Sur les déformations finies et sur les systèmes triples de surfaces orthogonales. Par GASTON DARBOUX. Read, at request of the President, June 14th, 1900. Received November 6th, 1900.

1. Si l'on considère une transformation ponctuelle dans laquelle la relation entre les deux points homologues, de coordonnées x, y, z et X, Y, Z respectivement, est définie par des formules quelconques

$$(1) \quad \begin{cases} X = f(x, y, z), \\ Y = \varphi(x, y, z), \\ Z = \psi(x, y, z), \end{cases}$$

on peut encore envisager cette transformation comme une déformation finie d'un espace continu dans laquelle le point $m(x, y, z)$ est transporté au point $M(X, Y, Z)$. Ce point de vue est évidemment de nature à suggérer des recherches de nature très variée.

Par exemple, à tout élément infiniment petit de courbe qui part de m , la déformation fait correspondre un élément linéaire partant de M , et la relation entre ces deux éléments est évidemment de nature homographique.

Si nous nous proposons de chercher les éléments linéaires partant de m auxquels correspondent des éléments parallèles, nous aurons évidemment à résoudre le système

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dz}.$$

En désignant par λ la valeur commune des rapports précédents et en représentant par les indices 1, 2, 3 les dérivées relatives à x, y, z , nous sommes conduits au système

$$(2) \quad \begin{cases} (f_1 - \lambda) dx + f_2 dy + f_3 dz = 0, \\ \phi_1 dx + (\phi_2 - \lambda) dy + \phi_3 dz = 0, \\ \psi_1 dx + \psi_2 dy + (\psi_3 - \lambda) dz = 0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit par l'élimination de dx, dy, dz une équation du

troisième degré à laquelle devra satisfaire λ . De là résulte le théorème bien connu suivant :—

Dans une transformation ou dans une déformation finie quelconque, il y a en général trois éléments linéaires infiniment petits partant d'un point quelconque qui sont parallèles à leurs homologues.

Ces éléments, qui peuvent être d'ailleurs réels ou imaginaires, forment un trièdre que nous appellerons le *trièdre principal* du point considéré.

2. Dans l'ensemble des déformations finies, proposons-nous de chercher toutes celles pour lesquelles le trièdre principal est trirectangle. En nous reportant aux idées de Cauchy et d'Helmholtz, nous dirons que ces déformations sont *dépourvues de rotation*.

Si nous désignons par les caractéristiques d et δ les différentielles relatives à deux éléments linéaires, arêtes du trièdre principal, nous devrons avoir

$$\begin{cases} df = \lambda dx, \\ d\phi = \lambda dy, \\ d\psi = \lambda dz, \end{cases} \quad \begin{cases} \delta f = \lambda_1 \delta x, \\ \delta \phi = \lambda_1 \delta y, \\ \delta \psi = \lambda_1 \delta z, \end{cases}$$

et aussi, en supposant les axes rectangulaires,

$$dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z = 0;$$

de là on déduira l'équation

$$df \delta x - \delta f dx + d\phi \delta y - \delta \phi dy + d\psi \delta z - \delta \psi dz = 0,$$

que donnera, en développant,

$$(f_3 - \phi_1)(\delta x dy - dx \delta y) + (\phi_3 - \psi_1)(\delta y dz - dy \delta z) + (\psi_1 - f_3)(\delta z dx - \delta x dz) = 0.$$

Les binomes $\delta y dz - dy \delta z$, ... sont les paramètres directeurs de la droite perpendiculaire aux deux éléments, c'est-à-dire ici de la troisième arête du trièdre principal.

Si donc on désigne par d_1 les différentielles relatives à cette troisième arête, il faudra que l'on ait

$$(\phi_3 - \psi_1) d_1 x + (\psi_1 - f_3) d_1 y + (f_3 - \phi_1) d_1 z = 0.$$

Cette égalité devant avoir lieu pour les trois arêtes du trièdre entraîne nécessairement les suivantes :—

$$\phi_3 = \psi_1, \quad \psi_1 = f_3, \quad f_3 = \phi_1.$$

Ainsi, pour qu'une déformation finie soit dépourvue de rotation, il faut et il suffit que f, ϕ, ψ soient les trois dérivées partielles d'une même fonction.

Par suite, une déformation sans rotation sera définie par les équations suivantes :—

$$(3) \quad X = v_1, \quad Y = v_2, \quad Z = v_3,$$

où v_1, v_2, v_3 sont les dérivées partielles d'une fonction quelconque v .

Tous ces résultats étant démontrés ou plutôt rappelés, proposons-nous maintenant la question suivante :—

3. Parmi les déformations dépourvues de rotation, en existe-t-il pour lesquelles les faces du trièdre principal relatif à chaque point de l'espace s'ordonnent suivant les plans tangents à trois familles de surfaces, qui seront nécessairement deux-à-deux rectangulaires ?

On peut évidemment résoudre ce problème comme il suit.

