Um hieraus die Korrektur der Distanz $\Delta_1 = 3796.85$ zu erhalten, hat man für p, p_i, δ_i die auf p. 3-6 für 1909.0 gefundenen Werte von $p^{(1)}, p_i^{(1)}, \delta_i$ zu substituieren und in den Koeffizienten von $\cos \delta_i d\alpha_i$ den ebenfalls für 1909.0 gültigen Wert $\delta = +88^\circ 49' 14.78$ einzuführen. Fügt man

den so entstehenden Ausdruck von $d\Delta_1$ zu 3796.85 hinzu und setzt das erhaltene Resultat gleich $3796.77 + 1.10 d(100S)$, so ergibt sich die erste der folgenden Bedingungsgleichungen; dabei sind $d\alpha_1, d\delta_1$ die Korrekturen der auf p. 3-4 stehenden Werte α_1, δ_1 .

Bedingungsgleichungen.

$$\begin{array}{l|l} \Delta_1 & \alpha \text{ Ursae min.} - BD + 87^\circ 9' \\ \Delta_2 & \alpha \text{ Ursae min.} - BD + 89^\circ 3' \\ \Delta_3 & \alpha \text{ Ursae min.} - BD + 88^\circ 13' \\ \Delta_4 & \alpha \text{ Ursae min.} - BD + 87^\circ 23' \end{array} \quad \begin{array}{l} 1.10 d(100S) - 0.23 \cos \delta d\alpha - 0.97 d\delta = +0.08 - 0.12 \cos \delta_1 d\alpha_1 - 0.99 d\delta_1 \\ 1.01 d(100S) + 0.17 \cos \delta d\alpha + 0.98 d\delta = +0.03 + 0.72 \cos \delta_2 d\alpha_2 + 0.70 d\delta_2 \\ 0.97 d(100S) - 0.82 \cos \delta d\alpha + 0.58 d\delta = -0.05 - 0.97 \cos \delta_3 d\alpha_3 - 0.25 d\delta_3 \\ 0.90 d(100S) + 0.81 \cos \delta d\alpha - 0.58 d\delta = +0.13 + 0.53 \cos \delta_4 d\alpha_4 - 0.85 d\delta_4 \end{array}$$

Führt man für die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen die Bezeichnungen ein

Koeff. von:	Koeff. von:	Koeff. von:
$a \ d(100S)$	$d \ \cos \delta_1 d\alpha_1$	$h \ \cos \delta_3 d\alpha_3$
$b \ \cos \delta d\alpha$	$e \ d\delta_1$	$i \ d\delta_3$
$c \ d\delta$	$f \ \cos \delta_2 d\alpha_2$	$k \ \cos \delta_4 d\alpha_4$
	$g \ d\delta_2$	$l \ d\delta_4$

und gibt jeder Bedingungsgleichung das Gewicht 1, so erhält man für die Werte der Koeffizienten der Normalgleichungen

$[aa] = 3.9810$	$[bb] = 1.4103$	$[cc] = 2.5741$
$[ab] = -0.1477$	$[bc] = -0.5557$	$[cn] = -0.1526$
$[ac] = -0.0366$	$[bn] = +0.1330$	$[ca] = +0.1164$
$[an] = +0.1868$	$[bd] = +0.0276$	$[ce] = +0.9603$
$[ad] = -0.1320$	$[be] = +0.2277$	$[cf] = +0.7056$
$[ae] = -1.0890$	$[bf] = +0.1224$	$[cg] = +0.6860$
$[af] = +0.7272$	$[bg] = +0.1190$	$[ch] = -0.5626$
$[ag] = +0.7070$	$[bh] = +0.7954$	$[ci] = -0.1450$
$[ah] = -0.9409$	$[bi] = +0.2050$	$[ck] = -0.3074$
$[ai] = -0.2425$	$[bk] = +0.4293$	$[cl] = +0.4930$
$[ak] = +0.4770$	$[bl] = -0.6885$	
$[al] = -0.7650$		

