**2. Weitere Untersuchungen
über die Frage nach einer mechanischen
Erklärung der elektrischen Erscheinungen unter
der Annahme eines kontinuierlichen Weltäthers;
von Hans Witte.**

§ 1. Einleitung.

In einer unlängst erschienenen Schrift¹⁾ habe ich versucht, die Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen mittels einer neuen und neue Ergebnisse verheißenden Methode zu behandeln.

Der Grund, dieses Problem wieder einmal anzugreifen, nachdem schon eine große Anzahl von Fachgenossen sich mit ihm beschäftigt hatte, ohne daß doch nach den großen Hertz'schen Entdeckungen praktische Ergebnisse solcher Untersuchungen merkbar geworden wären, war zunächst eben der, von dem jene Physiker ausgegangen sind. Neben der rastlosen induktiven Erforschung neuer Tatsachen hat die Physik von jeher das Bestreben gehabt, die vielen verschiedenen Gebiete der physikalischen Erscheinungen, wie sie zunächst die Natur den menschlichen Sinnen darbietet — Mechanik, Akustik, Optik, Elektrizität usw. usw. — durch ein möglichst einheitliches Begriffssystem zu beschreiben. Dieses Bestreben ist in der Tat bis zu einem ganz bemerkenswerten Grade von Erfolg begleitet gewesen. Ausgehend von einem weitverzweigten und ziemlich zusammenhanglos erscheinenden *Pluralismus* ist die Physik Schritt für Schritt zu immer neuen Vereinfachungen gelangt, welche die Vorausberechnung der bekannten Er-

1) H. Witte, Über den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen. Berlin, Verlag von E. Ebering. 1906. — Unter demselben Titel: Vortrag, gehalten in der physikalischen Abteilung der 78. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Stuttgart, Verh. d. D. Physik. Ges. 8. p. 497—510. 1906; Physik. Zeitschr. 7. p. 779—785. 1906.

scheinungen ungemein erleichtert haben und zugleich wertvolle Pfadfinder für die Entdeckung neuer Naturvorgänge geworden sind. Zuletzt hat sie nur noch *drei* Naturgebiete als getrennt stehen lassen: Mechanik, Thermodynamik, Elektrodynamik. Doch auch hier haben die Physiker nicht Halt gemacht. Wie allgemein bekannt ist, kann die heutige Physik als Tatsache ansehen, daß sich das mittlere dieser drei Gebiete unter die beiden benachbarten restlos aufteilen läßt. So hat es heutzutage die Physik von einem Pluralismus bis zu einem *Dualismus* gebracht, der durch die Worte: Mechanik-Elektrodynamik gekennzeichnet wird. Ohne Zweifel ist nun, nachdem man einmal soweit gekommen ist, der Versuch sehr verlockend, den Dualismus auf einen *Monismus* zurückzuführen; um so mehr, als auch hier wie schon bei den früheren Vereinfachungen die universelle Geltung des Energieprinzipes und insbesondere die ähnliche Form der induktiv gefundenen mechanischen und elektrischen Feldgleichungen in hohem Maße zu dem Unternehmen ermutigen. Dieses Fortschreiten von dem physikalischen Dualismus zum physikalischen Monismus ist es also, was auch jene Physiker versuchen wollten, wenn sie die elektrischen Erscheinungen mechanisch zu erklären unternahmen.

Indessen würde die ungemein große Zahl der bereits vorliegenden Versuche einer mechanischen Erklärung der Elektrodynamik, die doch allesamt nur Anfänge, nirgends aber durchgeführte Theorien aufweisen, eher abschreckend als antreibend gewirkt haben, wenn nicht eine neue Erkenntnis hinzugetreten wäre, die die Sachlage in anderem Lichte erscheinen ließ. Das Problem zeigte sich nämlich im Gegensatze zu den bisherigen ohne einen gemeinsamen Plan begonnenen Untersuchungen einem *systematischen* Verfahren zugänglich. Das heißt, es stellte sich heraus, daß nur gewisse durch bestimmte Merkmale ausgezeichnete Gattungen von mechanischen Theorien der elektrischen Erscheinungen überhaupt denkbar sind. Der neuen Erkenntnis konnte dann bereits der Nachweis hinzugefügt werden, daß eine Anzahl der aufgestellten Gattungen nachträglich ausscheidet. Diese Erkenntnis und dieser Nachweis bestimmen den gegenwärtigen Stand der Frage, wie ihn die folgende Untersuchung voraussetzt. Sie müssen daher zunächst kurz wiedergegeben werden.

§ 2. Gegenwärtiger Stand der Frage.

Neun Gattungen von mechanischen Theorien der elektrischen Erscheinungen sind es, die sich überhaupt als denkbar erweisen.¹⁾ Sie werden durch die unterste Zeile des nebenstehenden Schemas dargestellt. Der stammbaumartige obere Teil des Schemas zeigt, wie die neun Gattungen systematisch deduziert worden sind. Die deduktive Herleitung geht aus von den mathematisch formulierten Grundgesetzen der Mechanik und Elektrodynamik: Bewegungsgleichung (oder Prinzip von Hamilton), Kontinuitätsgleichung, kinematische Deutbarkeit der Energiegleichung einerseits, Grundgleichungen der Maxwell-Lorentz'schen Theorie andererseits mit ausdrücklicher Ausnahme der Voraussetzungen oder Folgerungen über die Drucke im reinen Äther. Die Deduktion ist eindeutig, die Einteilung erschöpfend.

