10. *Ueber die Beziehung der Aequipotentiallinien
und der magnetischen Kraftlinien; von*
L. Boltzmann.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe
der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1893. Bd. XXIII. Heft II.

Da eine Abhandlung im vorigen Octoberhefte dieser Annalen ¹⁾ an den nachfolgenden Aufsatz unmittelbar anknüpft, der meine einzige Publication über die Beziehung von Stromlinien und Magnetkraftlinien ist, so ersuchte ich um dessen Abdruck an dieser Stelle.

§ 1. In vier Abhandlungen ²⁾ hat Hr. Prof. v. Lommel eine äusserst interessante Methode angegeben, die Aequipotentiallinien in durchströmten Platten sichtbar zu machen und meines Wissens auch zum ersten Male die wichtige Frage nach ihrer Beziehung zu den Magnetkraftlinien angeregt. Dass diese beiden Curvenscharen im Allgemeinen einen ähnlichen Verlauf nehmen, zeigt Hr. v. Lommel in folgender Weise: Die Aequipotentiallinien oder in durchströmten Körpern die Aequipotentialflächen stehen immer senkrecht zu den Stromlinien. Die magnetischen Kraftlinien umkreisen jeden Stromfaden in einer Fläche, die denselben senkrecht durchschneidet. An der Oberfläche eines Leiters wird die gesammte magnetische Kraft die Resultirende aller Magnetkraftlinien sein, die alle Stromfäden umkreisen. Da hierbei die in der unmittelbaren Nachbarschaft liegenden Stromfäden das meiste zur Summe beitragen und zu ihrer eigenen Richtung senkrechte Magnetkraftlinien liefern, so werden auch die resultirenden Magnetkraftlinien gewissermassen eine Tendenz haben an der Oberfläche senkrecht zu den Stromlinien zu stehen, also sich der Richtung der Durchschnittslinien der Aequipotentialflächen mit der Körperoberfläche anzuschliessen.

Da aber zu den Magnetkraftlinien auch die entfernten

1) E. v. Lommel, Wied. Ann. **50**. p. 320. 1893.

2) Ausser l. c. Wie: Ann. **48**. p. 462; **49**. p. 539; **50**. p. 316. 1893.

Stromfäden, über deren Richtung man im Allgemeinen nichts weiss, beitragen, so werden die resultirenden Magnetkraftlinien im Allgemeinen aus den Aequipotentialflächen heraustreten können. Nach Maxwell's Theorie wird freilich der magnetische Zustand in jedem Punkte nur durch die Zustände der unmittelbaren Umgebung bedingt; man könnte daher meinen, die Magnetkraftlinien müssten an jeder Stelle durch die unmittelbar benachbarten Stromfäden allein schon bestimmt sein. Allein das wäre ein Irrthum, da durch die unmittelbar benachbarten Stromfäden bloss eine Differentialgleichung für die Magnetkraft bestimmt ist, diese selbst aber noch von Grenzbedingungen abhängt, die für Magnetkraftlinien und Aequipotentialflächen ganz verschiedene sind.

Betrachten wir zuerst einen Punkt einer durchströmten Fläche: Die xy -Ebene sei Tangentialebene derselben im betrachteten Punkte, die x -Richtung sei die Stromrichtung. Für die Componenten α, β, γ der magnetischen Induction, welche in unmagnetisirbaren Substanzen mit denen der magnetischen Kraft zusammenfallen, haben wir dann:

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

u ist die Stromdichte, v und w verschwinden. Da α, β und γ , wenn die Platte dünn ist, in der z -Richtung viel rascher als in den darauf senkrechten variiren, so erhalten wir:

$$\beta_0 - \beta_1 = 4\pi \int u dz, \quad \alpha_0 = \alpha_1$$

wozu noch kommt

$$\gamma_0 = \gamma_1,$$

was aus der Gleichung

$$\frac{d(\mu\alpha)}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz} = 0$$

folgt, wo μ die constant angenommene Magnetisirungszahl ist. Der Index Null bezieht sich dabei auf die eine, der Index 1 auf die andere Plattenseite. Bei jeder von Electricität durchströmten Fläche ist daher die Differenz der magnetischen Kraft auf der einen und anderen Seite endlich und senkrecht auf der Strömungsrichtung. Hätte man daher einen Nordpol auf der einen und einen gleich starken Südpol auf der anderen Seite fest verbunden, so dass sie miteinander längs der Fläche

