1841. ANNALEN *No.* 12.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND LIV.

I. *Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts in comprimirten oder ungleichförmig erwärmten unkrystallinischen Körpern;*

von K. E. Neumann.

(Ein dem Novemberberichte der Academie entnommener Auszug von der Abhandlung.)

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in drei Abschnitte. In dem ersten Abschnitt (§. 1 bis §. 5) beschäftige ich mich mit dem Gesetz der Doppelbrechung des Lichts in *gleichförmig* dilatirten oder comprimirten unkrystallinischen Körpern. Gleichförmig nenne ich die Dilatation (oder Contraction) eines Körpers, wenn dieselbe an jeder Stelle desselben sowohl in Beziehung auf Richtung als Gröfse gleich ist, wiewohl sie in den verschiedenen Richtungen verschieden ist. Wenn ein rechtwinkliches Parallelepipedon, welches mit einer seiner Seitenebenen auf einer festen ebenen Unterlage ruht, durch einen gleichmäfsig, über die gegenüberstehende Seitenebene vertheilten, senkrecht gegen dieselbe gerichteten Druck comprimirt wird, so ist dieser Körper gleichförmig comprimirt; er ist diefs auch noch, wenn ein zweiter und ein dritter Druck auf die zwei andern Flächenpaare eben so wirkt, wie der erste Druck auf das erste Flächenpaar. Die Werthe dieser drei Druckkräfte können in einem beliebigen Verhältnifs stehen; in demselben Verhältnifs stehen die Werthe der linearen Contraction in den drei Kanten des Parallelepipedons. Ich nenne a, b, c diese drei Kanten vor dem Druck, während des Drucks bezeichne ich sie durch $a(1-\alpha)$, $b(1-\beta)$, $c(1-\gamma)$: die drei Gröſsen α, β, γ heiſsen die linearen Dilatationen respective der Kanten a, b, c.

Mittelst dieser drei Gröſsen kann man die lineare Dilatation einer jeden andern Richtung in dem Körper bestimmen. Es bilden eine begränzte Linie von der Länge ϱ in dem Körper vor dem Druck mit den drei Kanten a, b, c die Winkel m, n, p, und während des Drucks verwandle sich ihre Länge in $\varrho\left(1-\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)$, wo also $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ die lineare Dilatation von ϱ ist, dann ist:

$$\left(1-\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)^2=(1-\alpha)^2\cos^2 m+(1-\beta)^2\cos^2 n+(1-\gamma)^2\cos^2 p \quad .(1)$$

Betrachtet man diese Gleichung als die Gleichung einer Oberfläche, deren Radiusvector $1-\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ mit den Coordinaten-Axen a, b, c die Winkel m, n, p bildet, so ist sie, nach Fresnel's Benennung, eine *Elasticitätsfläche*. Ich nenne sie die *Elasticitätsfläche des Drucks;* ihre Axen sind: $1-\alpha$, $1-\beta$, $1-\gamma$, ich nenne sie die *Hauptdruckaxen.* Die Werthe von α, β, γ sind überall innerhalb der Gränze der Elasticität so klein, daſs ihre Quadrate und höheren Potenzen gegen die erste vernachlässigt werden können. — In jedem gleichförmig dilatirten Körper giebt es immer, welches auch die Ursache der Verrückung seiner Theilchen sey, drei auf einander rechtwinklich stehende Hauptdruckaxen, welche die Eigenschaft haben, daſs das ganze System der Dilatationen symmetrisch ist in Beziehung auf Ebenen, welche durch dieselben gelegt sind, und daſs, durch die Dilatationen in den Hauptdruckaxen, die Dilatation in jeder andern Richtung, deren Neigung gegen sie gegeben ist, mittelst der Gleichung (1) bestimmt wird. In jedem *ungleichförmig dilatirten* Körper lassen sich durch jeden seiner Punkte drei rechtwinkliche Hauptdruckaxen legen, die sich aber nur auf diejenigen Theile des Körpers beziehen, von welchen dieser Punkt unmittelbar umgeben ist; sie variiren in Richtung und Gröfse von einer Stelle des Körpers zur andern.

Die doppelte Strahlenbrechung, welche ein gleichförmig dilatirter unkrystallinischer Körper besitzt, kann ihren Grund haben entweder in einer veränderten Anordnung der Theilchen des schwingenden Luftäthers oder in einer veränderten Einwirkung der festen Theile des Körpers auf dieselben, oder in der gleichzeitigen Wirkung dieser beiden Ursachen. Ich weise nach, dafs der vorzüglichste Theil der Doppelbrechung des Lichts durch eine veränderte Anordnung der Aethertheile hervorgebracht wird, und dafs, wenn eine Veränderung der Einwirkung der festen Theile des Körpers auf die Bewegung der Aethertheile auch stattfindet, diese nur von der Ordnung der Veränderung der Dispersion des Lichts, welche durch die Dilatation hervorgebracht ist, seyn kann. Die neue Anordnung der Lichtäther-Theile, wie sie auch sonst beschaffen ist, mufs dieselbe Symmetrie als die der festen Theile des Körpers besitzen. Hieraus wird geschlossen, dafs die Doppelbrechung des gleichförmig dilatirten unkrystallinischen Körpers dieselben Gesetze befolgen mufs, welche Fresnel für die Doppelbrechung in krystallinischen Medien entdeckt hat. Der einfachste Ausdruck für diese Gesetze ist in ihrer geometrischen Construction mittelst der Elasticitätsfläche enthalten, welche ich die *optische Elasticitätsfläche* nenne. Die Axen der optischen Elasticitätsfläche und der Elasticitätsfläche des Drucks müssen in dem dilatirten Körper dieselben Richtungen haben, und die ersteren müssen Functionen der letzteren seyn. Ich weise nach, dafs, wenn mit A, B, C die drei optischen Elasticitätsaxen bezeichnet werden, und mit α, β, γ die Dilatationen in den drei Hauptdruckaxen, welche parallel respective mit A, B, C sind, die Relationen zwischen diesen Gröfsen folgende Form haben müssen:

$$
\begin{aligned}
A &= G' + q\alpha + p\beta + p\gamma \\
B &= G' + p\alpha + q\beta + p\gamma \;\ldots\ldots\; (2) \\
C &= G' + p\alpha + p\beta + q\gamma
\end{aligned}
$$

worin p und q zwei von der Natur des dilatirten Mediums abhängige Constanten sind, und G' entweder gleich ist der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in diesem Medium in seinem natürlichen Zustande, oder von dieser doch nur um eine kleine Gröfse verschieden ist, welche von den Quadraten und höheren Potenzen von α, β, γ abhängt. Aus diesen Relationen zwischen den Axen der beiden Elasticitätsflächen ergeben sich einige merkwürdige geometrische Folgerungen, welche eine physikalische Bedeutung haben. Beide Flächen haben die Kreisschnitte gemeinschaftlich; in beiden Flächen haben in demselben Schnitt die gröfsten und kleinsten Radii-vectoren dieselben Richtungen, so aber, dafs der gröfste Radius der einen Fläche die Richtung des kleinsten der andern hat; die Unterschiede des gröfsten und kleinsten Radiusvector haben in jedem gemeinschaftlichen Schnitt in beiden Oberflächen ein constantes Verhältnifs. Aus diesen Sätzen folgt, dafs wenn eine ebene Lichtwelle durch einen gleichförmig dilatirten Körper geht, diese polarisirt ist entweder parallel mit der gröfsten oder der kleinsten Dilatation aller der Richtungen, die mit ihr parallel sind. Je nachdem die Welle nach der einen oder der andern dieser beiden Richtungen polarisirt ist, pflanzt sie sich mit einer andern Geschwindigkeit fort; der Unterschied dieser beiden Geschwindigkeiten ist proportional mit dem Unterschied der gröfsten und kleinsten der mit ihrer Ebene parallelen Dilatationen des Körpers.