Der Herleitung nach stehen, wie man sieht, zunächst die Gattungen (1) und (2) als Fernwirkungstheorien den sieben Gattungen (3) bis (9), den Feldwirkungstheorien, gegenüber; die letzteren sind wieder geschieden in Emissions- und Undulationstheorien. Für die folgende Weiterführung der früheren Untersuchung empfiehlt es sich,

1) l. c. p. 16f.

anders zusammenzufassen. Offenbar kann man auch die ersten drei Gattungen, (1) bis (3), zusammennehmen, so daß die Gattungen (4) bis (9) für sich übrig bleiben. Dann haben diese sechs letzten Gattungen miteinander das gemeinsam, daß sie sämtlich die Existenz des „Weltäthers“ voraussetzen¹⁾, also eines überall verbreiteten Mediums, das bei Anwesenheit von ponderabler Materie zu einem bestimmten Anteil und in Räumen, die keine ponderable Materie enthalten, ausschließlich Träger der elektrischen Energie W_e und der magnetischen Energie W_m sein soll. Diese Undulations- oder Äthertheorien zerfallen wieder in zwei Hauptgruppen, die durch die Worte „Ganz“ und „Geteilt“ gekennzeichnet sind. Die Worte bedeuten:

„Ganz“: Jede der beiden elektromagnetischen Energien W_e und W_m ist entweder ganz oder gar nicht kinetisch.

„Geteilt“: Mindestens eine der beiden elektromagnetischen Energien fällt in einen kinetischen und in einen nicht kinetischen Teil auseinander.

In den Gattungen (4) bis (9) ist dann eben diese Scheidung noch weiter geführt. Die Zahlen 0, ε , 1, wobei $\varepsilon \neq 0$ und $\neq 1$ ist, geben an, wieviel von jeder der beiden elektromagnetischen Energien mit der kinetischen Energie der verborgenen Bewegung identifiziert wird; und die sechs Gattungen (4) bis (9) entsprechen den $3 \cdot (3 + 1) / 2 = 6$ möglichen Kombinationen der Zahlen 0, ε , 1, wobei die Kombinationen (a , b) und (b , a) in je eine Gattung zusammengefaßt sind. In der achten Gattung ist, um Mißverständnissen vorzubeugen, für das zweite Symbol ε^* statt ε geschrieben worden.

Die neun Gattungen, wie sie die unterste Zeile des Schemas vorführt, umfassen also, systematisch geordnet, sämtliche irgendwie denkbaren mechanischen Theorien der elektrischen Erscheinungen, die mit den oben angeführten Grundgesetzen der Mechanik und der Elektrodynamik vereinbar sind.

Jede Gattung enthält für sich eine große Zahl von Theorien, die sogar jeweils als unendlich groß betrachtet werden muß, solange keine weitere Einschränkung nachgewiesen wird. Man bekommt demnach neunmal eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von denkbaren Theorien. Die Aufgabe ist jeweils

1) Vgl. l. c. p. 20.

gelöst, wenn es gelingt, überall den Bereich der unendlich vielen Möglichkeiten auf endliche Kreise zusammenzuziehen, zweitens alle einzelnen dann noch denkbaren Theorien, eventuell in Untergruppen systematisch geordnet, wirklich zu formulieren und schließlich die Durchführbarkeit jeder einzelnen Theorie bzw. jeder Untergruppe zu prüfen. Obwohl wegen der unendlich großen Anzahl von Theorien, die jede Gattung zunächst umfaßt, diese Aufgabe sehr schwierig erscheint, ist es doch im Verlaufe der Untersuchung möglich gewesen, eine beträchtliche Anzahl von Gattungen auszuschneiden, so daß der Bereich der noch übrig bleibenden Möglichkeiten wesentlich enger begrenzt wird.

Zunächst wurde nachgewiesen, daß die drei ersten Gattungen, (1) bis (3), ganz ausfallen.¹⁾ *Die Annahme des „Weltäthers“ ist also für jeden Versuch einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen unumgänglich.* Alle weiteren Unternehmungen, die Elektrizität mechanisch zu begründen, werden zugleich Lösungsversuche der Aufgabe, die physikalischen Eigenschaften des Weltäthers festzustellen.