beweglich wären, so würde die gesammte auf beide zusammenwirkende Kraft D überall senkrecht auf den Stromlinien sein. Addirt man hierzu noch die Kraft S , welche 2 gleich starke, gleich verbundene und gleich gelegene Nordpole erfahren würden, so erhält man die Kraft $M = D + S$, welche ein doppelt so starker nur auf der einen Seite befindlicher Pol erfährt. Die letztere Kraft ist daher immer senkrecht zu den Stromlinien, wenn die Kraft S es ist. Es folgt dies auch ohne Rechnung daraus, dass zu D nur die den Polen unmittelbar benachbarten Stromtheile beitragen, welche man als parallel in einer Ebene strömend betrachten kann. S könnte auch bezeichnet werden als die Kraft, welche an der betreffenden Stelle auf einen mitten in der Platte befindlichen Nordpol von doppelter Stärke wirkt. Ist die Platte eben, so ist S immer senkrecht auf der Platte, daher auch auf den Stromlinien und daher fallen auf der Oberfläche die Kraftlinien, d. h. die Linien, welche überall die Richtung der zur Platte parallelen Componente der magnetischen Kraft angeben, mit den Aequipotentiallinien zusammen. Natürlich stören auch Zuleitungsdrähte nicht, die in derselben Ebene liegen.

Hat man in einer Ebene einen Magnetpol und im Raume 2 Stromelemente, die vollkommen symmetrisch bezüglich dieser Ebene liegen, so steht die resultirende Kraft, die sie auf den Magnetpol ausüben, stets senkrecht auf dieser Ebene, wie man am besten sieht, wenn man diese Ebene als yz -Ebene wählt, darin die z -Axe durch den Magnetpol legt, die xy -Ebene aber durch beide Stromelemente und in deren Richtung legt, so dass beide zur y -Axe symmetrisch liegen. Ist die Stromrichtung der y - oder z -Richtung parallel, so hat die Magnetkraft die x -Richtung, ist die Stromrichtung der x -Richtung parallel, so ist die magnetische Kraft Null. Daraus folgt, dass, wenn die durchströmte Fläche an einer Stelle eben ist, an anderen aber sich in 2 zu dieser Ebene symmetrische Theile theilt, die auch symmetrisch durchflossen werden, in dem ebenen Theile die Kraft S immer senkrecht zu dessen Ebene ist und die magnetischen Kraftlinien nicht aufhören Aequipotentiallinien zu sein.

Wollte man daher nach Hrn. v. Lommel's Methode die Aequipotentiallinien auf einer Platte in einem Falle zeigen,

wo sich die Electroden nicht am Rande befinden, so könnte man 2 gleich beschaffene bezüglich der Plattenebene symmetrische Electrodenröhre benutzen. Aus dem Gesagten folgt weiter: Wenn eine durchströmte Fläche oder ein Körper eine Symmetrieebene haben, bezüglich deren auch die Stromlinien symmetrisch sind, so muss dieselbe im Körper Stromfläche sein und die magnetischen Kraftlinien müssen darauf senkrecht stehen. Die Thatsache, dass die Kraft, die auf einen Magnetpol wirkt, der sich mitten im Innern eines durchströmten ebenen Bleches befindet, immer senkrecht auf dem Bleche steht, ist hiervon eigentlich nur ein specieller Fall. Ein anderer bezieht sich auf eine Rotationsfläche, in der die Stromlinien Meridiancurven sind, oder einen Rotationskörper, in dem die Stromflächen Rotationsflächen von gleicher Axe sind; die magnetischen Kraftlinien sind dann Parallelkreise.

Die Zahl der allgemeinen Bedingungen, unter denen die magnetischen Kraftlinien senkrecht zu den Stromlinien sind, liesse sich sicher noch vermehren: doch zeigt schon das gesagte, dass, falls die gesammte Strömung in einer Ebene vor sich geht, die Magnetkraftlinien mit den Aequipotentiallinien zusammenfallen und zwar liefert es hierfür meines Wissens den ersten strengen Beweis. Für gekrümmte Flächen und räumlich ausgedehnte Körper aber wird dies im Allgemeinen nicht zutreffen, so in dem in der 2. Abhandlung Hrn. von Lommel's durch Fig. 2 ¹⁾, sowie in den in der 4. Abhandlung durch Fig. 2 und 3 ²⁾ dargestellten Fällen.

