XVIII. Ueber Grassmann's Methode der Axendarstellung und ihre Anwendung auf die Lösung gewisser krystallographischer Probleme.

Von

W. J. Lewis in Cambridge, England.

(Mit 2 Textfiguren).

Grassmann bezog in seiner 1829 publicirten Abhandlung »Zur physischen Krystallographie und geometrischen Combinationslehre« einen Krystall auf drei Flächennormalen — Strahlen — als Bezugsaxen, wobei die Parameter die den Axen parallelen Kanten eines Parallelepipeds sind, dessen Diagonale eine bestimmte Länge einer bekannten Normale ist, welche mit keinem Paare der Axenstrahlen coplanar ist. Irgend eine andere Normale wird alsdann dargestellt durch die Diagonale eines ähnlich gebildeten Parallelepipeds, welches zu Kanten parallel den Axen Längen besitzt, welche rationale Vielfache der Parameter sind. Grassmann gab keine Formeln an, durch welche allgemein die Indices von Flächennormalen aus Messungen der Winkel am Krystalle gefunden werden, noch solche zur Bestimmung der Winkel aus den Krystallelementen und Indices. Frankenheim (Crelle's Journal für Mathematik 1832, 8, 178) gab einen Ausdruck für den Cosinus des Winkels zwischen zwei beliebigen Strahlen, aber dieser Ausdruck hat nicht die jetzt gebräuchliche Form. Miller in seiner Abhandlung über die Methode (Proc. Camb. Phil. Soc. 1868, 2, 75), beschränkt sich auf einige allgemeine, auf Zonen bezügliche Probleme. Der Platz, welcher mir in meinem »Treatise on Crystallography 1899« für den Gegenstand zur Verfügung war, erlaubte mir nur, die Beziehung anzugeben, welche die Strahlenparameter mit denen eines auf Zonenaxen bezogenen Krystalles verbindet. Aber die Neigung eines beliebigen Strahles zu den Bezugsaxen und zu irgend einem anderen Strahl kann leicht gefunden werden auf dem Wege, welcher für die ähnlichen Relationen zwischen der Richtung einer Linie und solchen Axen, welche Kanten des Krystalles sind, in Kap. XIX, Arts.

9, 40, 44, 43 und 44 meines Treatise benutzt worden ist. Die Beziehungen, welche sich ergeben, wenn der Krystall auf Axenstrahlen bezogen wird, sind unmittelbar anwendbar auf die durch Goniometermessung erhaltenen Winkel und sind in vieler Hinsicht einfacher, als die in den oben erwähnten Artikeln gegebenen Relationen. Da ausserdem Grassmann's Axendarstellung manche elegante Ausdrücke liefert, welche auf die Auflösung von einigen bei der Bestimmung der Flächensymbole und Winkel der Krystalle vorkommenden Problemen anwendbar sind, so habe ich gedacht, es möchte sich nützlich erweisen, einige der Hauptrelationen aufzustellen.

Wir werden in Folgendem stets annehmen, dass dieselben drei Flächen zur Bestimmung des Axensystems ausgewählt werden, indem die Axenstrahlen deren Normalen und die gewöhnlichen Axen deren Schnittkanten darstellen. Wir werden mit Ox , Oy und Oz die Strahlen bezeichnen, welche respective senkrecht zu den Flächen (100), (010) und (001) sind. OG sei der Parameterstrahl (111), und wir werden ihn senkrecht zu der Fläche (111), bezogen auf Zonenaxen, annehmen. Die Strahlenparameter werden mit a , b , c und die Winkel zwischen den Axenstrahlen mit α , β , γ bezeichnet. Die entsprechenden Parameter und Winkel, wenn der Krystall auf Zonenaxen bezogen wird, seien a , b , c , α_1 , β_1 , γ_1 . Ein beliebiger Strahl (hkl) ist alsdann gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{x}{ha} = \frac{y}{kb} = \frac{z}{lc} \quad (1)$$

und die Strahlenparameter sind mit den auf Zonenaxen bezüglichen verbunden durch die Gleichungen

$$\frac{aa}{\sin \alpha} = \frac{bb}{\sin \beta} = \frac{cc}{\sin \gamma} \quad (2)$$

oder die mit ihnen äquivalenten

$$\frac{aa}{\sin \alpha_1} = \frac{bb}{\sin \beta_1} = \frac{cc}{\sin \gamma_1} \quad (2^*)$$

Satz I. Es ist die Länge eines gegebenen Strahles (hkl) durch die Indices, die Strahlenparameter und die Winkel zwischen den Axenstrahlen auszudrücken.