Nunmehr handelt es sich nur noch um die Undulations- oder Äthertheorien, Gattung (4) bis (9). Voraussetzungen über die physikalischen Eigenschaften des Weltäthers sind dabei gar nicht gemacht, außer natürlich den oben angeführten, die die Grundlage der Mechanik bilden. Es hat sich indessen als vorteilhaft herausgestellt, eine *Teilung der Aufgabe* durchzuführen. Bekanntlich ist die allgemein verbreitete Annahme, daß der reine Weltäther außerhalb der ponderablen Materie im Gegensatze zu dieser ponderablen Materie streng die Eigenschaften eines *Kontinuums* habe, also nicht wieder in diskrete Teilchen (Ätheratome) oder gar in Ätheratome und einen „Interäther“ zerfalle.²⁾ In der Tat empfiehlt es sich wegen

1) l. c. p. 31 ff.

2) Es wird kaum nötig sein, darauf hinzuweisen, daß bei dieser Begriffsbestimmung des „reinen Äthers“ mit der ponderablen Materie zugleich alle Elektronen ausgeschlossen gedacht werden. Ein überall kontinuierlicher reiner Äther ist also ein Weltäther, der außerhalb der ponderablen Materie und der Elektronen kontinuierlich ist, ein überall diskontinuierlicher reiner Äther ein Weltäther, der überall in diskrete Teilchen zerfällt außerhalb der ponderablen Materie und abgesehen von den Elektronen.

der größeren Wahrscheinlichkeit auf physikalischer und wegen der größeren Einfachheit auf mathematischer Seite, zunächst diese Voraussetzung zu machen und in jeder der Gattungen (4) bis (9) zu sehen, wie weit man mit ihr kommt, die Annahme eines in diskrete Teilchen zerfallenden reinen Äthers aber auf später zu verschieben.

Unter dieser Voraussetzung hat sich dann ergeben: *Fünf von den sechs letzten Gattungen, (4) bis (9), sind bei der Annahme eines kontinuierlichen reinen Äthers mit den Grundgesetzen der Mechanik und den Grundtatsachen der Elektrodynamik unverträglich.¹⁾ Es bleibt allein die Möglichkeit, daß die Gattung (7) mechanische Theorien der elektrischen Erscheinungen mit kontinuierlichem reinen Äther liefere.*

An dieser Stelle mußte damals eine Lücke gelassen werden. Sie auszufüllen, ist der Zweck der folgenden Untersuchung.

§ 3. Grundlagen der letzten übriggebliebenen Gattung (7).

In gewohnter Weise mögen bezeichnen:

- ℰ die elektrische Feldstärke,
- § die magnetische Feldstärke,
- φ das skalare Potential der elektrischen Feldstärke,
- ℳ das Vektorpotential der magnetischen Feldstärke,

dazu:

- c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen in einem von ponderabler Materie freien Raume (im „reinen Äther“),
- t die Zeit,

schließlich:

- k die Dichtigkeit des reinen Äthers,
- q die Verschiebung aus der Ruhelage,
- u/2 die Verdrehung,
- $\dot{q} = d q / d t = \partial q / \partial t + \dot{q} \cdot \text{grad } q$ die Geschwindigkeit eines Volumelementes $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ des reinen Äthers.

Für die folgende Untersuchung genügt es, die Vorgänge im reinen Äther zu betrachten. Dort lauten die elektro-

1) l. c. p. 219 ff.; über die Gattung (4), die sofort aus der Maxwell-

magnetischen Gleichungen, die mechanisch erklärt werden sollen:

$$(1) \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H},$$

$$(2) \quad -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}.$$

Über die Art dieser mechanischen Erklärung sagt das Symbol $(\varepsilon, 0)$ der Gattung (7) nur aus: eine der beiden elektromagnetischen Energien W_e und W_m soll zum Teil ε , wobei $\varepsilon \neq 0$ und $\neq 1$ ist) kinetisch sein, die andere gar nicht (0). Nun sind aber bezüglich der Gattung (7) die folgenden fünf Tatsachen I bis V bereits in der früheren Untersuchung¹⁾ bewiesen worden:

I. Die zum Teil kinetische Energie kann nur die elektrische Energie

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2$$

sein, nicht die magnetische Energie

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{H}^2.$$

(Die Ausdrücke für die Energie werden hier wie unten überall auf die Volumeinheit bezogen.)

II. Als mögliche Scheidung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ in einen kinetischen und einen potentiellen Teil bleibt nur diejenige übrig, die durch die Gleichung gegeben wird

$$(3) \quad \mathfrak{E} = -\sqrt{4\pi k} \cdot (\dot{q} + \text{grad } \Psi),$$

wobei die Funktion Ψ dem skalaren Potential φ der elektrischen Feldstärke proportional (vgl. unten die Gleichungen (8)), dem mechanischen Sinne nach aber unbestimmt ist.

III. Die der Beziehung (3) entsprechende Beziehung der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ zu den mechanischen Größen lautet

$$(4) \quad \mathfrak{H} = \frac{h}{k} \cdot \sqrt{4\pi k} \cdot \text{curl } q,$$

indem die Konstante h für $c^2 \cdot k$ eingeführt wird.

IV. Alle Veränderungen müssen sehr klein sein, damit die Größe

$$\frac{1}{2} \cdot \text{curl } q$$

1) l. c. p. 186 ff.

als Drehung $u/2$ und die magnetische Energie W_m als potentielle Energie aufgespeichert durch die Verdrehung $u/2$ aufgefaßt werden kann. Unter dieser Voraussetzung darf für jeden Skalar und jeden Vektor die substantielle zeitliche Differentiation (d/dt) mit der lokalen $(\partial/\partial t)$ vertauscht werden, was im folgenden stets geschehen soll.