In der Abhandlung werden die numerischen Werthe von p und q für gewöhnliches Spiegelglas bestimmt. Es werden dazu zwei Verfahrungsarten angewandt, die einander ergänzen. Das erste Verfahren besteht in der Beobachtung der Lage der Farben-Curven, welche ein gekrümmter Glasstreifen im polarisirten Lichte zeigt. Diese

Beobachtung giebt den Werth für die Differenz $\frac{p-q}{G}$, wo G die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im Glase in seinem natürlichen Zustande bezeichnet. Ich fand:

$$\frac{p-q}{G^2}=0{,}126 \qquad G=0{,}654,$$

wobei die Geschwindigkeit des Lichts in atmosphärischer Luft als Einheit genommen ist.

Das zweite Verfahren besteht in der Beobachtung eines teleskopischen Diffractions-Bildes, welches durch zwei gleiche Oeffnungen in dem Schirme vor dem Fernrohre hervorgebracht ist. Wird vor diese Oeffnungen ein gekrümmter Glasstreifen gestellt, so verdoppelt sich das Bild; es entstehen zwei Bilder; das eine ist parallel mit dem Streifen, das andere senkrecht darauf polarisirt, beide erleiden eine Verrückung nach derselben Richtung in Beziehung auf das ursprüngliche Bild, das Verhältnifs dieser Verrückungen ist unabhängig von der Gröfse der Krümmung, und hängt allein, durch eine einfache Relation, von den Werthen von $\frac{p}{G}$ und $\frac{q}{G}$ ab. Ich fand dieses Verhältnifs gleich. Hieraus und aus dem schon gefundenen Werthe von $\frac{p-q}{G^2}$ ergab sich:

$$\frac{p}{G}=-0{,}131 \qquad \frac{q}{G}=-0{,}213$$

Das Resultat dieser experimentellen Bestimmung ist nun diefs. Wenn in einem gleichförmig dilatirten Glaskörper in den Hauptdruckaxen a, b, c die Dilatationen α, β, γ stattfinden, so haben die Axen der optischen Elasticitätsfläche A, B, C respective parallel mit a, b, c folgende Werthe:

$$A=G'\{1-0{,}213\,\alpha-0{,}131\,\beta-0{,}131\,\gamma\}$$
$$B=G'\{1-0{,}131\,\alpha-0{,}213\,\beta-0{,}131\,\gamma\}$$
$$C=G'\{1-0{,}131\,\alpha-0{,}131\,\beta-0{,}213\,\gamma\}$$

worin α, β, γ positive Gröſsen sind, wenn sie wirkliche Dilatationen bezeichnen, negative aber, wenn sie Contractionen bedeuten. Wenn ein rechtwinkliches Glas-Parallelepipedon z. B. durch einen auf zwei gegenüberstehende Seitenebenen ausgeübten Druck gleichförmig, und zwar um die Gröſse γ', comprimirt wird, so ist in den vorstehenden Ausdrücken zu setzen: $\gamma = -\gamma'$, $\beta = \alpha = \frac{1}{4}\gamma'$, woraus sich ergiebt:

$$A = B = G' \{ 1 + 0{,}045 \gamma' \}$$
$$C = G' \{ 1 + 0{,}148 \gamma' \}$$

Dieser Körper verhält sich also wie ein Kalkspathkrystall, indem in ihm der gewöhnliche Strahl die langsamere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt.

Sehr merkwürdig ist das Resultat, welches man aus den allgemeinen Werthen für A, B, C erhält, wenn darin $\alpha = \beta = \gamma$ gesetzt wird, d. h. wenn man dieselben auf einen Glaskörper anwendet, welcher nach allen Richtungen hin gleich stark dilatirt ist. In diesem Falle erhält man:

$$A = B = C = G' \{ 1 - 0{,}475 \alpha \}$$

also eine Verminderung der Lichtgeschwindigkeit, obgleich die Dichtigkeit des Körpers in dem Verhältniſs von 1 zu $1 - 3\alpha$ geringer geworden ist. Hiernach war es wahrscheinlich, daſs auch eine gleichförmige Temperaturerhöhung des Glases die Geschwindigkeit des Lichts in ihm vermindern müsse. Ich habe bei directen Refractionsbeobachtungen in gewöhnlicher und in erhöhter Temperatur wirklich eine solche Verminderung gefunden, aber diese betrug nur etwas mehr als die Hälfte derjenigen, die aus den Beobachtungen der mechanischen Dilatation hier abgeleitet ist.

In dem zweiten Abschnitt (§. 5 bis §. 10) werden die allgemeinen Formeln für die Farbenerscheinungen entwickelt, welche ein *ungleichförmig dilatirter* Körper unter den bekannten Bedingungen im polarisirten Lichte zeigt. Ein gleichförmig dilatirter Körper verhält sich für das Licht wie ein Krystall-Individuum, ein ungleichförmig dilatirter Körper ist einem Aggregat von unendlich vielen, sehr kleinen Krystall-Individuen zu vergleichen, deren optische Elasticitätsaxen eine stetige Function des Orts sind, sowohl in Beziehung auf ihre Richtung als ihre Gröfse. Wenn ein polarisirter Strahl auf ein solches Aggregat trifft, so theilt er sich nicht allein bei seinem Eintritt in zwei rechtwinklich polarisirte Strahlen, sondern an jeder Stelle der Bahn theilt sich jeder Strahl, so wie er in ein neues Krystall-Individuum tritt, wieder in zwei Theile, so dafs der eintretende Strahl sich in eine Unzahl von Strahlen im Innern des Aggregats zerspaltet. Müfste man alle diese Theilungen verfolgen, so würde die Untersuchung über die Interferenz des austretenden Lichts in der That sehr schwierig seyn. Die Untersuchung wird aber sehr einfach, wenn die Unterschiede der optischen Elasticitätsaxen so klein sind, dafs ihre Quadrate als verschwindend gegen ihre ersten Potenzen behandelt werden können. Unter dieser Voraussetzung beweise ich folgende zwei Theoreme: 1) Die Bahnen der Lichtstrahlen im Innern des Körpers können bei der Berechnung der Interferenz als geradlinig betrachtet werden. 2) Die nach dem Austritt mit einander interferirenden Strahlen können angesehen werden, als hätten sie den Körper in derselben Richtung durchlaufen. Mit Hülfe dieser Sätze entwickle ich den allgemeinen Ausdruck für die Differenz der Verzögerung, mit welcher die mit einander interferirenden Strahlen aus dem Körper heraustreten. Diese Differenz der Verzögerung hängt ab von dem Gesetz der Drehungen, welchem die Polarisationsebene des Strahls im Innern des Körpers unterworfen ist, und von dem Gesetz seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Beide müssen als Functionen des Orts gegeben seyn. Mittelst der Resultate, welche im ersten Abschnitt der Abhandlung erhalten sind, lassen sich diese Functionen leicht ableiten aus dem System der Dilatationen des Körpers, oder, was darauf hinauskommt, aus dem System der Verrückungen seiner Theilchen. Das System von Verrückungen mufs entweder gegeben seyn, oder durch eine unabhängige Untersuchung ermittelt werden.