Die aus den Normalgleichungen folgenden Werte der Unbekannten $100dS, \cos \delta d\alpha$ und $d\delta$, ausgedrückt als Funktionen von $\cos \delta_1 d\alpha_1, d\delta_1, \dots$ sind

$$\begin{aligned} 100dS = & +0.050 - 0.03 \cos \delta_1 d\alpha_1 - 0.26 d\delta_1 \\ & + 0.19 \cos \delta_2 d\alpha_2 + 0.19 d\delta_2 \\ & - 0.22 \cos \delta_3 d\alpha_3 - 0.06 d\delta_3 \\ & + 0.13 \cos \delta_4 d\alpha_4 - 0.21 d\delta_4 \end{aligned}$$

Wien, v. Kuffnersche Sternwarte, 1915 Juli 31.

$$\begin{aligned} \cos \delta d\alpha = & +0.083 + 0.04 \cos \delta_1 d\alpha_1 + 0.31 d\delta_1 \\ & + 0.24 \cos \delta_2 d\alpha_2 + 0.23 d\delta_2 \\ & + 0.50 \cos \delta_3 d\alpha_3 + 0.13 d\delta_3 \\ & + 0.30 \cos \delta_4 d\alpha_4 - 0.48 d\delta_4 \\ d\delta = & -0.041 + 0.05 \cos \delta_1 d\alpha_1 + 0.44 d\delta_1 \\ & + 0.33 \cos \delta_2 d\alpha_2 + 0.32 d\delta_2 \\ & - 0.11 \cos \delta_3 d\alpha_3 - 0.03 d\delta_3 \\ & - 0.05 \cos \delta_4 d\alpha_4 + 0.09 d\delta_4 \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $\cos \delta_1 d\alpha_1 = d\delta_1 = \cos \delta_2 d\alpha_2 = \dots = 0$ und demnach $100dS = +0.050, \cos \delta d\alpha = +0.083, d\delta = -0.041$, so nehmen die auf der linken Seite der Bedingungsgleichungen befindlichen Ausdrücke die hierunter mit R bezeichneten Werte an; zur Vergleichung mit denselben sind unter B die durch die Bedingungsgleichungen gegebenen Werte der Ausdrücke wiederholt.

R	B	R	B
$+0.076$	$+0.08$	-0.044	-0.05
$+0.024$	$+0.03$	$+0.136$	$+0.13$

Aus $\cos \delta d\alpha = +0.083$ in Verbindung mit dem schon angeführten Wert von δ folgt $d\alpha = +4.06$; fügt man diese Korrektur und die vorhin gefundene $d\delta = -0.04$ zu den für α Ursae min. angenommenen, auf das mittlere Äquinox und die Epoche 1909.0 bezogenen Koordinaten $\alpha = 21^\circ 37' 10.88$, $\delta = +88^\circ 49' 14.79$ hinzu, so erhält man als Endresultat

Mittl. Äquinox und Epoche 1909.0
 α Ursae min. $\alpha = 1^h 26^m 29.00 \ \delta = +88^\circ 49' 14.75$.

L. de Ball.

Mitteilung über Eigenbewegungssterne. Von M. Wolf.

Auf den jüngsten Planetenplatten B 3633-34 vom 12. Sept. 1915 konnte ich die E. B. des in A. N. 4767 mitgeteilten Sternes BD $-8^\circ 6' 17.7$

Nr. 11: $23^h 38^m 20^s - 8^\circ 26' 6$ (1900) nachmessen. Ich fand sie etwas größer als voriges Jahr, nämlich $\mu_\alpha = +0.56$.

Dabei fand ich einen zweiten bewegten Stern:

Nic 5940	$8^m 8$	$\alpha 1875 = 23^h 55^m 18^s$	$\delta 1875 =$
12	9.1	0 2 49	
34	7.8	0 11 4	
38	8.6	0 11 28	

und ihre E. B. aus Vergleichung mit 2 Aufnahmen vom 7. Sept. 1902 (1902.684) abzuleiten versucht.

Nic 5940 hat vielleicht eine Bewegung von $1''$ in

BD $-6^\circ 6' 30.8$
 Nr. 57: $23^h 47^m 29^s - 6^h 32' 6$ (1900)
 von der 9.2 Größe, mit einer jährlichen Bewegung $\mu_\alpha = +0.38$. Die Bewegung in δ ist gering.