Es sei $OLPN$ das Parallelepip, welches OP als Diagonale und als Kanten parallel den Axen die Längen hat:

$$\begin{aligned} OL = FM = ha, \quad OM = LF = kb, \\ ON = PF = lc. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Neigung von OP zu den Axen Ox , Oy , Oz soll mit λ , resp. μ , ν bezeichnet werden.

Fig. 4.

Da die Summe der orthogonalen Projectionen der drei Kanten OL , LF und FP auf OP gleich der Länge OP sein muss, so haben wir

$$\begin{aligned} OP &= OL \cos \lambda + LF \cos \mu + FP \cos \nu \\ &= ha \cos \lambda + kb \cos \mu + lc \cos \nu. \end{aligned} \quad (4)$$

Ferner erhalten wir, wenn wir die orthogonalen Projectionen von OP und der drei erwähnten Kanten des Parallelepipedes auf jeden der Axenstrahlen abwechselnd nehmen, die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} OP \cos \lambda &= OL + LF \cos \gamma + FP \cos \beta = ha + kb \cos \gamma + lc \cos \beta \\ OP \cos \mu &= ha \cos \gamma + kb + lc \cos \alpha \\ OP \cos \nu &= ha \cos \beta + kb \cos \alpha + lc \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Multipliziert man beide Seiten von (4) mit OP und führt die Werthe von $OP \cos \lambda$, etc. aus (5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} OP^2 &= ha(ha + kb \cos \gamma + lc \cos \beta) + kb(ha \cos \gamma + kb + lc \cos \alpha) \\ &\quad + lc(ha \cos \beta + kb \cos \alpha + lc) = \Sigma h^2 a^2 + 2 \Sigma k l b c \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Satz II. Es sind die Richtungscosinus eines beliebigen Strahles und die Relation gesucht, welche zwischen ihnen und den Winkeln zwischen den Axenstrahlen besteht.

Die Richtungscosinus werden gefunden, indem man in (5) den in (6) gegebenen Werth von OP einsetzt, dieselben sind daher:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{ha + kb \cos \gamma + lc \cos \beta}{\sqrt{\Sigma h^2 a^2 + 2 \Sigma k l b c \cos \alpha}} \\ \cos \mu &= \frac{ha \cos \gamma + kb + lc \cos \alpha}{\sqrt{\Sigma h^2 a^2 + 2 \Sigma k l b c \cos \alpha}} \\ \cos \nu &= \frac{ha \cos \beta + kb \cos \alpha + lc}{\sqrt{\Sigma h^2 a^2 + 2 \Sigma k l b c \cos \alpha}} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Die Gleichungen (4) und (5) gelten für einen beliebigen Strahl. Eliminiert man daher OP , ha , kb , lc aus den vier Gleichungen, so erhält man die zwischen den Richtungscosinus bestehende Relation; diese ist

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \\ \cos \lambda & 1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \mu & \cos \gamma & 1 & \cos \alpha \\ \cos \nu & \cos \beta & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Satz III. Es sind die Indices eines beliebigen Strahles durch die Winkel, welche derselbe mit den Axenstrahlen bildet, auszudrücken.