V. Die Kombination von (3) und (4) mit (1) und (2) ergibt als mechanische Gleichungen, die den beiden elektrischen Grundgleichungen (1) und (2) entsprechen sollen,

$$(5) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -h \cdot \text{curl } u - k \cdot \text{grad } \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \text{curl } \dot{q}.$$

Zieht man (5) und (6) in eine Gleichung zusammen, so erhält man die Bewegungsgleichung des reinen Äthers für die siebente Gattung:

$$(7) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -h \cdot \text{curl curl } q - k \cdot \text{grad } \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Dazu mögen sogleich noch angemerkt werden die leicht ableitbaren elektrischen und mechanischen Beziehungen für die Potentiale $\mathfrak{A}$ und φ :

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \text{curl } \mathfrak{A}, & \mathfrak{A} = \frac{h}{k} \cdot \sqrt{4\pi k} \cdot q, \\ \mathfrak{G} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, & \varphi = \sqrt{4\pi k} \cdot \Psi. \end{cases}$$

Die Grundgleichung, auf welcher sich alles übrige aufbauen muß, ist die Bewegungsgleichung (7) des Äthers. Sie stellt die Beschleunigung dar als abhängig von dem Curl der Verdrehung und von dem Gradienten der Änderungsgeschwindigkeit einer Funktion Ψ , deren mechanischer Sinn nicht bekannt ist. In der Unbestimmtheit dieser Funktion Ψ kommt die einfach unendliche Mannigfaltigkeit denkbarer Theorien in der siebenten Gattung zum Ausdruck. —

Hiermit bricht die frühere Untersuchung ab. Die neue Untersuchung hat die Frage zu beantworten: *Ist es möglich, systematisch vorzugehen, eine erschöpfende Einteilung in Unter-*

gruppen aufzustellen und die Kreise allmählich immer enger und enger zu ziehen, so daß schließlich eine endliche Anzahl von Theorien bleibt, die man mathematisch formulieren (Funktion Ψ) und deren Durchführbarkeit man prüfen kann?

§ 4. Ein Beispiel.

Zur vorläufigen Orientierung auf dem unbekannten Gebiete mag ein einfaches Beispiel skizziert werden. Bei Äthertheorien der übrigen Gattungen, die sich allerdings als undurchführbar erwiesen haben, findet sich häufig die Annahme, der Äther sei inkompressibel,

$$(9) \quad \operatorname{div} \dot{q} = 0.$$

Es liegt nahe, diese Annahme auch hier zu versuchen. Sie wird gewährleistet, wenn der Teil von $\mathfrak{E}$, der nach Gleichung (3) der Geschwindigkeit $\dot{q}$ proportional ist, überall die Divergenz Null ergibt. Dieser Teil von $\mathfrak{E}$ möge hinfert mit $\mathfrak{E}_{(q)}$ bezeichnet werden, indem auf seine Proportionalität mit der Änderungsgeschwindigkeit $\partial \mathfrak{A} / \partial t$ des magnetischen Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ hingewiesen wird, die nach (8) für die Proportionalität mit $\dot{q}$ eingesetzt werden kann,

$$\mathfrak{E}_{(q)} = - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = - \sqrt{4\pi k} \cdot \dot{q}.$$

Der andere, zum skalaren Potentiale φ bzw. Ψ gehörende Teil von $\mathfrak{E}$ soll den Namen $\mathfrak{E}_{(\varphi)}$ erhalten

$$\mathfrak{E}_{(\varphi)} = - \operatorname{grad} \varphi = - \sqrt{4\pi k} \cdot \operatorname{grad} \Psi.$$

Bei dieser Bezeichnungsweise lauten die Bedingungen für die beiden Teile von $\mathfrak{E}$ im ganzen Raume:

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{E}_{(q)} = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E}_{(\varphi)} = \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \cdot B, \end{cases}$$

wobei die Größe B die Ladung in der Volumeinheit mißt. Nun betrachte man ein geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit v längs der z -Achse eines rechtsdrehenden Koordinatensystems (x, y, z) bewegtes punktförmiges Elektron. Ein zweites, dem ruhenden paralleles Koordinatensystem, dessen

Ursprung im Elektron liegen möge, werde durch Striche gekennzeichnet (x' , y' , z'). Die Abmessung senkrecht zur z -Achse soll im ganzen Raume ϱ' bzw. ϱ genannt werden, so daß also

$$\varrho = \varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

ist; der Radiusvektor des betrachteten Raumpunktes sei

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\varrho'^2 + z'^2},$$

der Polarwinkel Θ' . Für die Vektoren empfiehlt sich, da der Vorgang um die z -Achse herum symmetrisch sein muß, die Zerlegung nach z , ϱ und nach der auf beiden senkrecht stehenden Richtung χ , die positiv entsprechend einer positiven

Fig. 1.