Ein Satz von solcher Allgemeinheit, wie ihn Hr. v. Lommel auf der ersten Seite seiner zweiten Abhandlung ³⁾ ausspricht, wo das Zusammenfallen der Magnetkraftlinien und Aequipotentialkraftlinien für die Oberfläche beliebiger durchströmter Körper behauptet wird (daher auch für beliebige krumme durchströmte Flächen, die ja immer als Grenzfälle sehr dünner Körper betrachtet werden können), ist daher unrichtig.

Da gegen meine in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie gebrachten Beispiele der Einwand erhoben wurde, es werde daselbst die Abweichung der Aequipotentiallinien von den Magnetkraftlinien durch ein fremdes Magnetfeld verursacht,

1) Lommel, Wied. Ann. **49**. p. 544. 1893.

2) Lommel, Wied. Ann. **50**. p. 322. 1893.

3) Lommel, Wied. Ann. **49**. p. 539. 1893.

so will ich hier ein anderes Beispiel wählen, bei welchem dieser Einwand gänzlich ausgeschlossen scheint.

Es sei ein sehr dünnes, homogenes, durchaus gleich dickes Blech gegeben, das die Gestalt einer Halbkugelfläche vom Centrum O und Radius Eins hat. Die beiden Hälften des grössten Kreises, der die Halbkugelfläche begrenzt, mögen DFE und DGE heissen; D und E (zwei vis-à-vis liegende Pole der Kugel) mögen die Electroden sein; F und G sind beliebig auf den entsprechenden Halbkreisen gewählt. OD sei die positive x -Axe, in der Halbebene DFE liege die positive y -Axe und gegen die Halbkugel gewendet die positive z -Axe. Wir denken uns in F einen Magnetpol von der Stärke Eins und suchen die Kraft FP , welche die ganze in der Halbkugel vor sich gehende Strömung von der Gesamtintensität i darauf in der Richtung tangential zum Halbkreise DFE ausübt. Der Leser wird sich leicht selbst die Figur machen.

Wir bezeichnen den Winkel DOF mit A und verbinden D und E noch mit einem grössten Halbkreise DJE , dessen Ebene mit der Ebene DFE den beliebigen Winkel B bildet. Der Punkt J ist ebenfalls beliebig auf DJE gewählt und durch den Winkel $DOJ = C$ bestimmt. Wächst C um dC , so erhalten wir das Bogenelement $JK = dC$; wächst auch noch B um dB , so erhalten wir auf der Kugel ein Flächenelement $dB \cdot dC \cdot \sin C$. Die Kraft, welche die durch dieses Flächenelement gehende Strömung auf den Magnetpol ausübt, ist $i dB \cdot dC \sin(r, JK) / \pi r^2$, wobei $r = FJ$ die Entfernung des Magnetpols vom wirkenden Stromelemente ist. Multipliciren wir noch mit dem Cosinus des Winkels zwischen n und FP , so erhalten wir die Componente dQ dieser Kraft in der Richtung FP . n sei senkrecht zu r und JK . Setzt man $a = \cos A$, $\alpha = \sin A$, $b = \cos B$, $\beta = \sin B$, $c = \cos C$, $\gamma = \sin C$, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke $JD F$:

$$\cos(JOF) = ac + \alpha b \gamma, \quad r^2 = 4 \sin^2(JOF/2) = 2(1 - ac - \alpha b \gamma).$$

Sei OK' der Radius der Kugel, der parallel JK ist, so ist die Projection von r auf OK' gleich der von OF auf OK' , daher $r \cdot \cos(r, JK) = \cos(FOK) = -a\gamma + \alpha b c$. Letzteres folgt aus dem sphärischen Dreiecke KDF . JK , JF , FP wählen wir als die positiven Richtungen dieser Geraden. Es

folgt $r^2 \sin^2(r, JK) = (1 - ac - ab\gamma)^2 + a^2\beta^2$. Ferner sind die mit $r \sin(r, JK)$ multiplicirten Richtungscosinus von n gleich $a\beta c$, $\beta - a\beta c$, $abc - b + a\gamma$ und daher

$$r \sin(r, JK) \cos(n, FP) = \beta(a - c).$$

Einer meiner Hörer, Hr. stud. math. Leonhard Fleischmann, bewies diese Relation auch synthetisch, indem er das Volumen des Tetraeders $OJHF$ einmal mit JHF als Basis, dann mit OHF als Basis berechnete; H ist der Schnittpunkt von JK und OD .