Löst man die Gleichungen (5) für ha , kb , lc auf, so erhält man

$$ha \div \begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \mu & 1 & \cos \alpha \\ \cos \nu & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = kb \div \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \beta \\ \cos \gamma & \cos \mu & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$= l\mathbf{c} \div \begin{vmatrix} 1 & \cos \beta & \cos \lambda \\ \cos \gamma & 1 & \cos \mu \\ \cos \beta & \cos \alpha & \cos \nu \end{vmatrix} = OP \div \begin{vmatrix} 1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Ferner erhält man, wenn man den Werth von OP , wie er in (4) gegeben ist, in die Gleichungen (5) einsetzt, die folgenden, unter Umständen verwendbaren Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} h\mathbf{a} \sin^2 \lambda + k\mathbf{b}(\cos \gamma - \cos \lambda \cos \mu) + l\mathbf{c}(\cos \beta - \cos \lambda \cos \mu) &= 0 \\ h\mathbf{a}(\cos \gamma - \cos \lambda \cos \mu) + k\mathbf{b} \sin^2 \mu + l\mathbf{c}(\cos \alpha - \cos \mu \cos \nu) &= 0 \\ h\mathbf{a}(\cos \beta - \cos \lambda \cos \nu) + k\mathbf{b}(\cos \alpha - \cos \mu \cos \nu) + l\mathbf{c} \sin^2 \nu &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Satz IV. Gesucht die Gleichung der zu einem Strahle (hkl) senkrechten Ebene, d. h. der Fläche (hkl) .

Die Ebene möge durch den Punkt P gehen, d. h. den Endpunkt der Diagonalen des Parallelepipedes mit den Kanten $h\mathbf{a}$, $k\mathbf{b}$, $l\mathbf{c}$, und der Strahl möge mit den Axenstrahlen die Winkel λ , μ , ν bilden.

Die Summe der orthogonalen Projectionen der Coordinaten x, y, z eines beliebigen in der Ebene liegenden Punktes auf OP ist gleich OP .

$$\therefore OP = x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu.$$

Führt man die Werthe von $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ aus (5) und den Werth von OP^2 aus (6) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} (x - h\mathbf{a})(h\mathbf{a} + k\mathbf{b} \cos \gamma + l\mathbf{c} \cos \beta) + (y - k\mathbf{b})(h\mathbf{a} \cos \gamma + k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \cos \alpha) \\ + (z - l\mathbf{c})(h\mathbf{a} \cos \beta + k\mathbf{b} \cos \alpha + l\mathbf{c}) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Die parallele Ebene durch den Ursprung ist:

$$\begin{aligned} x(h\mathbf{a} + k\mathbf{b} \cos \gamma + l\mathbf{c} \cos \beta) + y(h\mathbf{a} \cos \gamma + k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \cos \alpha) \\ + z(h\mathbf{a} \cos \beta + k\mathbf{b} \cos \alpha + l\mathbf{c}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Satz V. Gesucht der Winkel φ zwischen zwei beliebigen Strahlen (hkl) und $(h_1 k_1 l_1)$.

OP in Fig. 4 sei der Strahl (hkl) , und seine Neigung zu den Axenstrahlen sei λ resp. μ , ν . Dann gelten für ihn die in den vorhergehenden Sätzen gegebenen Relationen. Wenn man annimmt, dass der Strahl $(h_1 k_1 l_1)$ durch die Diagonale OP_1 eines ähnlichen Parallelepipedes gegeben sei und dass seine Richtungswinkel λ_1 , μ_1 , ν_1 seien, so muss die orthogonale Projection von OP auf OP_1 gleich der Summe aus den Projectionen der Kanten OL , LF , FP auf OP_1 sein.

$$\begin{aligned} \text{Daher: } OP \cos \varphi &= OL \cos \lambda_1 + LF \cos \mu_1 + FP \cos \nu_1 \\ &= h\mathbf{a} \cos \lambda_1 + k\mathbf{b} \cos \mu_1 + l\mathbf{c} \cos \nu_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Aber $\cos \lambda_1$, $\cos \mu_1$, $\cos \nu_1$, OP_1 sind miteinander verbunden durch Gleichungen, welche ähnlich den in (5) gegebenen sind. Multiplicirt man beide Seiten von (13) mit OP_1 und ersetzt $OP_1 \cos \lambda_1$ etc. durch ihre Werthe, so erhält man:

$$OP.OP_1 \cos \varphi = ha(h_1a + k_1b \cos \gamma + l_1c \cos \beta) \\ + kb(h_1a \cos \gamma + k_1b + l_1c \cos \alpha) + lc(h_1a \cos \beta + k_1b \cos \alpha + l_1c).$$