Zur Erläuterung der Formeln werden dieselben angewandt auf Erklärung der Farben, welche ein tordirter Cylinder im polarisirten Lichte zeigt in Richtungen, welche seine Axe schneiden. Er zeigt Farbenringe, deren Durchmesser sich nahe wie natürliche Zahlen und umgekehrt wie die Torsionswinkel verhalten.

Diese beiden Abschnitte bilden die Grundlage des dritten Abschnitts, in welchem ich die Theorie der Farben entwickle, welche in durchsichtigen unkrystallinischen Körpern im polarisirten Lichte aus der ungleichen Temperaturvertheilung entstehen. Wenn die Temperatur in einem Körper ungleich vertheilt ist, so können die einzelnen Theile desselben sich nicht so ausdehnen, als sie sich zufolge ihrer Temperatur ausdehnen würden, wenn sie mit den umgebenden Theilen nicht cohärirten. Die aus diesem Zusammenhang entstehenden, nach den verschiedenen Richtungen ungleichen Dilatationen des Theilchens sind der Grund für die Doppelbrechung, welche dasselbe auf das Licht ausübt, und für die daraus entstehenden Farbenerscheinungen. Ich entwickle die allgemeinen Differentialgleichungen, von welchen das System der Dilatationen des Körpers abhängt, welches durch eine beliebige Temperaturvertheilung in ihm hervorgebracht wird. Man erhält diese Gleichungen, wenn man in die Poisson'schen Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer Körper (*Mém. de l'Acad. d. Par. T. VIII*) die Repulsivkraft einführt, welche aus der Erhöhung der Temperatur entsteht. Diese Repulsivkraft wirkt wie der Druck einer Flüssigkeit an jeder Stelle nach allen Seiten gleich, und ist eine Function der erhöhten Temperatur. Ich habe diese Function linear angenommen, was nur innerhalb mäfsiger Temperaturgränzen richtig ist, man kann aber jede andere Function substituiren, ohne dafs dadurch die Form der Gleichungen geändert wird. Uebrigens, obgleich ich seit vielen Jahren im Besitz dieser Gleichungen bin, hat Duhamel, der seinerseits zu denselben Gleichungen gekommen ist, die Priorität ihrer Publication (*Mém. present. T. V*, 1838). Diese Gleichungen, welche, wie aus dem Folgenden erhellen wird, bei mir nur einen besondèren Fall von viel allgemeineren Gleichungen bilden, können unmittelbar auf krystallinische Medien angewandt werden, nur müssen dann für die Molecularkräfte die auf krystallinische Medien sich beziehenden Ausdrücke derselben gesetzt werden. Dabei entsteht aber die physikalisch wichtige Frage: ob auch in krystallinischen Medien die aus der Temperaturerhöhung entstehende Repulsion nach allen Richtungen hin dieselbe sey, oder ob sie von der Lage der krystallinischen Axen abhänge? eine Frage, die sich durch Beobachtungen entscheiden läfst.

Durch Integration der in Rede stehenden Gleichungen erhält man das System von Dilatationen, welche in dem Körper durch die gegebene Temperaturvertheilung hervorgebracht werden. Substituirt man dieselben in die Formeln des vorhergehenden Abschnitts, so erhält man die allgemeinen Ausdrücke für die Farben, welche ein ungleichförmig erwärmter, durchsichtiger, unkrystallinischer Körper im polarisirten Lichte zeigt.

Ich wende diese Gleichungen zuerst auf eine Kugel an, in welcher die Temperatur concentrisch um ihren Mittelpunkt vertheilt ist. Dieser Fall ist z. B. realisirt, wenn eine Kugel gleichförmig erwärmt in eine Flüssigkeit getaucht wird, von höherer oder niedrigerer Temperatur. Eine solche Kugel zeigt im polarisirten Licht unter den bekannten Bedingungen concentrische Farbenringe, deren Gesetz ich angebe. Für den Charakter dieser Farben, ob sie positiv seyen wie im Bergkrystall oder negativ wie im Kalkspath, finde ich die einfache Bestimmung: je nachdem die mittlere Temperatur vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche beständig wächst oder abnimmt, sind die Farben positiv oder negativ. Bei der Erwärmung zeigt die Kugel also Ringe, die gleichen Charakter mit denen des Bergkrystalls haben, bei der Abkühlung aber solche, die gleichen Charakter mit denen des Kalkspaths besitzen. Wenn die Erwärmung oder Abkühlung so weit fortgeschritten ist, dafs die Temperatur der Kugel sich durch das erste Glied der Reihe darstellen läfst, welche Fourier für die concentrische Wärmevertheilung in einer Kugel gegeben hat, so giebt es einen Ring der höchsten Farbe, welcher seinen Ort nicht weiter verändert, wiewohl seine Farbe stets fällt. Dieser Ring der höchsten Färbung wird von Strahlen gebildet, welche durch die Kugel in einer Entfernung von ihrem Mittelpunkt gegangen sind, deren erste Annäherung etwa $\frac{4}{5}$ des Halbmessers der Kugel beträgt.

Eine hohle Kugel, gegen deren innere und äufsere Oberfläche ein verschiedener Druck wirkt, zeigt Farbenringe, deren Gesetz ich angebe; sie sind positiv, wenn der innere Druck der gröfsere ist, und negativ, wenn der äufsere Druck der überwiegende ist.

Die allgemeinen Gleichungen, von welchen die inneren Temperaturspannungen in festen Körpern abhängen, und die daraus hervorgehenden Farben, sind partielle Differentialgleichungen zwischen drei abhängigen und drei unabhängigen Variabeln. Nach den vorhandenen analytischen Methoden kann man nur hoffen Resultate aus ihnen zu ziehen, welche sich mit den Beobachtungen vergleichen lassen, in den Fällen, in welchen sich die Anzahl dieser Variabeln auf eine geringere zurückführt. Ein sehr allgemeiner Fall der Art ist der, wo der Körper eine so dünne Platte ist, dafs man Alles, was von dem Quadrate und den höheren Potenzen der Dicke abhängt, vernachlässigen kann. In diesem Falle reduciren sich die Variabeln auf zwei abhängige und zwei unabhängige. Dieser Fall ist auch für die Beobachtung besonders geeignet, weil es leichter ist die Körper in der Form dünner Platten frei von permanenten inneren Spannungen, welche bei der Solidification so leicht entstehen, zu erhalten. Es ist wahr, dafs der Einflufs solcher dünner Platten auf das Licht, wegen der Kürze des Weges desselben in ihnen, nur gering ist; dieser kann aber bis auf eine beliebige Höhe gesteigert werden, wenn man den Lichtstrahl nicht durch eine einzelne Platte, sondern durch eine gröfsere Anzahl derselben gehen läfst, die so gestellt sind, dafs jede dieselbe Wirkung auf den Strahl ausübt.