Umkreisung der z -Achse gerechnet werden soll (Axialkomponente); der Index r bezeichne die Komponente in der Richtung des Leitstrahles r' in relativen Koordinaten. Zur Zeichnungsebene kann die Ebene gemacht werden, die den Aufpunkt P und die z -Achse enthält (vgl. Fig. 1), da die elektrischen Kraftlinien jeweils ganz in jeder derartigen Ebene

liegen. Die Maxwell-Lorentzsche Theorie ergibt dann allgemein¹⁾ für die elektrische Feldstärke den Wert

$$(11) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}'_r = \frac{B \cdot \sin \Theta'}{r'^2} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}}.$$

Sollen nun die beiden Teile $\mathfrak{E}_{(x)}$ und $\mathfrak{E}_{(y)}$ von $\mathfrak{E}$ den Bedingungen (10) genügen, so ergibt sich die Scheidung

$$\mathfrak{E}_{(x)} = \mathfrak{E}'_{(x)r} = \frac{B}{r'^2} \cdot \left\{ -1 + \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}} \right\},$$

$$\mathfrak{E}_{(y)} = \mathfrak{E}'_{(y)r} = \frac{B}{r'^2}.$$

1) O. Heaviside, Electrical papers 2. p. 508. 1892.

Beim Übergange zur Ätherbewegung werde $B = -A$ gesetzt, damit die Vorzeichen erhalten bleiben. Alsdann ergibt die Gleichung

$$\mathcal{E}_{(31)} = -\sqrt{4\pi k} \cdot \dot{q}$$

für die Komponenten der Geschwindigkeit $\dot{q}$ die Werte:

$$\dot{q}_x = 0,$$

$$\dot{q}_\theta = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \frac{A}{r'^2} \cdot \left\{ -1 + \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}} \right\} \cdot \sin \Theta',$$

$$\dot{q}_z = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \frac{A}{r'^2} \cdot \left\{ -1 + \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}} \right\} \cdot \cos \Theta' - v.$$

Daraus folgt als Differentialgleichung der relativen Bahnkurven, die stationär durchströmt werden und ganz in der (ρ', z') -Ebene liegen:

$$\frac{d\chi'}{d\rho'} = \frac{\chi'}{\rho'} - \frac{v\sqrt{4\pi k}}{A} \cdot \frac{r'^2}{\sin \Theta' \cdot \left\{ -1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{-3/2} \right\}}$$

oder

$$\begin{aligned} & \frac{v\sqrt{4\pi k}}{A} \cdot \rho' \cdot d\rho' \\ &= \left\{ -1 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{-3/2} \right\} \cdot \sin \Theta' \cdot d\Theta'. \end{aligned}$$

Das Integral lautet

$$\rho'^2 = \frac{2A}{v\sqrt{4\pi k}} \cdot \left\{ \cos \Theta' \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{-1/2} \right] + C \right\},$$

wobei C die willkürliche Konstante ist. Die Diskussion ergibt für die Stromlinien die Figur 2.

Im Anfangspunkte des relativen Koordinatensystems treten natürlich unendlich große Geschwindigkeiten auf, so daß die Inkompressibilität gewahrt bleibt.

Auf diesen Bewegungsvorgang läßt sich nun der folgende Satz¹⁾ über Drehungen in einem stationär bewegten Kontinuum anwenden (vgl. Fig. 3):

Fig. 2.

Fig. 3.

„Bezeichnet man auf einer bestimmten Stromlinie mit χ den Winkel, den die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{q}$ an zwei Stellen P_1 und P_2 miteinander bilden, so ist die Drehung zwischen P_1 und P_2 höchstens $\chi + \pi$, mindestens $\chi - \pi$.“

Demzufolge treten in dem betrachteten Beispiele zum wenigsten auf den inneren

Stromlinien *endliche Drehungen* auf. Sobald aber endliche Drehungen stattfinden, kann nach bekannten kinematischen Sätzen die Drehung nicht mehr proportional dem Curl der Verschiebung q sein, der Vektor $\text{curl } q$ hat keinen mechanischen Sinn mehr; dasselbe

gilt dann nach Gleichung (4) für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, diese Theorie ist also undurchführbar.

§ 5. Versuch einer Übersicht.

Bewiesen ist damit, daß der Äther nicht inkompressibel sein kann. Die Zahl der unendlich vielen denkbaren Theorien ist allerdings dadurch noch nicht merklich verringert. Indessen

1) H. Witte, l. c. p. 99—101.

gibt die soeben aufgestellte Annahme über die Divergenz des Vektors $\mathfrak{E}_{(q)}$ einen Fingerzeig, was für einen Weg man einschlagen kann, um wenigstens erst einmal mechanisch einfach vorstellbare Theorien der Gattung (7) formulieren zu können. Solcher einfachen Möglichkeiten findet man leicht die folgenden vier:

a) Die vorhin vorausgesetzte Inkompressibilität war eine Bedingung für den Vektor $\mathfrak{E}_{(q)}$ oder auch für den Vektor $\mathfrak{A}$. Solche Bedingungen, die meist in einer Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und q bestehen werden, kann man noch weiter aufstellen, z. B.