Folglich:

$$\cos \varphi = \frac{\Sigma h h_1 a^2 + \Sigma b c (k l_1 + l k_1) \cos \alpha}{\sqrt{\Sigma h^2 a^2 + 2 \Sigma k l b c \cos \alpha} \sqrt{\Sigma h_1^2 a^2 + 2 \Sigma k_1 l_1 b c \cos \alpha}}. \quad (14)$$

Dieser Ausdruck ist einfacher und übersichtlicher als irgend einer der Ausdrücke (44) und (47) auf S. 569 und 570 meines Treatise on Crystallography. Ferner kann er leicht in jeden von ihnen umgewandelt werden mit Hülfe der Relationen (2). So ist, um (47) zu erhalten, für a, b, c nur nöthig ihre Werthe aus (2) einzusetzen:

$$\cos \varphi = \frac{\Sigma \frac{h h_1}{a^2} \sin^2 \alpha + \Sigma \frac{k l_1 + l k_1}{b c} \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha}{\sqrt{\Sigma \frac{h^2}{a^2} \sin^2 \alpha + 2 \Sigma \frac{k l}{b c} \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha} \sqrt{\Sigma \frac{h_1^2}{a^2} \sin^2 \alpha + 2 \Sigma \frac{k_1 l_1}{b c} \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha}}.$$

Gleichung (44) wird durch eine ähnliche Substitution gefunden mit Hülfe der Relationen eines sphärischen Dreiecks:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos (A = \pi - \alpha_1), \text{ etc.}$$

Wir werden nun sehen, wie diese Methode auf die Lösung krystallographischer Probleme angewendet werden kann. Es möge ein trikliner Krystall angenommen und verlangt werden, die linearen Elemente aus einigen bekannten Winkeln zu finden. Es sollen die Buchstaben und die Bezeichnung von S. 164 meines Treatise angenommen werden, und es sei die Zone $[BLC] = [010, 001]$ als bekannt vorausgesetzt. Durch Einführung der Indices 0, 1, 1 von L in die 1. und 2. Gleichung (7) erhält man:

$$\cos (AL = 100 : 011) = \frac{b \cos \gamma + c \cos \beta}{\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}} \quad (15)$$

$$\text{und} \quad \sec^2 (D = 010 : 011) = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}{(b + c \cos \alpha)^2};$$

$$\therefore \operatorname{tg}^2 D = \sec^2 D - 1 = \frac{c^2 (1 - \cos^2 \alpha)}{(b + c \cos \alpha)^2};$$

$$\therefore \operatorname{tg} D = \frac{c \sin \alpha}{b + c \cos \alpha} \quad (16)$$

$$\text{ferner} \quad \frac{\sin D}{c \sin \alpha} = \frac{\cos D}{b + c \cos \alpha} = \frac{\sin (\alpha - D)}{b \sin \alpha};$$

$$\therefore \frac{b}{c} = \frac{\sin (\alpha - D)}{\sin D} = \frac{\sin D}{\sin D}. \quad (17)$$

Diese Gleichung, welche das Parameterverhältniss $\frac{b}{c}$ liefert, giebt

Grassmann S. 438; aber da er versucht, das Verhältniss mit den Abständen zwischen aufeinander folgenden Partikeln zu verbinden, so differirt sein Ausdruck ein wenig von dem obigen. Er kann mittelst der Relationen (2) leicht in die Gleichungen umgewandelt werden, welche die Parameter auf den correspondirenden Zonenaxen liefern. Der letztere Ausdruck ist:

$$\frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} = \frac{\sin D_1}{\sin D}$$

oder

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin BL}{\sin CL} \cdot \frac{\sin CA}{\sin AB} \quad (18)$$

Durch Einführung der Werthe (104) und (110) in (7) erhalten wir correspondirende Ausdrücke für die anderen Parameterverhältnisse. Diese sind:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin E_1}{\sin E}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin F_1}{\sin F} \quad (19)$$