Die Componente der Gesamtkraft der Strömung auf den Magnetpol in der Richtung FP ist daher

$$Q = \frac{i}{\pi 2^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi dC \int_0^\pi dB \frac{\beta(a-c)}{(1-ac-ab\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Ausführung der Integration nach B liefert

$$Q = \frac{i}{a\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{dC(a-c)}{\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{1-ac-a\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{1-ac+a\gamma}} \right).$$

Wären die Electroden nicht Punkte, sondern Parallelkreise, deren Centra auf der Geraden DE liegen, so wäre

$$Q = \frac{i}{\pi a\sqrt{2}} \int_\epsilon^{\pi-\vartheta} \frac{dC(a-c)}{\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{1-ac-a\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{1-ac+a\gamma}} \right).$$

Die Integration ist in zwei Theile von ϵ bis A und dann von A bis $\pi - \vartheta$ zu theilen und liefert:

$$Q = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{4}\right) - l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{l \operatorname{tg} \frac{A}{4} - l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\epsilon}{4}\right)}{\cos \frac{A}{2}} \right].$$

$l \operatorname{tg}$ bedeutet den natürlichen Logarithmus der trigonometrischen Tangente. Dieser Ausdruck ist im allgemeinen nicht Null; daher stehen die Magnetkraftlinien im allgemeinen nicht senkrecht auf dem Rande der Halbkugelfläche und können daher auch nicht mit den Aequipotentiallinien zusammenfallen.

Die Definition der Aequipotentiallinien ist dabei folgende:

Von 2 Galvanometerdrähten setze man den einen an einem beliebigen Punkt der Oberfläche eines leitenden durchströmten Körpers auf; der Inbegriff aller Punkte, wo der 2. aufzusetzen ist, damit das Galvanometer stromlos bleibt, ist eine Aequipotentiallinie.

§ 2. Bezüglich der, wie alle auf einer neuen Idee beruhenden Verknüpfungen zweier Phänomene, äusserst interessanten Versinnlichung des Hallphänomens, welche Hr. v. Lommel in der 1. Abhandlung gibt, möchte ich folgendes bemerken: So gut als wir die Stromrichtung der positiven Electricität ins Auge fassen, können wir auch auf die der negativen unser Augenmerk richten; dann würden in der Fig. 3 von Hrn. v. Lommel's 1. Abhandlung p. 374¹⁾ die den Pfeilen bei *A* und *B* entgegenetzten die Stromrichtung der negativen Electricität andeuten; auch in den Ampère'schen Strömen des Magnetfeldes würden wir die Stromrichtung der negativen Electricität durch einen dem gekrümmten Pfeile entgegengesetzten auszudrücken haben. Die Molekularströme der Platte würden einen resultirenden Strom geben, in dem die negative Electricität wieder den gefiederten Pfeilen entgegengesetzt fliesst. Die Molecularströme sind also wie bei Hrn. v. Lommel längs *ab* dem Primärstrom entgegen, längs *cd* aber gleichgerichtet. So gut wie der Strom der positiven wird also auch der der negativen Electricität längs *ab* vermindert, längs *cd* verstärkt. Man würde daher auch, wenn man die Strömung der negativen Electricität verfolgt, zu dem Resultate kommen, dass im Punkte *D* ein höheres Potentiale (eine höhere die jetzt negative Electricität treibende Kraft) als im Punkte *C* herrscht und folgerichtig jetzt schliessen, dass auch die negative Electricität von *D* durch das Galvanometer nach *C* fliesst, dass also im Hallstrome positive und negative Electricität in derselben Richtung fliessen oder wenigstens würde man, wenn es zufällig üblich wäre, statt der positiven die negative Electricität zu verfolgen, in der Halleitung für die negative dieselbe Stromrichtung finden, wie sie Hr. v. Lommel für die positive findet. Natürlich würde man dieser Consequenz vom unitarischen Standpunkt oder auch, wenn man

1) Wied. Ann. 48. p. 464. 1893.

positive und negative Electricität als nicht gleichberechtigt betrachtet, entgegen, dann aber für den Hallstrom den entgegengesetzten Sinn finden, je nachdem man die positive oder die negative Electricität als die allein existirende betrachtet.