$$(12) \quad \operatorname{div} \mathfrak{A} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Dies ist die Hilfgleichung (2) der Lorentzschen Theorie¹⁾, die dort den Zweck hat, den Potentialen $\mathfrak{A}$ und q ihre wechselseitige mathematische Unbestimmtheit zu nehmen. Hier dient sie dazu, die Funktion q oder Ψ mechanisch zu bestimmen, da der Vektor $\mathfrak{A}$ hier die feste mechanische Bedeutung der Verschiebung q hat.

b) Erwägt man, daß $(k/2) \cdot (\operatorname{grad} \Psi)^2$ die potentielle elektrische Energie im statischen Teile des elektrischen Feldes und Ψ das elektrostatische Potential ist, so liegt es nahe, einfache Zustandsfunktionen zu suchen, die für Ψ und für $(\operatorname{grad} \Psi)^2$ mechanisch verständliche Werte geben, z. B.

$$\Psi = \frac{C}{k} \cdot \operatorname{div} q,$$

$$\frac{k}{2} \cdot (\operatorname{grad} \Psi)^2 = \frac{C^2}{2k} \cdot (\operatorname{grad} \operatorname{div} q)^2,$$

wo C eine Konstante ist und $\operatorname{div} q$ die Volumdilatation darstellt.

c) Zu der Grundgleichung (7) der siebenten Gattung

$$(7) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -h \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q - k \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

gehört die auf die Volumeinheit bezogene Energiegleichung

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot (\operatorname{curl} q)^2 \right) = h \cdot \operatorname{div} [\dot{q}, \operatorname{curl} q] - k \cdot \dot{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Links steht die Änderungsgeschwindigkeit der kinetischen Energie und der (magnetischen) Drehungsenergie des Äthers, rechts zunächst die zu § gehörende Energieströmung und dann

1) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften usw., V, D, Art. 14, H. A. Lorentz, Elektronentheorie p. 157.

ein Glied mit der ihrem mechanischen Sinne nach unbekannten Funktion Ψ . Demnach kann man erstens versuchen, dieses letzte Glied so, wie es da steht, als Zunahme einer weiteren potentiellen Energieform des Äthers zu deuten, oder aber auch bei diesem Gliede erst eine Energieströmung auszuschneiden und dann den Rest weiter zu behandeln. Dazu braucht man die Umformung

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot (\text{curl } q)^2 \right\} - k \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \text{div } \dot{q} \\ & = \text{div} \left\{ h \cdot [\dot{q}, \text{curl } q] - k \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \dot{q} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hier würde es sich darum handeln, das Glied:

$$(15) \quad - k \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \text{div } \dot{q}$$

als Zunahme einer neuen potentiellen Energieform zu deuten, wobei sich dann sogleich die Frage erhebt, ob diese und die unter b) erhobene Forderung miteinander verträglich sind. Geleistet wird die verlangte mechanische Deutung des Gliedes durch die Annahme

$$(16) \quad \Psi = - \frac{G}{k} \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q,$$

welche ergibt:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h \cdot (\text{curl } q)^2 + \frac{1}{2} G \cdot (\text{div } q)^2 \right\} \\ & = \text{div} \{ h \cdot [\dot{q}, \text{curl } q] + G \cdot \dot{q} \cdot \text{div } q \}, \end{aligned} \right.$$

eine Energiegleichung, die bei den immer vorausgesetzten sehr kleinen Veränderungen einen einfachen mechanischen Sinn aufzuweisen scheint.

d) Von anderweitigen einschränkenden Voraussetzungen, die zum Auffinden von einfachen Theorien führen können, sei noch eine der Mechanik entnommene angeführt. Unter der Voraussetzung, daß die Drehungen keinen Beitrag zur potentiellen Energie liefern, muß die Bewegungsgleichung eines jeden beliebigen Kontinuums, das unendlich kleine Deformationen erleidet, bekanntlich¹⁾ die Form haben:

$$(18) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = K \cdot \{ \Delta q + (1 + 2 \Theta) \cdot \text{grad div } q \}.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Physik: Mechanik, Leipzig 1876. 11. u. 27. Vorlesung.

K und Θ sind die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten, Δ der Laplacesche Operator. In diese Gleichung läßt sich die Drehung $(1/2) \cdot \text{curl } q$ nachträglich wieder hineinbringen, obwohl sie zur potentiellen Energie nach Voraussetzung keinen Beitrag liefert.¹⁾ Das geschieht mittels der Beziehung

$$\Delta = - \text{curl curl} + \text{grad div},$$

welche Gleichung (18) überführt in

$$(19) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - K \cdot \text{curl curl } q + 2 K \cdot (1 + \Theta) \cdot \text{grad div } q.$$

Schreibt man hierzu die Grundgleichung (7) der siebenten Gattung

$$(7) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \cdot \text{curl curl } q - k \cdot \text{grad } \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

so folgt, daß unter der obigen einschränkenden Voraussetzung für Ψ die Bedingungsgleichung gilt:

$$(20) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{2 K \cdot (1 + \Theta)}{k} \cdot \text{div } q,$$

während die Konstante h mit dem Kirchhoffschen K identisch wird.