Ferner, wenn L gleich $0kl$, so erhalten wir aus der zweiten Gleichung von (7)

$$\cos BL_1 = \frac{k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \cos \alpha}{\sqrt{k^2\mathbf{b}^2 + l^2\mathbf{c}^2 + 2kl\mathbf{b}\mathbf{c} \cos \alpha}},$$

daraus

$$\operatorname{tg} BL_1 = \frac{l\mathbf{c} \sin \alpha}{k\mathbf{b} + l\mathbf{c} \cos \alpha} \quad (20)$$

und

$$\frac{\sin BL_1}{\sin (\alpha - BL_1)} = \frac{\sin BL_1}{\sin CL_1} = \frac{l\mathbf{c}}{k\mathbf{b}} \quad (21)$$

Dividirt man (21) durch (17), so erhält man das anharmonische Verhältniss der vier Pole $\{BL, LC\}$, welches ist:

$$\frac{\sin BL_1}{\sin CL_1} \cdot \frac{\sin BL}{\sin CL} = \frac{l}{k} \quad (22)$$

Die Ableitung specieller Formeln für die Systeme mit grösserer Symmetrie ist leicht. Wir wollen uns hier auf die Betrachtung des rhomboëdrischen Systems beschränken.

Rhomboëdrisches System.

In diesem Systeme werden die Normalen zu den Ebenen der primären trigonalen Pyramide oder des Rhomboëders zu Axenstrahlen gewählt und die dreizählige Axe als Parameterstrahl (111).

Daher $\alpha = \beta = \gamma$; $a = b = c$ werde gleich 1 gesetzt.

Die Gleichungen (3) werden:

$$\left. \begin{aligned} OP \cos \lambda &= h + (k + l) \cos \alpha = h(1 - \cos \alpha) + \theta \cos \alpha \\ OP \cos \mu &= k(1 - \cos \alpha) + \theta \cos \alpha \\ OP \cos \nu &= l(1 - \cos \alpha) + \theta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

wo

$$\theta = h + k + l.$$

$$\text{Ferner } OP^2 = \Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl = \theta^2 \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \Sigma h^2. \quad (24)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{h(1 - \cos \alpha) + \theta \cos \alpha}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}} \\ \cos \mu &= \frac{k(1 - \cos \alpha) + \theta \cos \alpha}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}} \\ \cos \nu &= \frac{l(1 - \cos \alpha) + \theta \cos \alpha}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}} \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

$\mathcal{A}_1$ wird:

$$(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha) - (1 - \cos^2 \alpha) \Sigma \cos^2 \lambda \\ + 2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha) \Sigma \cos \lambda \cos \mu.$$

Da dies gleich Null ist, erhalten wir als Relation zwischen den Richtungscosinus:

$$(1 + \cos \alpha) \Sigma \cos^2 \lambda - 2 \cos \alpha \Sigma \cos \lambda \cos \mu = (1 - \cos \alpha) (1 + 2 \cos \alpha). \quad (26)$$

Wenn der Strahl mit der dreizähligen Axe co'indicirt, so wird $\lambda = \mu = \nu = D = 444 : 400$, dann reducirt sich Gleichung (26) auf:

$$3 (1 - \cos \alpha) \cos^2 D = (1 - \cos \alpha) (1 + 2 \cos \alpha); \\ \therefore 3 \cos^2 D = 1 + 2 \cos \alpha. \quad (27)$$

Daher:

$$2 \cos \alpha = \frac{2 - \operatorname{tg}^2 D}{1 + \operatorname{tg}^2 D}. \quad (28)$$

Ferner:

$$3 \sin^2 D = 2 (1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (29)$$

Diese letzte Gleichung ist äquivalent der wohlbekannten Formel:

$$\sin \frac{r'r}{2} = \sin 60^\circ \sin D,$$

wo r und r' zwei Pole des primären Rhomboëders sind.

