Fig. 1* für $\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} - \alpha, \text{ oder } \frac{1}{2} + \alpha \\ B = \frac{1}{2} + \beta, \text{ oder } \frac{1}{2} - \beta \end{array} \right.$

wo α und β die Veränderungen der Coordinaten ausdrücken, und stets positiv zu nehmen sind.

Wenn man die erste Figur mit +, die zweite mit — bezeichnet, so giebt die Ansicht der zweiten Figur im Allgemeinen die Veränderung der Lage an.

Die Größen α und β sind in gewissen Grenzen enthalten, zwischen denen die Kurve, eine Art Hyperbel, sich bewegt. Wird α verkleinert, so rücken die Schenkel der Kurve sich selbst und dem Mittelpunkt näher bis zu einer gewissen Gränze, von welcher an die Kurven nicht mehr, wie bis dahin durch den Unterstützungspunkt gehen. Zugleich tritt die Unmöglichkeit ein, voraus zu bestimmen, ob die Figur die Bildung 1 oder 1* annehmen werde, und es zeigt sich in diesem Falle dieselbe Schwingung, welche Hr. Savart bei den Longitudinalschwingungen freiwillige (spontané) Schwingungsart genannt hat.*)

) Die Figur 1 und 1 kann auch so hervorgebracht werden, daß man 3 Seiten des Quadrats in der Mitte des Randes etwa mit den Fingern unterstützt, und eine der 4 Ecken des Quadrats in Schwingung versetzt. Auch hier läßt sich nicht vorausbestimmen, welche Lage die Kurve annehmen werde; aber

Bei derselben Unterstützung und derselben Stelle der Schwingungserregung erscheint, wenn absichtlich die Scheibe in schnellere Schwingungen versetzt wird, Fig. 5, von welcher dieselben Bemerkungen über die Lage gelten *).

Wenn die Quadratscheibe durch 2 Diagonalen in 4 kongruente Dreiecke zerlegt wird, so erhält man, wenn ein Punkt in einem der 4 um den Mittelpunkt gebildeten rechten Winkel unterstützt wird, entweder Fig. 1 oder 1* Taf. IV;

$$\text{Fig. 1 für } \begin{cases} A = \frac{1}{2} - \alpha' ; \text{ oder } = \frac{1}{2} + \alpha' \\ B = \frac{1}{2} + \beta' ; \text{ oder } = \frac{1}{2} - \beta' \end{cases}$$

$$\text{Fig. 1* für } \begin{cases} A = \frac{1}{2} + \alpha' \text{ oder } = \frac{1}{2} - \alpha' \\ B = \frac{1}{2} - \beta' \text{ oder } = \frac{1}{2} + \beta' \end{cases}$$

Hier gelten von α' und β' dieselben Bestimmungen, wie bei Fig. 1 und 1* Taf. III. Die Lage läßt sich über gewisse Gränzen hinaus nicht vorher bestimmen, eben so wenig dann, wenn 3 Ecken des Quadrats unterstützt werden, während einer der 4 Seitenmittelpunkte die Schwingungen empfängt. Fig. 3 ist analog der Figur 3 Taf. III; Fig. 2 Taf. IV giebt das Schema der Veränderungen.

Auf die Figuren 1 und 1* Taf. III und IV lassen sich nun viele Klangfiguren zurückführen, unter der

jeder gegebenen Scheibe kommt entweder Fig. 1 oder 1* zu, und keine Seite der Scheibe verwechselt jemals die an ihr beobachtete Figur.

) Für diejenigen, welche diese Versuche anstellen wollen, bemerke ich noch, daß die Hervorbringung der Fig. 1 und 1 nicht ohne einige Schwierigkeit ist, daß aber die folgenden Figuren darzustellen, keine Mühe macht.

Voraussetzung, daß, wenn in einem Systeme kongruenter, fest mit einander verbundener Scheiben eine Scheibe eine gewisse Schwingung erhält, sich diese allen Scheiben des Systems mittheilt, wodurch eine einfache Schwingung sich genau 4 oder 9 Mal wiederholen kann, wenn das Quadrat als aus 4 oder 9 kongruenten Quadraten bestehend angesehen werden kann. Doch ist hierbei die Theilung in Rechtecke nicht ausgeschlossen. Die jedes Mal nach der obigen Ansicht wahrscheinlichen Theilungen sind in den Zeichnungen durch punktirte Linien angedeutet, können aber auch ganz übergangen werden; weil die Figuren Darstellungen der durch die Erfahrung ausgemittelten Klangfiguren sind, nicht solche, die sich aus jener Ansicht durch Zusammenfassung und Wiederholung der einfachen Formen ergeben.

Nehmen wir ein Rechteck an, wie Fig. 5 T. III, in welchem die Seiten sich wie 1 : 2 verhalten, so erscheint Fig. 5 T. III oder Fig. 5*, je nachdem das untere Quadrat die der Fig. 1 oder 1* zukommende Unterstützung erhält. Fig. 6 liefert das Schema der Veränderungen, und zeigt zugleich die 6 Stellen der Schwingungsanregung.