Nachdem die allgemeinen Gleichungen auf den Fall einer dünnen, von parallelen Ebenen begränzten Platte transformirt sind, wende ich dieselben zuerst auf eine kreisförmige Scheibe an, in welcher die Temperatur concentrisch um den Mittelpunkt vertheilt ist. Ich finde das einfache Resultat, dafs der Unterschied der Zeit, in welcher der gewöhnliche und ungewöhnliche Strahl sich senkrecht durch die Platte in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkt bewegen, proportional mit $r\frac{d\mu}{dr}$, wo μ die mittlere Temperatur des Theils der Platte bezeichnet, welcher innerhalb des mit r um ihre Axe beschriebenen Cylinders liegt. Der Charakter der Farben fällt zusammen mit dem Vorzeichen von $\frac{d\mu}{dr}$. Wenn also die Platte, gleichförmig erwärmt, sich in der Atmosphäre abkühlt, zeigt sie Farbenringe von demselben Charakter wie der Kalkspath. Wenn die Durchmesser dieser Ringe klein sind, was durch eine hinlängliche Anzahl von Platten immer erreicht werden kann, so verhalten sich dieselben wie die Quadratwurzeln der Glieder der natürlichen Zahlenreihe, also wie die Durchmesser der Newton'schen Ringe.

Der Fall, wo die Platte in einen Kreisring verwandelt wird, erhält dadurch ein besonderes Interesse, dafs sich hier bei stationärer Temperaturvertheilung eine neutrale Zone einsetzt. Nennt man ϱ' und ϱ'' den inneren und äufseren Halbmesser des Ringes, M seine mittlere Temperatur, s die Temperatur in der Entfernung r vom Mittelpunkt, und nimmt μ in der obigen Bedeutung, so ist der Unterschied der Durchgangszeit des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls, welche senkrecht durch die Ringscheibe in der Entfernung r vom Mittelpunkt gegangen sind, proportional mit:

$$(r^2-\varrho_{\prime}^2)(s-\mu)+\varrho_{\prime}^2(s-M).$$

Wenn s vom inneren Rande zum äufseren beständig wächst oder abnimmt, so giebt es immer einen Werth von r zwischen ϱ' und ϱ'', für welchen der vorstehende Ausdruck verschwindet, und diefs ist der Halbmesser der neutralen Zone. Innerhalb dieser neutralen Zone haben die Farben einen negativen Charakter, wenn s von ϱ' bis ϱ'' abnimmt, aufserhalb derselben einen positiven. Umgekehrt verhält es sich, wenn die Temperatur vom inneren nach dem äufseren Rande zu wächst.

Eine zweite Anwendung, welche ich von den Gleichungen für dünne Platten mache, bezieht sich auf die Verzerrungen, welche in einem schmalen und dünnen Kreisringe oder in einem Stücke eines solchen durch ungleiche Erwärmung hervorgebracht werden. Die Breite des Ringes, d. h. der Unterschied seines inneren und äufseren Halbmessers wird so gering angenommen, dafs die Temperatur innerhalb eines jeden Querschnitts als constant angesehen werden kann, und diese also nur eine Function des Bogens ist. Die Untersuchung dieser Verzerrungen hat mir, aufser ihrem theoretischen Interesse, noch einiges praktisches Interesse zu haben geschienen, wegen ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Fehler, welche beim Winkelmessen aus der ungleichen Erwärmung des zum Messen dienenden Kreises entstehen. Poisson hat sich in einer Abhandlung in dem *Connaissance d. t. pour* 1826 mit diesem Gegenstande beschäftigt; nach dem damaligen Standpunkt nimmt er aber die Ausdehnung, welche jeder Theil des Kreises erfährt, proportional mit seiner Temperatur, ohne die Modificationen, welche aus seinem Zusammenhang mit den umgebenden Theilen entstehen, zu berücksichtigen. Für den Fall, dafs der Kreis frei ist, d. h. nicht von Speichen, die in seiner Axe zusammenstofsen, getragen wird, gebe ich in einer einfachen Formel den Fehler an, welcher bei der Winkelmessung aus der ungleichen Temperaturvertheilung im Kreise entsteht. Ein solcher Ring hat auch ein einfaches Verhalten im polarisirten Licht. Er theilt sich durch einen neutralen Durchmesser in zwei Hälften, die in Hinsicht ihrer Farben einen entgegengesetzten Charakter haben. In der einen Hälfte liegen auf der concaven Seite des Ringes positive Farben, auf der convexen negative, in der andern Hälfte verhält es sich umgekehrt. Die positiven und die negativen Farben sind in jeder Hälfte durch den neutralen mittleren Bogen getrennt.

Wenn der Kreis von Speichen getragen wird, wie diefs bei den zum Winkelmessen dienenden gewöhnlich der Fall ist, so üben diese Speichen und der Kreisring eine gegenseitige Deformation aus, welche die Verzerrungen des Ringes, aufser von seiner Temperaturvertheilung, noch abhängig macht von der Anzahl, den Dimensionen der Substanz der Speichen und der Temperaturvertheilung in ihnen. Meine Formeln können auf jeden gegebenen Fall angewandt werden.

Wenn heterogene feste Substanzen, d. h. solche welche in ihrem Elasticitäts-Modul oder thermischem Ausdehnungs-Coëfficienten verschieden sind, auf eine feste Weise mit einander verbunden sind, so entstehen bei

Veränderung der Temperatur, auch bei gleichförmiger Vertheilung derselben, Spannungen, welche, bei schicklich gewählten Dimensionen der an einander befestigten Stücke, sehr merkbare Formveränderungen hervorbringen können. Hierauf beruhen die Metallthermometer, welche aus zusammengelötheten Streifen zweier differenter Metalle bestehen. Ein solches System heterogener fester Substanzen, die in einer höheren Temperatur fest mit einander verbunden worden sind, zeigt in der gewöhnlichen Temperatur die Farben der doppeltbrechenden Körper, und zwar *permanent*, während dieselben in den vorhergehenden Fällen nur *vorübergehend* waren, ähnlich wie die gehärteten (rasch abgekühlten) Gläser.

Ich beschäftige mich in der Abhandlung mit dem einfacheren Falle, wo zwei rechtwinkliche gerade Streifen von differenten Stoffen in ihren längeren Randebenen bei einer bestimmten Temperatur an einander gelöthet sind. So wie diese Temperatur sich ändert, krümmen sich die Streifen; die an einander gelötheten Randebenen verwandeln sich in gerade Cylinderflächen, für deren Durchmesser D ich folgenden Ausdruck finde:

$$D = \tfrac{5}{3}\,\frac{h^4\frac{k}{k'} + 4h^3h' + 6h^2h'^2 + 4hh'^3 + \frac{k'}{k}h'^4}{s(f'-f)hh'(h+h')},$$

worin h und h' die Höhen der Streifen, d. h. diejenigen Dimensionen bezeichnen, welche senkrecht auf der gemeinschaftlichen Gränze stehen, k und k', f und f' ihre respective Elasticitäts-Module und ihre thermischen Ausdehnungs-Coëfficienten, und s den Unterschied der vorhandenen Temperatur von derjenigen, bei welcher die Zusammenlöthung stattfand. Die concave Seite der Cylinderfläche liegt auf der des Streifens mit den kleineren Ausdehnungs-Coëfficienten. — Die isochromatischen Curven dieser Streifen sind parallel mit der gemeinschaftlichen Gränze; jeder Streifen hat eine neutrale, schwarze Linie bei rechtwinklicher Stellung der beiden Turmaline.