Der Ausdruck (14) für den Cosinus des Winkels zwischen den Strahlen (hkl) und $(h_1 k_1 l_1)$ wird:

$$\cos \varphi = \frac{\Sigma h h_1 + \cos \alpha \Sigma (k l_1 + k_1 l)}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma k l} \sqrt{\Sigma h_1^2 + 2 \cos \alpha \Sigma k_1 l_1}}. \quad (30)$$

Wenn $\cos \alpha$ durch sein in (28) gegebenes Aequivalent ersetzt wird, so erhalten wir die folgenden Ausdrücke für den Cosinus:

$$\cos \varphi = \frac{2 \{ \Sigma h h_1 + \Sigma (k l_1 + k_1 l) \} + \operatorname{tg}^2 D \{ 2 \Sigma h h_1 - \Sigma (k l_1 + k_1 l) \}}{\sqrt{2 (\Sigma h^2 + 2 \Sigma k l) + 2 \operatorname{tg}^2 D (\Sigma h^2 - \Sigma k l)} \sqrt{2 (\Sigma h_1^2 + 2 \Sigma k_1 l_1) + 2 \operatorname{tg}^2 D (\Sigma h_1^2 - \Sigma k_1 l_1)}} \\ = \frac{2 \theta \theta_1 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma (k - l) (k_1 - l_1)}{\sqrt{2 \theta^2 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma (k - l)^2} \sqrt{2 \theta_1^2 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma (k_1 - l_1)^2}}. \quad (31)$$

Ebenso

$$\begin{aligned}\cos 2\eta &= \cos(hkl : khl) = \frac{l^2 + 2hk + \cos\{\theta^2 - (l^2 - 2hk)\}}{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl} \\ &= \frac{2\theta^2 + \operatorname{tg}^2 D \{3(l^2 + hk) - \theta^2\}}{2\theta^2 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}.\end{aligned}\quad (37)$$

$$\therefore 2 \sin^2 \eta = \frac{2(h-k)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma hl} = \frac{3(h-k)^2 \operatorname{tg}^2 D}{2\theta^2 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}.\quad (38)$$

Und

$$\begin{aligned}\cos 2\zeta &= \cos(hkl : \bar{l}\bar{k}\bar{h}) = \frac{-(k^2 + 2hl) - \cos \alpha \{\theta^2 - (k^2 + 2hl)\}}{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl} \\ &= \frac{-2\theta^2 - \operatorname{tg}^2 D \{3(k^2 + 2hl) - \theta^2\}}{2\theta^2 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}.\end{aligned}\quad (39)$$

Daher

$$2 \cos^2 \zeta = \frac{2(h-l)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl} = \frac{3(h-l)^2 \operatorname{tg}^2 D}{2\theta^2 + \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}.\quad (40)$$

Nun ist jeder der Winkel ξ , η und ζ kleiner als 90° , da jeder der Winkel an den Skalenoëderkanten kleiner als 180° ist. Nehmen wir daher, was wir zu thun berechtigt sind, h , k und l in der Reihenfolge mit abnehmender Grösse und ihre Summe grösser als Eins an, so müssen die positiven Werthe genommen werden, wenn die Quadratwurzeln der Gleichungen (36), (38) und (40) ausgezogen werden. Wir erhalten daher:

$$\left. \begin{aligned}\sin \xi &= \frac{(k-l) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}} = \frac{(k-l) \sqrt{3} \operatorname{tg} D}{\sqrt{4\theta^2 + 2 \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}}; \\ \sin \eta &= \frac{(h-k) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}} = \frac{(h-k) \sqrt{3} \operatorname{tg} D}{\sqrt{4\theta^2 + 2 \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}}; \\ \cos \zeta &= \frac{(h-l) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}} = \frac{(h-l) \sqrt{3} \operatorname{tg} D}{\sqrt{4\theta^2 + 2 \operatorname{tg}^2 D \Sigma(k-l)^2}}.\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Daher:

$$\frac{\sin \xi}{k-l} = \frac{\sin \eta}{h-k} = \frac{\cos \zeta}{h-l} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\Sigma h^2 + 2 \cos \alpha \Sigma kl}}$$

= [durch Transformation aus (32)]:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3} \sin CP}{\sqrt{2} \Sigma(k-l)^2} &= \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} D}{\sqrt{4\theta^2 + 2 \operatorname{tg}^2 D \Sigma(h-l)^2}} \\ &= [\text{aus (32)}] \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} D \cos CP}{2\theta};\end{aligned}\quad (42)$$

und

$$\sin \xi + \sin \eta = \cos \zeta.\quad (43)$$