Auf der Gränze der Figuren + und — zeigt sich die freiwillige Schwingungsart, die in Fig. 7 und 7* dargestellt ist.

Das aus 2 Quadraten zusammengesetzte Rechteck werde nun durch Hinzufügung zweier Rechtecke zu

einem Quadrate ergänzt, wie diese in der dritten Quadratreihe auf Taf. IV angedeutet ist, dann erhält man

Fig. 8 für $\left\{ \begin{matrix} A = \frac{1}{2} + \alpha \\ B = \frac{1}{4} + \beta \end{matrix} \right.$ u. f. w.

Fig. 8_{*} für $\left\{ \begin{matrix} A = \frac{3}{2} + \alpha \\ B = \frac{1}{4} + \beta \end{matrix} \right.$ u. f. w.

Fig. 9 oder 9_{*} auf der Gränze von + und —, Fig. 12 bei derselben Unterstützung und derselben Stelle der Schwingungserregung, wenn die Schwingungen schneller werden, und sicherer, wenn noch ein Punkt unterstützt wird, dessen $A' = \frac{1}{8}$, $B' = \frac{1}{4}$ etc. Auf der Gränze von Fig. 12 und 12_{*} zeigt sich Fig. 13 und Fig. 13_{*}, die hier nicht verzeichnet ist *).

Um Fig. 15 zu erhalten, wird man einen Punkt unterstützen, dessen $\left\{ \begin{matrix} A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{2} \right) \left(\frac{2}{2} \right) \\ B = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{2}{4} \right) \left(\frac{2}{4} \right) \end{matrix} \right.$, wobei sich freilich nur die Lage der Figur auf dem 4ten Theile der Scheibe wird voraus bestimmen lassen, indem die andern Theile entweder die Schwingung 1 oder 1_{*} T. III machen können. Dadurch entsteht eine größere Mannigfaltigkeit von Formen, welche hier für den Fall dargestellt sind, wenn

$$\left\{ \begin{matrix} A = \frac{3}{2} + \alpha \\ B = \frac{1}{4} + \beta \end{matrix} \right.;$$

) Die Umkehrung der Figuren lässt sich besonders leicht für diese Stelle der Scheibe wahrnehmen; man hat aber nicht nöthig, um Fig. 8_{} darzustellen, die Unterstützung zu verändern, indem die untere Seite der Scheibe Fig. 8_{*} giebt, wenn die obere Fig. 8 zeigt.

doch muß ich bemerken, daß Fig. 16 und 17 mir nicht auf Quadratscheiben, wohl aber in Zusammen-
setzungen vorgekommen sind, wie auf dem Rechtecke

Fig. 18, für $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$

Auf der 4ten Tafel sind mit Ausnahme der 20ten und 21ten Figur die Schwingungsarten abgebildet, welche zu den Figuren 1 und 1* gehören. Ein Quadrat, so unterstützt, daß

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3} \pm \alpha & (\frac{2}{3} \pm \alpha) \\ B = \frac{2}{3} \pm \beta & (\frac{2}{3} \pm \beta) \end{cases}, \begin{cases} a = 0 & (\frac{2}{3}) & (1) \\ b = \frac{1}{3} & (0) & (1) & (\frac{2}{3}) \end{cases}$$

giebt die Fig. 5, Fig. 5*, wenn α sich vergrößert, während β constant bleibt, wobei die Schenkel der Kurven sich von einander entfernen, ohne jedoch jemals in gerade Linien, wie Fig. 6 Ch. überzugehen. Hier sind Fig. 7 und 10 die freiwilligen Schwingungsarten.

Fig. 12 zeigt sich für $\begin{cases} A = \frac{2}{3} \pm \alpha \\ B = \frac{2}{3} \pm \beta \end{cases}$ u. f. w.,

kann aber mit Fig. 12* und andern Bildungen abwechseln, welche hier übergangen sind; eben so kann Fig. 13* an die Stelle von 13 treten.

Figur 15 und 16 erscheint oft unter denselben Umständen; die erste kann aber stets mit Sicherheit für $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ oder $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$, die zweite für $\begin{cases} a = 0 & a = 1 \\ b = 1 & b = 0 \end{cases}$

hervorgebracht werden.

Figur 18 gehört zu einem Punkte, dessen

$$\begin{matrix} A = \frac{1}{2} & (\frac{1}{2}) \\ B = \frac{1}{4} & (\frac{1}{4}) \end{matrix} \text{ und einem Punkte, dessen } \begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{matrix} \text{ u. f. w.}$$

Fig. 21 zu $\frac{A}{B} = \frac{5}{9}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ u. f. w.

Diese Figur ist noch deshalb merkwürdig, daß sich hier die einfachern Schwingungen der Fig. 1 T. III auf 5 Quadraten mit den zusammengesetzten Schwingungen von Fig. 8 T. IV auf den 4 Eckquadraten verbinden.

Diese Bemerkungen scheinen hinzureichen, um den Sinn jener oben erwähnten Beobachtungen zu erläutern.