Auf der einen Seite dieser neutralen Linie liegen positive, auf der andern negative Farben, in der gemeinschaftlichen Gränze beider Streifen stofsen Farben entgegengesetzten Charakters zusammen. Die Lage der schwarzen Linie ist unabhängig vom Ausdehnungs-Coëfficienten; sie hängt allein von den Dicken der Streifen und vom Verhältnifs ihrer Elasticitäts-Module ab. Ihre Entfernung von der gemeinschaftlichen Gränze in dem Streifen von der Dicke h und dem Elasticitäts-Modul k ist:

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{4h^3+3h^2h'+\frac{k'}{k}h'^3}{h(h+h')}\right\}.$$

Das letzte Problem, mit welchem ich mich in der Abhandlung beschäftige, hat seit der Entdeckung der durch Temperaturvertheilung hervorgebrachten Farben, wohl am meisten das Interesse der Physiker auf sich gezogen, sowohl wegen der Schönheit der Farben als wegen der unerwarteten Symmetrie in ihrer Vertheilung. Ich meine die Farben, welche eine rechtwinkliche Platte zeigt, wenn sie mit einem ihrer Ränder auf eine erhitzte Metallplatte gestellt wird, oder selbst erhitzt mit diesem Rande auf eine kalte Unterlage gelegt wird. Die Erklärung der Farben einer solchen Platte und ihrer Vertheilung habe ich, seitdem ich im Besitz der Principien der Theorie dieser Phänomene bin, für ihren vorzüglichsten Prüfstein gehalten. Indefs bin ich dabei auf analytische Schwierigkeiten gestofsen, welche die Publication dieser Arbeit so lange verzögert haben, deren Beseitigung jedoch mir auch jetzt nicht gelungen ist, und auf welche ich nur wünschen kann die Aufmerksamkeit eines Geometers zu lenken. Reihen, deren Glieder nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreiten, haben sich in mathematisch-physikalischen Untersuchungen häufig dargeboten, aber diese Gleichungen hatten immer lauter reelle Wurzeln. Hier hat sich, ich glaube zum ersten Mal, der Fall dargeboten, wo diese Gleichung lauter imaginäre Wurzeln besitzt. Das zu lösende Problem besteht darin, die constanten Coëfficienten der Glieder eines solchen nach den imaginären Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitenden Reihe zu bestimmen. Das Interesse dieses Problems ist um so gröfser, da auf Reihen der Art viele andere Untersuchungen führen, welche von den Gleichungen des Gleichgewichts elastischer Körper abhängen.

Meine Resultate über die Farben, welche in rechtwinklichen Platten unter den bezeichneten Bedingungen auftreten, beschränken sich auf die Fälle, für welche sich nachweisen läfst, dafs der Werth der in Rede stehenden Reihen unmerklich ist, und sie also vernachlässigt werden dürfen. Meine Formeln setzen Platten voraus, bei denen die Höhe die Breite mehrere Male übertrifft oder umgekehrt, die Breite mehrere Male gröfser ist, als die Höhe, und in denen die Temperaturen nur Functionen der Entfernung vom unteren Rande sind, oder doch als solche angesehen werden können. Diese Formeln dürfen im ersteren Falle nicht auf Stellen angewandt werden, welche in der Nähe des unteren oder oberen Randes liegen, im zweiten Falle nicht auf Stellen, welche sich in der Nähe der Seitenränder befinden. Eine Platte, deren Höhe die Breite mehrere Male übertrifft, zeigt im polarisirten Lichte, wenn ihre Temperatur stationär geworden ist, vier Farbenfelder, nämlich ein centrales, zwei Seitenfelder und ein unteres Farbenfeld. Diese Felder sind durch schwarze Zonen von einander getrennt, wenn die Polarisationsebenen des einfallenden Lichtes und des analysirenden Turmalins rechtwinklich stehen, und die Ränder der Platte 45° mit ihnen bildet. Meine Formeln erklären die Seitenfelder und das centrale Feld vollständig, können aber auf das untere Feld nicht angewandt werden. Sie zeigen z. B., dafs die Seitenfelder immer negativ sind, dafs der Charakter des centralen Feldes aber von der Breite der Platte abhängt; für geringe Breiten bis zu einer bestimmten Gränze

sind

sind die centralen Farben positiv, zwischen dieser Gränze und einer zweiten werden sie negativ, jenseits dieser zweiten Gränze wiederum positiv u. s. w. Diese merkwürdige Umkehrung des Charakters der Farben, bei wachsender Breite, habe ich durch Beobachtungen bestätigt gefunden. — Die schwarzen Zonen, durch welche das centrale Feld von den Seitenfeldern getrennt wird, sind zufolge meiner Formel keine neutralen Zonen, wie z. B. die Mittellinie in einem gekrümmten Streifen, sondern entstehen daraus, dafs in ihnen die Polarisationsebenen des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls mit den Rändern der Platte 45° bilden. Die Entfernung dieser schwarzen Zonen von der Mitte der Platte finde ich annähernd gleich der halben Breite derselben, dividirt durch $\sqrt{3}$.

Platten, bei welchen die Breite mehrere Male die Höhe übertrifft, zeigen sich im polarisirten Lichte in fünf Felder getheilt, ein centrales, ein oberes und unteres Randfeld, und zwei Seitenfelder. Meine Formeln erklären das Verhalten der Platte in den drei ersten Feldern vollständig, dürfen aber auf die Seitenfelder nicht angewandt werden. Ich wende die Formeln auf eine bestimmte Platte an, deren Dicke, Höhe und Breite beiläufig 1, 10 und 40 Linien beträgt, und berechne für den Fall einer stationären Temperatur die höchsten Farben im centralen Felde und in den beiden Randfeldern, so wie die Lage der Gränzen dieser drei Felder. Die numerischen Resultate, welche ich erhalten, stimmten mit den Beobachtungen so gut, als die ungenau gekannten Coëfficienten der inneren und äufseren Wärme-Leitungsfähigkeit es erwarten liefsen. Die Formeln, wie die Beobachtungen, geben die Farbenvertheilung und die Lage der schwarzen Zonen, welche das centrale Feld von den Randfeldern trennen, symmetrisch in Beziehung auf den oberen und unteren Rand, wiewohl die Wärme vom unteren Rande nach dem oberen Rande zu stetig abnimmt. Die Entfernung dieser schwarzen Zonen von der Mitte der Platte fand ich annähernd gleich der halben Höhe derselben dividirt durch $\sqrt{3}$. — Die stationäre Temperatur in der Platte wurde dadurch hervorgebracht, dafs ihr unterer Rand in einer festen Temperatur, welche ich mit A bezeichnen will, erhalten wurde. Ich berechne die Dilatationen, welche die Theile in der Mitte der Platte und in der Mitte des unteren und oberen Randes bei dieser stationären Temperatur erfahren. Ich finde die Theile in der Mitte des unteren und oberen Randes gleich stark in der Richtung der Breite contrahirt und in der Richtung der Höhe dilatirt, in Beziehung auf die ihren Temperaturen entsprechenden Dilatationen, nämlich contrahirt um so viel, als wäre ihre Temperatur um $\frac{1}{20}A$ geringer als sie ist, und dilatirt um so viel, als wäre ihre Temperatur um $\frac{1}{80}A$ gröfser. In der Mitte der Platte hingegen finde ich die Theile in der Richtung der Breite dilatirt, und senkrecht darauf contrahirt in Beziehung auf die Ausdehnungen, die sie nach der hier vorhandenen Temperatur haben sollten; die Dilatation ist so grofs als die freie Wärmeausdehnung von $\frac{1}{39}A$, und die Contraction so grofs, als die freie Ausdehnung von $\frac{1}{136}A$ beträgt.