On considéra une famille de surfaces (Θ)

$$\theta(x, y, z) = \text{const.},$$

et l'on exprimera que la normale à celle des surfaces qui passe en un point quelconque m est une des arêtes du trièdre principal en m .

Les arêtes de ce trièdre étant définies par les équations déjà données

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dy} = \frac{dv_3}{dz} = \lambda,$$

il suffira de développer dv_1, dv_2, dv_3 et de remplacer ensuite dx, dy, dz par les quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ proportionnelles aux cosinus-directeurs de la normale à la surface (Θ) , ce qui donnera

$$(4) \quad \frac{\delta_v v_1}{\theta_1} = \frac{\delta_v v_2}{\theta_2} = \frac{\delta_v v_3}{\theta_3} = \lambda,$$

le symbole $\delta_v f$ étant employé ici, et dans ce qui va suivre, pour exprimer la combinaison suivante :—

$$\delta_v f = \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \theta_3 f_3 = \delta_f \theta.$$

Si, dans les équations (4), nous faisons, pour le moment, abstraction de λ , nous aurons deux équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles devra satisfaire la fonction θ . Prenons, par exemple, les suivantes :—

$$(5) \quad \begin{cases} \theta_2 \delta_v v_1 - \theta_1 \delta_v v_2 = 0, \\ \theta_3 \delta_v v_1 - \theta_1 \delta_v v_3 = 0. \end{cases}$$

En écrivant qu'elles sont compatibles, c'est-à-dire en écrivant que le crochet de Jacobi relatif à ces deux équations est nul, nous serons d'abord conduits après quelques réductions, à l'équation suivante :—

$$\theta_1 (\delta_s v_2, \delta_s v_3) + \theta_2 (\delta_s v_3, \delta_s v_1) - \theta_3 (\delta_s v_1, \delta_s v_2) = 0;$$

puis, en remplaçant les crochets de Jacobi () par leurs expressions, nous obtiendrons l'équation suivante :—

$$(6) \quad (\delta_s v_{12} - \delta_r v_{13}) \theta_1^2 + (\delta_s v_{23} - \delta_r v_{23} + \delta_r v_{13} - \delta_s v_{11}) \theta_1 \theta_2 + \dots = 0,$$

où les termes non écrits s'obtiennent par des permutations circulaires, et qui est, comme les équations (5), du second ordre par rapport aux dérivées de θ .

Si l'on exclut une solution parasite, les équations (5) fournissent trois systèmes de valeurs seulement pour les rapports mutuels de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Si un seul système de ces valeurs vérifiait les équations (6), une seule des trois faces du trièdre principal relatif aux différents points de l'espace serait formée de plans tangents à une famille de surfaces. Nous allons voir que ce cas ne saurait se présenter : Si un système de solutions des équations (5) vérifie l'équation (6), il en est de même des deux autres. En langage géométrique :

Si une des faces du trièdre principal est formée de plans tangents à une famille de surfaces, il en est de même des deux autres faces de ce trièdre principal.

Pour démontrer ce résultat, reportons-nous aux équations (4) et ordonnons-les suivant les dérivées θ . En désignant par les notations v_{ik} les dérivées secondes de v , nous aurons les équations

$$(7) \quad \begin{aligned} (v_{11} - \lambda) \theta_1 + v_{12} \theta_2 + v_{13} \theta_3 &= 0, \\ v_{21} \theta_1 + (v_{22} - \lambda) \theta_2 + v_{23} \theta_3 &= 0, \\ v_{31} \theta_1 + v_{32} \theta_2 + (v_{33} - \lambda) \theta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par D le déterminant

$$(8) \quad D = \begin{vmatrix} v_{11} - \lambda & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} - \lambda & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} - \lambda \end{vmatrix},$$

et par D_{ik} le coefficient de l'élément appartenant à la i -ième ligne et à la k -ième colonne du déterminant, on déduit, comme on sait, des

équations (7), les relations suivantes :—

$$\frac{\theta_1^2}{D_{11}} = \frac{\theta_2^2}{D_{22}} = \dots = \frac{\theta_1 \theta_2}{D_{12}} = \dots,$$

qui permettent de remplacer l'équation (6) par la suivante :—

$$(9) \quad (\delta_{r_3} v_{12} - \delta_{r_2} v_{13}) D_{11} + \dots + (\delta_{r_2} v_{23} - \delta_{r_3} v_{22} + \delta_{r_1} v_{13} - \delta_{r_1} v_{11}) D_{12} + \dots = 0;$$

d'où les dérivées θ_i ont disparu puisque les déterminants D_{11} , D_{12} contiennent seulement λ . Mais λ lui-même disparaît comme on s'en assure aisément, de sorte que, si l'on désigne par Δ le déterminant (8) où λ sera égal à zéro, on est conduit à l'unique équation

$$(10) \quad V_{11} \Delta_{11} + \dots + V_{12} \Delta_{12} + \dots = 0,$$

où l'on a posé pour abréger

$$(11) \quad \begin{cases} V_{11} = \delta_{r_3} v_{12} - \delta_{r_2} v_{13}, \\ V_{12} = \delta_{r_2} v_{23} - \delta_{r_3} v_{22} + \delta_{r_1} v_{13} - \delta_{r_1} v_{11}. \end{cases}$$

On a aussi

$$(12) \quad \Delta_{11} = v_{22} v_{33} - v_{23}^2, \quad \Delta_{12} = v_{13} v_{23} - v_{12} v_{23},$$

de sorte qu'il sera très facile de former l'équation (10).