§ 6. Plan der neuen Untersuchung.

Wie man sieht, leistet diese Methode das nicht, worauf es für den erfolgreichen Fortgang der Untersuchung ankommt. Allerdings ist sie geeignet, wenigstens Theorien auffinden zu helfen, die zur Gattung (7) gehören; jedoch ist sie auch in dieser Beziehung nicht so fruchtbar, wie man auf den ersten Blick denken sollte. Sieht man genauer hin, so stellt sich heraus, daß die unter a), c) und d) hergeleiteten Theorien miteinander identisch sind. Man mag sagen, daß die Annahme

$$\Psi = - \frac{G}{k} \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q$$

dadurch an Wahrscheinlichkeit gewinne, aber für die eigentliche Aufgabe, die Gattung (7) erschöpfend zu behandeln, hilft das nicht viel. Und so leisten die vier Untergruppen a) bis d) das, was gesucht wird, eine erschöpfende Einteilung und Be-

1) H. Witte, l. c. p. 122.

grenzung aller denkbaren Theorien, die der einzig übrig gebliebenen Gattung (7) angehören, ganz und gar nicht. —

Faßt man nunmehr dieses Ziel unmittelbar ins Auge, so liegt am nächsten die Frage, ob denn die im § 3 unter I—V vermerkten Grundvoraussetzungen der Gattung (7) schon allesamt vollständig benutzt sind, oder ob sich nicht dort noch eine Tatsache findet, die vielleicht zur Bestimmung der unbekannten Funktion Ψ beitragen kann. Die einzige Tatsache, die bisher nur teilweise Verwendung gefunden hat, ist die unter IV angegebene, daß die ganzen Veränderungen sehr klein sein müssen, weil sich sonst die mechanische Deutung der magnetischen Feldstärke $\oint$ als Drehung nicht durchführen läßt. Sie hat nämlich bisher lediglich als Grundlage für die Vertauschung gedient, die zwischen substantiellen und lokalen Änderungsgeschwindigkeiten vorgenommen wurde.

Nun kann man, gemäß den Ausführungen unter d) im vorigen Paragraphen, für ein *solches* unendlich wenig deformiertes Kontinuum, von dem man voraussetzt, daß die Drehungen nicht in die potentielle Energie eingehen, oder, was dasselbe ist, daß die potentielle Energie nur abhängt von den sechs sogenannten Deformationsgrößen

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_x = \frac{\partial q_x}{\partial x}, & y_z = z_y = \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x}, \\ y_y = \frac{\partial q_y}{\partial y}, & z_x = x_z = \frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x}, \\ z_z = \frac{\partial q_z}{\partial z}, & x_y = y_x = \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y}, \end{array} \right.$$

mit anderen Worten: für jedes Kontinuum, das die Eigenschaften eines gewöhnlichen ponderablen festen elastischen Körpers hat, die allgemeinste Bewegungsgleichung ableiten, woran ja bereits *unter jener Voraussetzung* am Ende von § 5 ein Schluß auf die mechanische Bedeutung der unbekannten Funktion Ψ geknüpft werden durfte. Vermöchte man sich nun von jener beschränkenden Voraussetzung frei zu machen und die allgemeinste Bewegungsgleichung für *jedes* unendlich wenig deformierte Kontinuum aufzustellen, so würde es voraussichtlich möglich sein, durch Vergleichen der gewonnenen allgemeinsten Bewegungsgleichung mit der Grundgleichung (7)

der siebenten Gattung irgend einen *allgemeinen* Schluß auf die Funktion Ψ zu folgern, vielleicht gar sofort den Bereich der denkbaren Theorien auf einige wenige endliche Kreise zusammenzuziehen.

Bei einem ganz beliebigen sehr wenig deformierten Kontinuum hängt nun nach bekannten kinematischen Sätzen die potentielle Energie nicht nur ab von den Verbindungen (21) der neun Größen

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial q_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial q_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_z}{\partial z}, \end{array} \right.$$

sondern von diesen neun Größen selbst. Bisher hat man nur noch nicht vermocht, die potentielle Energie f für diesen allgemeineren Fall der *beliebigen* unendlich wenig deformierten Medien oder, wie man sagen kann, der „*allgemeinen elastischen Medien*“ in geschlossener Form darzustellen, man hat auch kein Interesse daran gehabt, weil man eben bei den gewöhnlichen elastischen ponderablen Körpern mit der Abhängigkeit von den Größen (21) auskam. Dies ist also die Erweiterung auf den Fall der allgemeinen elastischen Medien, um die es sich jetzt handelt. Das Ziel ist, die Bewegungsgleichung (18) der ponderablen elastischen Körper mit den Kirchhoffschen Konstanten K und Θ durch Zusatzglieder auf die Bewegungsgleichung der allgemeinen elastischen Medien zu erweitern. Gelingt es, der neuen Gleichung etwa die Form zu geben:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = K \cdot \{ \Delta q + (1 + 2 \Theta) \cdot \text{grad div } q \} \\ \quad + C_1 \cdot \Omega_1 \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_x}{\partial y}, \frac{\partial q_x}{\partial z}, \frac{\partial q_y}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial y}, \frac{\partial q_y}{\partial z}, \right. \\ \quad \quad \quad \left. \frac{\partial q_z}{\partial x}, \frac{\partial q_z}{\partial y}, \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \\ \quad + C_2 \cdot \Omega_2 \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_x}{\partial y}, \dots \dots \dots \right) \\ \quad + \dots \dots \dots \\ \quad + C_n \cdot \Omega_n \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial y}, \dots \dots \dots \right), \end{array} \right.$$