Weiter habe ich auf den Planetenaufnahmen vom 13. Sept. 1915 (1915.701) die in das bestrichene Feld fallenden 4 bewegten Sterne des AG Kat. Nicolajew aufgesucht:

$\mu_\alpha =$	$\mu_\delta =$
-0.546	-0.13
-0.371	-0.039
-0.226	$+0.112$
-0.192	$+0.10$

13 Jahren gegen Süd gezeigt, also in Sinn und Größenordnung, wie im Katalog angegeben.

Nic 12. Die Eigenbewegung liegt entschieden unter $1''$

in 13 Jahren; die im Katalog angegebenen Bewegungen sind daher zweifellos unrichtig.

Nic 34. Bewegung bei der großen Scheibe des hellen Sternes kaum nachweisbar; Betrag vielleicht etwa 1" in 13 Jahren gegen Nord.

Nic 38. Meine Messung gab: $\mu_\alpha = +0.018$, $\mu_\delta = +0.08$, was mit den im Katalog gegebenen Bewegungen gut übereinstimmt.

Die Eigenbewegung von AG Nic 12 ist daher im Katalog zu streichen, während die anderen 3 Bewegungen beibehalten sind.

Ich füge noch zwei interessante Sterne, die ich auf den genannten Platten fand, bei:

Nr. 58 13^m5 α 1875 = 0^h 7^m12^s δ 1875 = $-0^\circ 22'3$

Nr. 59 9.5 0 12 25 +0 21.8.

Letzterer Stern ist = BD +0°32. Die Bewegung des ersten Sternes beträgt:

Nr. 58: $\mu_\alpha = +0.033$ $\mu_\delta = -0.19$

ist also recht beträchtlich, besonders für einen so schwachen Stern. Der zweite Stern 59 hat geringere Bewegung, ist aber dadurch interessant, daß er zur Zeit einem schwächeren Stern 11. Größe vorangeht, auf welchen er nahezu zentral zuläuft und den er in einigen Jahrzehnten erreichen mag. Die Bewegung beträgt:

Nr. 59: $\mu_\alpha = +0.013$ $\mu_\delta = -0.01$.

μ_δ ist für mich nicht meßbar, nur schätzbar, aber deutlich südwärts.

Die beiden neuen E.B.-Sterne finden sich auf unserer photographischen Sternkarte Blatt 20. Außer den beiden Sternen fand ich zwar noch einige schwach bewegte Sterne, deren Messung sich zur Zeit nicht lohnt; ich finde aber, daß die Gegend um den Frühlingspunkt herum auffallend arm an größeren Eigenbewegungen ist.

Königstuhl, 1915 Sept. 19.

M. Wolf.

Bemerkung über das Abbe-Helmertsche Kriterium. Von O. Meißner.

Bezeichnet man mit A die Quadratsumme der Fehler einer Beobachtungsreihe (streng ist A noch um die Hälfte des Quadrats des ersten und letzten Fehlers zu verringern), mit B die Quadratsumme der Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Fehler, so muß nach dem Abbe-Helmertschen Kriterium $A - \frac{1}{2}B = 0$ sein mit dem mittleren Fehler $\pm A/\sqrt{n-1}$, worin n die Zahl der Beobachtungen bedeutet, oder auch $2A/B = 1 \pm 1/\sqrt{n-1}$ m. F. Halten wir uns an die, von Helmholtz gegebene letzte Form, so sind also systematische Einflüsse zu vermuten, falls der Quotient $2A/B$ erheblich, also etwa mehr als $1/\sqrt{n-1}$, von 1 abweicht. Welcher Art diese systematischen Einflüsse sind, darüber gibt das Kriterium zunächst keinen Aufschluß.