Aus meinen Formeln leitet sich eine einfache geometrische Construction ab für den Unterschied der Verzögerung der beiderlei aus der Platte austretenden mit einander interferirenden Strahlen. Man construire über einer Linie, welche durch die Mitte der Platte senkrecht auf ihren unteren Rand gezogen ist, als über einer Abscissen-Linie eine Curve, deren Ordinaten die Temperaturen der Platte darstellen, und ziehe eine gerade Linie, die so liegt, dafs die Summe der Quadrate der Differenzen ihrer Ordinaten und der Ordinaten der Temperatur-Curve ein Minimum ist. Die Unterschiede dieser Ordinaten sind an jeder Stelle proportional mit dem Unterschied der Verzögerung des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls, welche an dieser Stelle senkrecht durch die Platte gegangen sind. In den Durchschnittspunkten der geraden Linie mit der Temperatur-Curve ist dieser Unterschied der Verzögerung gleich Null; ihre Abscissen bestimmen die Lage der schwarzen neutralen Zonen, welche die Farbenfelder entgegengesetzten Charakters trennen. Je nachdem nämlich der Unterschied der Ordinaten an einer Stelle positiv oder negativ ist, ist auch die Farbe an dieser Stelle positiv oder negativ. Diese Construction ist gültig, nach welchem Gesetz die Temperatur in der Platte auch vertheilt sey, vorausgesetzt dafs sie allein eine Function der Entfernung vom unteren oder oberen Rande sey, oder doch als solche angesehen werden könne. Die Construction zeigt unter Anderem sogleich, dafs bei der Erwärmung und bei der Abkühlung der Platte der Charakter der Farben ein entgegengesetzter ist; diefs folgt in der That unmittelbar daraus, weil im ersten Falle die Temperatur-Curve ihre convexe Seite der Abscissen-Linie zukehrt, im zweiten Falle aber die concave Seite.

Die Uebereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen überall, wo ich den Calcül bis zu dem einzelnen Fall habe durchführen können, läfst über die Richtigkeit ihrer Principien keinen Zweifel. Was in Hinsicht der Erklärung und Berechnung der Farben, welche durch ungleiche Temperaturvertheilung hervorgebracht werden, zu wünschen übrig bleibt, ist die Vervollkommnung der analytischen Methoden, und die Verificirung der Gleichungen, von welchen die Bewegung der Wärme abhängt, namentlich in Beziehung auf schlecht leitende Körper. Dann erst wird es auch von Interesse seyn, in den Gleichungen für die durch Temperaturdifferenzen hervorgebrachten Spannungen die Wärmerepulsion nicht, wie es hier geschehen ist, proportional mit der Temperatur zu nehmen, sondern die vollständigere Function, wodurch diese Repulsion dargestellt wird, in die Gleichungen einzuführen, wodurch übrigens ihre Form keine Veränderung erleidet.

Die Theorie bezieht sich auf die *vorübergehenden* Farben, welche mit den Temperaturdifferenzen zugleich verschwinden. Ich bin aber auch im Besitz der Principien, mittelst deren die *bleibenden* Farben, welche durch Härtung der festen durchsichtigen Körper, durch rasche Abkühlung, entstanden sind, auf den Calcül zurckgeführt werden. Ich will mir noch erlauben diese Principien hier in aller Kürze näher zu bezeichnen, die weitere Entwicklung einer späteren Abhandlung vorbehaltend.

Die Theorie der bleibenden Farben, welche durch rasche Abkühlung oder überhaupt durch schnelle Solidification in durchsichtigen Körpern entstehen, ist nur eine specielle Anwendung einer allgemeinen Theorie, deren Gegenstand die Veränderungen sind, welche in der relativen Lage der Theile eines festen Körpers hervorgebracht werden, wenn einige derselben oder sämmtliche *bleibende Dilatationen* erlitten haben. Diese bleibenden Dilatationen entstehen, wenn, sey es bei einer mechanischen Formveränderung des Körpers oder bei einem physikalischen Procefs, die Gränze der Elasticität überschritten wird. Wenn z. B. ein geradliniger Stab über eine gewisse Gränze hinaus gekrümmt wird, so kehrt er nach Aufhebung der krümmenden Kraft nicht vollständig zur geradlinigen Gestalt zurück; er hat eine *bleibende* Krümmung erlitten. Einige seiner Theile haben in der *vorübergehenden* Krümmung die Gränze der Elasticität überschritten; die Wirkung dieser Theile theils auf einander, theils auf denjenigen, welche ihre Gränze der Elasticität nicht überschritten haben, bestimmt die Gröfse der bleibenden Krümmung. Könnte man die ersten Theile, welche permanente Dilatationen erlitten haben, von den letzteren, welche solche nicht erlitten haben, trennen, so würden diese letzteren zu der ursprünglichen geradlinigen Lage wieder zurückkehren. Im polarisirten Licht würde ein permanent gekrümmter Stab ein System bleibender Farben zeigen, welches sehr verschieden ist von demjenigen, welches aus der vorübergehenden Krümmung entsteht. Auf jeder Seite der Mittelebene des Stabes würde man ein doppeltes System Farben beobachten, ein positives und negatives, die durch eine neutrale Zone getrennt sind. Hier würden also drei neutrale Zonen vorhanden seyn, während bei der vorübergehenden Krümmung nur eine solche Zone da ist. — Aehnlich wie bei der permanenten Krümmung verhält es sich bei der permanenten Torsion. Der Winkel der permanenten Torsion hängt nur auf eine indirecte Weise von dem Winkel der vorübergehenden Torsion ab, aus welcher sie entstanden ist; direct hängt die permanente Torsion wieder ab von der Wirkung der Theile, deren Elasticitätsgränze überschritten ist, auf einander, und auf die Theile, deren Verschiebung innerhalb ihrer Elasticitätsgränze geblieben ist.

Ich werde das Princip angeben, welches zu den Gleichungen führt, welche die relative Lage der Theilchen in einem durch *bleibende Dilatationen* gespannten Körper bestimmen, woraus sich dann sowohl seine Formveränderung, als die Farben, welche er im polarisirten Lichte zeigt, ergeben. Man denke sich in dem Körper in seinem natürlichen Zustand ein kleines rechtwinkliches Prisma, befreit von seinem Zusammenhang mit den umgebenden Theilen, so dafs es, nachdem die bleibende Dilatation eingetreten ist, diese hat vollständig annehmen können. Das Prisma ist so klein, dafs diese Dilatation als gleichförmig betrachtet werden kann. Durch äufsere, gegen seine Oberfläche wirkende Druckkräfte denke man sich dieses bleibend dilatirte Prisma auf sein ursprüngliches Volumen zurückgeführt. Theilt man dieses reducirte Prisma durch eine Ebene, so stofsen sich die beiden Theile von einander ab, und sie werden nur durch die auf die Oberfläche des Prismas wirkenden Druckkräfte in ihrer relativen Lage erhalten. Die Gröfse dieser Abstofsung nenne ich den *bleibenden molecularen Druck* gegen die theilende Ebene, im Gegensatz gegen den *vorübergehenden Druck*, welcher durch eine vorübergehende Dilatation hervorgerufen wird.