§ 3. Aus der Erfahrung und Theorie übereinstimmend folgt (vgl. meine Theorie des Hallphänomens, Sitzungsber. der Wien Akad. Bd. 94 S. 644, 1886, unmittelbar nach Gleichung 12), dass die electromotorische Kraft des Hallstroms $\varepsilon = CMJ/d$ ist, wo C eine Constante des Materials, J die Stärke des Primärstroms, M die Intensität des Magnetfeldes und d die Plattendicke ist. Diese electromotorische Kraft ist die Potentialdifferenz, welche an 2 vor Wirkung des Magnets äquipotentialen Stellen des Plattenrandes durch das Magnetfeld erzeugt wird, wenn diese durch keinen Nebenschluss (Halleitung) verbunden sind; also auch wenn dieser Nebenschluss zwar vorhanden, aber darein eine electromotorische Kraft $-\varepsilon$ eingefügt wäre. Wird diese dann entfernt, so tritt in der Halleitung genau dieselbe Stromintensität i auf, in der Platte aber zum Primärstrom hinzu, welche allein aufträte, wenn der Primärstrom ganz hinweggenommen würde und bloss in der Halleitung die electromotorische Kraft $+\varepsilon$ thätig wäre. Ist also r der Widerstand der Galvanometerleitung zwischen den beiden Punkten, wo sie die Platte berührt, R der Widerstand der Platte zwischen denselben Punkten, so ist:

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}.$$

Dies ist richtig, ob r gross oder klein gegen R ist, was auch schon experimentell bestätigt wurde.¹⁾ Nur wenn gleichzeitig r nicht gross gegen R , und C sehr gross wäre, könnten Abweichungen eintreten; es würde dann die Intensität des Hallstroms nicht klein gegen die des primären und daher durch den ersteren selbst wieder ein Hallstrom 2. Ordnung erzeugt, der dem Primärstrom entgegenwirken würde. Dass zum Gelingen des Hallversuches die Bedingung erfordert würde,

1) Vgl. Eittingshausen u. Nernst, über das Hall'sche Phänomen Sitzungsber. d. Wien. Akad. 94. p. 579. 1886.

dass r klein gegen R sei, scheint mir ein Missverständniss zu sein, welches offenbar durch den Umstand hervorgerufen wurde, dass bei Gold, wo C klein ist, r nicht allzugross gegen R sein darf, da ja dieses dem Widerstande der Batterie, jenes dem äussern Widerstand vergleichbar ist und der günstigste Effekt bekanntlich immer eintritt, wenn diese beiden Widerstände nicht allzu verschieden sind oder, wenn man diese Analogie nicht gelten lassen will, da der Halleffekt nur der Breite der Platte und der Dichte des Primärstroms proportional ist, letztere aber nur bei dünnen Platten genügend gross gemacht werden kann. Desshalb wurden aus einem so gut leitenden Materiale wie Gold äusserst dünne Platten gewählt. Es entspricht der Erfahrung, wenn H. v. Lommel die electromotorische Kraft des Hallstroms proportional JM und verkehrt proportional d findet; dass er sie aber auch verkehrt proportional dem Galvanometerwiderstand dagegen die Klemmspannung der Galvanometerleitung von r unabhängig findet, scheint mir ein Räthsel.

§ 4. Bezüglich der Ableitung der Strömung in der Kugel durch H. v. Lommel bemerke ich nur, dass mir erstens der Beweis, dass die 2 Kugelsysteme, die sich rechtwinklig durchschneiden, wirklich als Aequipotentiale und dazu gehörige Stromflächen betrachtet werden können sowie, dass hierbei die Strömung in einer Kugelschale von überall gleicher Dicke gefunden wird, noch der Ergänzung zu bedürfen scheint.