I. Man kann nun für das Verhältnis $2A/B$ leicht eine untere Grenze finden. Sie ist $\frac{1}{2}$. B ist stets $\leq 4A$. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Differenz $\varepsilon_{v+1} - \varepsilon_v = 2d$ und halten den Wert von $2d$ fest. Dann ist $\varepsilon_{v+1}^2 + \varepsilon_v^2$ ein Minimum für $\varepsilon_v = -d$, $\varepsilon_{v+1} = +d$ (oder natürlich umgekehrt). Es ist dann diese Summe $= 2d^2$, während sie, falls $\varepsilon_{v+1} = d + \delta$, $\varepsilon_v = -(d - \delta)$, wobei $\delta \geq d$ sein kann, $= 2d^2 + 2\delta^2$, also wegen der Realität von δ , stets $> 2d^2$ ist. Bei konstantem B wird also A ein Minimum, falls die Fehler alle denselben absoluten Betrag und abwechselndes Vorzeichen haben. In diesem Falle wird $A = (n-1)d^2$, $B = 4(n-1)d^2$, d. h. eben $2A/B = \frac{1}{2}$.

II. Eine obere Grenze für den Quotienten $2A/B$ existiert theoretisch jedoch nicht, oder vielmehr sie ist von der Anzahl n der Fehler abhängig. Man kann sich nämlich leicht überzeugen, daß B am kleinsten wird, wenn die »Fehler« linear verlaufen, also etwa:

$$\varepsilon_1 = -nd, \varepsilon_2 = -(n-1)d \cdots \varepsilon_{2n+1} = +nd.$$

In diesem Falle sind die Differenzen $\varepsilon_{v+1} - \varepsilon_v$ alle $= d$; es wird $B = 2nd^2$, während, da die Summe der Quadrate von 1 bis $n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ist, $A = \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)d^2$ wird. Der Quotient $2A/B$ wird somit $= \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)$, für große Werte von n also annähernd $\frac{2}{3}n^2$. Noch größer kann er bei gegebenem n nicht werden.

III. Für den Fall, daß die Beobachtungen in gleichen Zeit- (oder Raum-) Intervallen folgen, der ja implizite eigentlich schon im vorigen Abschnitte angenommen war, kann man nun noch folgende Betrachtung anstellen. Wenn $2A/B$ für sehr kurze Perioden < 1 , für große — den linearen Verlauf kann man ja als unendlich lange Periode ansehen — > 1 ist, so muß es einen Zwischenwert geben, für den das Kriterium versagt, indem der Quotient trotz vorhandener Periodizität $= 1$ ist. Man überzeugt sich sofort, daß dies der Fall ist, wenn die Phasendifferenz von einem Gliede der Reihe bis zum nächsten 90° beträgt; z. B. für eine Sinuswelle und 45° Anfangsphase werden die Glieder $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdots$, die Differenzen abwechselnd 0 und $\sqrt{2}$, daher in der Tat $2A = B$, und so für jede beliebige Phase. Unter Benutzung der Ableitungen in den vorhergehenden Abschnitten kann man also sagen: im Falle eines rein periodischen Verlaufes ist für n Beobachtungswerte bei einer Phasendifferenz Δ zwischen je 2 Werten:

$$\Delta = 180^\circ \ 90^\circ \ 60^\circ \ 45^\circ \cdots \ 0$$

$$2A/B = \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 3.4 \cdots \frac{1}{3}(n+1)(2n+1).$$

(Man kann leicht nachrechnen, daß für 60° Phasendifferenz in der Tat $B = A$ wird.)

IV. Nun wird man ja in den betrachteten »idealen« Fällen das Abbe-Helmertsche Kriterium selbstverständlich nicht erst anzuwenden brauchen. Kommen zu der Periode noch zufällige Fehler hinzu, wie das in Wirklichkeit der Fall ist, so wirkt dies nach einer bekannten, einfachen fehlertheoretischen Überlegung im Sinne einer Annäherung des Quotienten an 1. Die obigen Werte sind also als Grenzwerte aufzufassen. Besonders wenn man die Länge der Perioden, die etwa da sein könnten, schon kennt, können die Ergebnisse der vorhergehenden Betrachtungen von Nutzen sein, aber auch ohne dieses; ist z. B. der Quotient > 3 , so wird man annehmen können, daß eine mindestens 8 Glieder der Reihe umfassende Periodizität vorhanden ist.

Potsdam, 1915 August 2.

Otto Meißner.