Der bleibende moleculare Druck ist der Richtung und Gröfse nach durch die Lage der Ebene, gegen welche er gerichtet ist, gegeben, wenn die bleibende Dilatation des Prismas gegeben ist. — Wenn also das System der bleibenden Dilatation im ganzen Körper bekannt ist, so kann man für jeden Punkt desselben den bleibenden molecularen Druck angeben, welcher in demselben gegen eine durch ihn gelegte Ebene stattfindet. — Die Gleichgewichts-Gleichungen für den durch bleibende Dilatationen gespannten Körper erhält man, wenn man ausdrückt, dafs in jedem Element desselben die auf die Oberfläche desselben wirkenden Druckkräfte mit einander im Gleichgewicht stehen, nämlich die bleibenden molecularen Druckkräfte und die vorübergehenden, welche durch die Verrückungen der Theilchen aus ihrer ursprünglichen natürlichen Lage erregt werden. Mit andern Worten: man hat, um die in Rede stehenden Gleichungen zu bilden, nur die bleibenden molecularen Druckkräfte des Körpers in die Navier'schen Gleichungen des Gleichgewichts elastischer Körper einzuführen.

Die auf diesem Wege erhaltenen Gleichungen gelten für jeden Punkt im Innern des Körpers; zu ihnen treten noch die Bedingungsgleichungen, welchen die Integrale jener Gleichungen für jeden Punkt der Oberfläche des Körpers genügen müssen. Diese Bedingungsgleichungen drücken aus, dafs die Summe des bleibenden und vorübergehenden molecularen Drucks in jeder Stelle der Oberfläche Null ist, wenn dieselbe frei ist, oder, wenn auf die Oberfläche noch äufsere Druckkräfte wirken, mit diesen im Gleichgewicht stehen. Diese Bedingungsgleichungen machen die Integrale der allgemeinen Gleichungen abhängig von der Form der Oberfläche des Körpers, und diefs ist der Grund, warum dasselbe System bleibender Dilatationen ein anderes System von inneren Spannungen hervorbringt, wenn die Oberfläche des Körpers eine andere wird. Diefs erklärt die merkwürdige Thatsache, welche ich immer für die schönste Entdeckung Brewster's im Kreise der hieher gehörigen Phänomene gehalten habe, dafs mit der Form des innerlich gespannten, gehärteten Körpers zugleich die relative Lage seiner sämmtlichen Theile eine Aenderung erfährt, und man kennt jetzt den Weg, diese Aenderung durch den Calcül im Voraus zu bestimmen. — Uebrigens findet dieselbe Abhängigkeit von der Oberfläche des Körpers statt in Beziehung auf die vorübergehenden Spannungen, welche durch Temperaturdifferenzen hervorgebracht werden, nur dafs hier in der Regel die Temperaturvertheilung mit der Oberfläche sich verändert. — Die Gleichungen, von welchen die durch Temperaturdifferenzen hervorgebrachten Spannungen abhängen, sind nur ein besonderer Fall der hier in Rede stehenden Gleichungen, welcher dadurch charakterisirt ist, dafs der bleibende moleculare Druck für jede Stelle des Körpers nach allen Richtungen derselbe ist. Man kann in der That die thermische Ausdehnung eines Elements des Körpers, welche der Temperatur desselben angehört, betrachten als eine nach allen Richtungen hin gleich grofse bleibende Dilatation dieses Elements, und erhält dann dieselben Gleichungen, welche ich in der Abhandlung für die durch Temperaturvertheilung bewirkten inneren Spannungen entwickelt habe.

In der Theorie der bleibenden inneren Spannungen der festen Körper müssen dreierlei Arten von Dilatationen unterschieden werden, nämlich zuerst die in dem Körper wirklich vorhandenen Dilatationen, und die bleibenden Dilatationen, welche in seinen Theilen erregt worden sind; diese beiden Dilatationen beziehen sich auf die natürliche ursprüngliche Entfernung der Theilchen des Körpers von einander, und ich nenne die erstere die *absolute Dilatation.* Aufser dieser *absoluten* und *bleibenden* Dilatation mufs drittens die *relative Dilatation* in dem Körper unterschieden werden; diefs ist die vorhandene Dilatation, bezogen, nicht auf die ursprüngliche Entfernung der Theilchen, sondern auf die bleibend dilatirte Entfernung derselben. Wenn, wie in allen diesen Untersuchungen vorausgesetzt wird, die Dilatationen kleine Gröfsen sind, so ist die relative Dilatation die Differenz der absoluten und der bleibenden Dilatation. Die relativen Dilatationen sind es, welche sowohl die inneren Spannungen des Körpers hervorbringen, als die Farben, welche derselbe, wenn er durchsichtig ist, im polarisirten Lichte zeigt. Um diese Farben durch den Calcül zu bestimmen, dürfen nur in die allgemeine Formeln für diese Farben, welche ich in der vorliegenden Abhandlung entwickelt habe, die Ausdrücke für die relativen Dilatationen substituirt werden.

Die Anwendung der in Rede stehenden Gleichungen auf einen bestimmten Fall setzt die Kenntnifs des Systems bleibender Dilatationen, welches in diesem Fall stattfindet, voraus. Diefs mufs gegeben seyn, oder durch eine besondere Untersuchung aus dem Procefs, welcher die bleibenden Dilatationen hervorgebracht hat, abgeleitet werden, eben so wie bei den Gleichungen für die vorübergehenden Spannungen, welche durch Temperaturdifferenz hervorgebracht werden, die Vertheilung der Temperatur gegeben seyn mufs, oder durch eine besondere Untersuchung aus den Umständen, durch welche sie hervorgebracht ist, ermittelt werden mufs.