Nous avons en résumé le théorème suivant :—

Si la fonction v satisfait à l'équation aux dérivées partielles (10), les trois faces du trièdre principal seront tangentes à trois familles de surfaces, nécessairement orthogonales. Si non, aucune des faces du trièdre principal ne demeurera tangente aux surfaces d'une famille quelconque.

4. L'équation (10) est aux dérivées partielles du troisième ordre ; elle est homogène, ne contient ni la fonction v ni les dérivées premières de cette fonction. De là résulte que, si l'on en connaît une solution particulière

$$v = \phi,$$

on en aura une solution plus générale par la formule

$$v = k\phi + ax + by + cz + d,$$

où a , b , c , d , k sont des constantes. Mais il y a plus : les calculs par lesquels λ s'est éliminé de l'équation (10), montrent aussi qu'on pourra ajouter à toute solution connue la combinaison

$$\kappa (x^2 + y^2 + z^2),$$

où κ désigne une constante, de sorte qu'à toute solution ϕ on pourra faire correspondre la solution

$$h\phi + \kappa (x^2 + y^2 + z^2) + ax + by + cz + d,$$

qui contient six constantes.

Introduite dans les formules (4) cette propriété, nous donne le théorème suivant :—

Toute transformation dépourvue de rotation peut, sans perdre le caractère précédent, être composée avec une homothétie.

5. Avant de développer et d'appliquer les résultats précédents il importe que je rappelle quelques propositions relatives aux systèmes triples de surfaces orthogonales.

Etant donné un système triple quelconque de surfaces orthogonales, Combescure a montré le premier qu'on peut établir une infinité de transformations ponctuelles de l'espace faisant correspondre au système triple un système triple orthogonal, telles en outre que les plans tangents aux points correspondants des surfaces correspondantes dans les deux systèmes triples soient parallèles. De mon côté j'ai obtenu le théorème de Combescure par une voie nouvelle, et j'ai montré que, si, conservant les notations de Lamé, on représente l'élément linéaire de l'espace par la formule

$$(13) \quad ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2,$$

et si l'on forme les trois équations linéaires aux dérivées partielles,

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} \frac{\partial u}{\partial \rho_i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} \frac{\partial u}{\partial \rho_i} = 0 \quad (i, \kappa = 0, 1, 2),$$

auxquelles satisfont les coordonnées x, y, z considérés comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 , toute solution U des trois équations (14) donnera un des systèmes découverts par Combescure, à l'aide des formules suivantes :—

$$(15) \quad X \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + Y \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + Z \frac{\partial z}{\partial \rho_i} = \frac{\partial U}{\partial \rho_i} \quad (i = 0, 1, 2);$$

d'où l'on déduit presque immédiatement que, si U était exprimée en x, y, z , on aurait aussi

$$(16) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

De là résulte qu'à tout système orthogonal on peut faire correspondre une infinité de ces transformations dépourvues de rotation que nous avons

considérées. Il suffit de prendre une solution quelconque des trois équations aux dérivées partielles (14) de l'exprimer au moyen de x, y, z ; la transformation sera alors définie par les formules (16). Comme la solution générale des équations (14) comporte trois fonctions arbitraire d'une seule variable, on voit bien qu'on pourvu obtenir avec le même degré de généralité, une infinité de transformations de la nature de celles que nous étudions.

6. Puisqu'à tout système triple correspondent une infinité de transformations sans rotation, on voit que l'on peut aborder la recherche des systèmes triples en cherchant d'abord de telles transformations, c'est-à-dire en essayant d'intégrer l'équation aux dérivées partielles (10), de sorte que cette équation peut remplacer celle dont j'avais indiquée l'existence dès 1866 dans les *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* et qui a été formée en premier lieu par Cayley. Les deux équations sont, l'une et l'autre, du troisième ordre; mais elles ne s'appliquent pas à la même fonction et sont d'ailleurs de formes tout-à-fait différentes.

7. On peut évidemment donner un grand nombre de solutions particulières de l'équation (14); je me contenterai de signaler la suivante :—

$$v = ax^m y^n z^p,$$

où a, m, n, p sont des constantes quelconques; et je remarquerai, en terminant, que l'on exprime la propriété essentielle des déformations précédentes sous la forme suivante :—

On peut, à l'aide de trois familles de surfaces, partager l'espace en petits parallélépipèdes rectangles que la déformation transporte parallèlement à eux-mêmes, en les dilatant ou les contractant dans chacune de leurs trois dimensions.