Unter den verschiedenen Fällen, auf welche man diese Gleichungen anwenden kann, hat mir der des rasch abgekühlten Glases der wichtigste geschienen, weil man hier die inneren Spannungen durch Beobachtungen mittelst des polarisirten Lichts verfolgen kann, und weil diese Anwendung zur Erklärung und Berechnung eines der schönsten Farbenphänomene führt. Die Vorstellungen, welche ich zum Grunde gelegt habe, um den Procefs der Härtung des rasch abgekühlten Glases dem Calcül zu unterwerfen, sind folgende. Inmitten dieses Processes, der eine Zeit hindurch dauert, fixiren wir einen Moment. Der Körper besteht jetzt aus zwei Theilen, der eine glüht noch und ist weich, der andere ist schon erstarrt und fest. Die Gränze beider Theile bildet die Schicht, welche gerade die Erstarrungstemperatur besitzt, d. h. die Temperatur, bei welcher die Theile nur gegen die Verdichtung und Verdünnung einen Widerstand leisten, aber eben anfangen wollen auch ihrer Verschiebung zu widerstehen. Beide Theile adhäriren fest mit einander. Der feste Theil nun übt einen gewissen Druck oder Zug gegen den weichen, weil er bestrebt ist, diejenige Form anzunehmen, welche ihm, zufolge seiner Temperatur und zufolge der bleibenden Dilatationen, die er erlitten hat, zukommt. Der weiche Theil, der wie ein flüssiger angesehen werden darf, widersteht diesem Druck oder Zug nur mit einer Kraft, die senkrecht gegen seine Oberfläche ist, und erleidet dabei eine Contraction oder Dilatation. Unter dieser bestimmten Contraction oder Dilatation erhärtet die Schicht, welche die Erstarrungstemperatur besitzt, wegen des fortgehenden Temperaturverlustes. Die Differenz dieser Contraction oder Dilatation und derjenigen Dilatation, welche diese Schicht zufolge ihrer Erstarrungstemperatur haben sollte, ist ihre bleibende Dilatation. Das Problem der bleibenden Dilatationen, welche bei der raschen Abkühlung eines Glaskörpers entstehen, führt also zunächst zu der Aufgabe: die Form zu bestimmen, welche der schon festgewordene Theil des Körpers annimmt in Folge der Temperaturvertheilung in ihm und der bleibenden Dilatationen, welche er erlitten hat, und unter dem Druck, welchen der weiche glühende Theil gegen seine innere Oberfläche ausübt. Dieser Druck, welchen der weiche Theil ausübt, ist senkrecht gegen seine Oberfläche und proportional mit dem Unterschied der Vergröſserung, welche sein Volumen in Folge seiner Temperatur haben sollte, und derjenigen Vergröſserung, welche es wirklich besitzt; das Volumen, welches der weiche Theil aber wirklich einnimmt, ist dasjenige, welches die innere Oberfläche des festen Theils des Körpers einschlieſst. — Das Problem ist hiemit vollständig bestimmt, und es ist leicht, das System Differentialgleichungen, von denen es abhängt, anzugeben. Die Integrirung dieser Gleichungen giebt unmittelbar die Dilatation des noch glühenden Theils des Körpers, und somit die bleibende Dilatation der eben erhärtenden Schicht, aber diese ausgedrückt durch die noch unbekannte Function, welche die bleibenden Dilatationen darstellt, die der feste Theil des Körpers schon erlitten hatte. Geht man nun aber zur nächst folgenden erhärtenden Schicht über, so erhält man eine Differentialgleichung für diese Function, deren Integral die bleibenden Dilatationen, welche aus dem Proceſs der Härtung hervorgehen, für den ganzen Körper darstellt.

Diese Principien der Theorie der Härtung glasartiger Körper umfassen nur die wesentlichsten Umstände, von denen ihre bleibenden Dilatationen abhängen; einige andere Umstände, welche von untergeordneterem Einfluſs sind, wird man später berücksichtigen können, und so diese Theorie vervollständigen. Dahin gehört namentlich der Umstand, daſs die *relativen* Dilatationen in dem schon fest gewordenen Theile des Körpers die Gränze der Elasticität überschritten haben können, und dadurch von Neuem bleibende Dilatationen erzeugt sind. Dieſs wird besonders gelten für die Theile, welche noch eine sehr hohe Temperatur besitzen, weil sie in dieser eine viel engere Elasticitätsgränze haben, verbunden mit einer weiteren Gränze der Verschiebbarkeit, als in einer niedrigen Temperatur. Die Berücksichtigung dieses Umstandes erfordert aber noch eine gröfsere Ausdehnung der experimentellen Untersuchungen über die Elasticitätsgränzen, namentlich auf welche Weise sie von der Temperatur abhängen, und welche Veränderungen in der relativen Lage der Theilchen hervorgebracht werden, wenn diese Gränze nur in einer Richtung überschritten wird. Uebrigens ist die Vernachlässigung dieses Umstandes ohne Zweifel von geringerem Nachtheil für die Resultate der Theorie, als die mangelhafte Kenntnifs von der Bewegung der Wärme in den hohen Temperaturen, unter welchen die Härtung vor sich geht.

Ein allgemeines Resultat, zu welchem die Principien der Thorie der Härtung glasartiger Körper, welche ich auseinandergesetzt habe, unmittelbar führen, ist, dafs, wie verschieden die bleibenden Dilatationen in den verschiedenen Theilen des Körpers auch seyn mögen, sie doch in jedem Theilchen nach allen Richtungen hin gleich sind. Dieses Resultat läfst wichtige Folgerungen zu. Es ergiebt sich hieraus, dafs das System von Spannungen und Dilatationen, welches in einem Körper durch seine Härtung hervorgebracht wird, immer auch durch eine bestimmte Temperaturvertheilung in ihm hervorgebracht werden kann. Diese Temperaturvertheilung und die aus der Härtung hervorgegangenen bleibenden Dilatationen werden durch dieselbe Function der Ordinaten ausgedrückt. Hierin liegt der Grund der merkwürdigen Uebereinstimmung der Farben, welche ein gehärteter Körper im polarisirten Lichte zeigt, mit denjenigen Farben, welche in ihm durch Temperaturdifferenzen können hervorgebracht werden. In der That können von den Resultaten, zu welchen ich in der vorliegenden Abhandlung in Beziehung auf die vorübergehenden Farben, die durch Temperaturvertheilung erzeugt werden, gekommen bin, alle diejenigen, welche unabhängig sind von dem speciellen Gesetze der Temperaturvertheilung, unmittelbar angewandt werden auf die Farben, welche derselbe Körper zeigt, wenn er gehärtet wird, wenn die dabei entstehenden bleibenden Dilatationen nur im Allgemeinen dieselbe Symmetrie als die Temperaturvertheilung befolgen. Ich finde z. B. *dafs in einer gehärteten Kugel oder einem geraden Cylinder* die bleibenden Dilatationen von dem Centrum oder der Axe aus nach der Peripherie wachsen; daraus folgt sogleich, dafs eine solche Kugel oder Cylinder im polarisirten Licht sich verhalten müssen, als wären sie nicht gehärtet und hätten eine vom Mittelpunkt oder von der Axe aus steigende Temperatur, und dafs daher z. B. die Farbenringe, welche sie zeigen, einen positiven Charakter, wie die des Bergkrystalls haben müssen, wie es auch die Beobachtung gezeigt hat. Eben so kann in Folge dieses Princips umgekehrt aus der Farbenvertheilung in dem gehärteten Körper auf die Vertheilung seiner bleibenden Dilatationen geschlossen werden. Lange Glasstreifen, die gefärbt sind, besitzen eine Farbenvertheilung von demselben Charakter als diejenige, welche sie ungehärtet gezeigt haben würden, wenn sie mit einem Längenrande auf eine heifse Unterlage gestellt worden wären; daraus folgt sogleich, dafs die bleibenden Dilatationen von den Längenrändern aus nach der Mitte der Platte zu abnehmen, und dafs die Entfernung der schwarzen neutralen Zonen, welche das centrale Farbenfeld von den Randfeldern trennen, von der Mitte der Platte nahe gleich seyn mufs der halben Breite der Platte dividirt durch $\sqrt{3}$.