wo die C_1 bis C_n Konstanten und die Ω Funktionen der neun Ausdrücke (22) sind, so muß die Identifikation mit der Grundgleichung (7), nach der sich in der siebenten Gattung der Äther bewegen soll:

$$(7) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -k \cdot \text{curl curl } q - k \cdot \text{grad } \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

eine endliche Anzahl von möglichen Werten für die unbekannte Funktion Ψ und damit eine endliche Anzahl von denkbaren Theorien liefern, die dann die letzten Möglichkeiten von mechanischen Erklärungsversuchen der elektrischen Erscheinungen mit einem nicht wieder in Ätheratome zerfallenden reinen Äther darstellen.

§ 7. Das allgemeine elastische Medium.

Wenn man in gewohnter Weise mit X_x, Y_y, Z_z die inneren Normaldrucke, mit $X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$ die inneren Schubspannungen bezeichnet, so lautet bekanntlich¹⁾ die allgemeinste Bewegungsgleichung eines Kontinuums, das endliche Deformationen erleidet, bei Abwesenheit äußerer Massen- oder Fernkräfte in den Komponenten:

$$(24) \quad \begin{cases} k \cdot \frac{d^2 q_x}{d t^2} = - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k \cdot \frac{d^2 q_y}{d t^2} = - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k \cdot \frac{d^2 q_z}{d t^2} = - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Diese allgemeinsten Gleichungen sollen nun unter der Voraussetzung weiter behandelt werden, daß alle Deformationen sehr klein sind. Bildet man durch Multiplikation mit $d q_x, d q_y, d q_z$ in bekannter Weise die Energiegleichung, so bekommt diese die Form

$$\int d\tau \cdot d\left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2\right) = - \int d\tau \cdot \left\{ \begin{aligned} & d q_x \cdot \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \\ & + d q_y \cdot \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) \\ & + d q_z \cdot \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}$$

1) G. Kirchhoff, l. c. 11. Vorlesung, Gleichung (8).

oder (25):

$$\int d\tau \cdot (dT) - \int d\tau \cdot \left\{ \begin{aligned} &X_x \frac{\partial}{\partial x} q_x + X_y \frac{\partial}{\partial y} q_x + X_z \frac{\partial}{\partial z} q_x \\ &+ Y_x \frac{\partial}{\partial x} q_y + Y_y \frac{\partial}{\partial y} q_y + Y_z \frac{\partial}{\partial z} q_y \\ &+ Z_x \frac{\partial}{\partial x} q_z + Z_y \frac{\partial}{\partial y} q_z + Z_z \frac{\partial}{\partial z} q_z \end{aligned} \right\} = \int d\sigma \cdot A,$$

wobei

$$(25_1) \quad T = \frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2$$

die kinetische Energie in der Volumeinheit und

$$(25_2) \quad A = X_n \cdot dq_x + Y_n \cdot dq_y + Z_n \cdot dq_z$$

die Arbeit der äußeren Flächenkräfte oder die in der Zeit dt durch die Fläche $d\sigma$ mit der inneren Normale n in der Richtung $+n$ strömende Energie angibt, berechnet für die Flächeneinheit. Soll nun überhaupt eine potentielle Energie f existieren, so muß die Energiegleichung die Gestalt haben

$$(26) \quad \int d\tau \cdot (dT) + \int d\tau \cdot (df) = \int d\sigma \cdot A,$$

woraus sich als Bedingungsgleichung für die potentielle Energie f pro Volumeinheit ergibt:

$$(27) \quad -df = \left\{ \begin{aligned} &X_x \frac{\partial}{\partial x} dq_x + X_y \frac{\partial}{\partial y} dq_x + X_z \frac{\partial}{\partial z} dq_x \\ &+ Y_x \frac{\partial}{\partial x} dq_y + Y_y \frac{\partial}{\partial y} dq_y + Y_z \frac{\partial}{\partial z} dq_y \\ &+ Z_x \frac{\partial}{\partial x} dq_z + Z_y \frac{\partial}{\partial y} dq_z + Z_z \frac{\partial}{\partial z} dq_z \end{aligned} \right\}.$$

Das weitere Verfahren stellt sich auch in der äußeren Form unmittelbar als Erweiterung der von Kirchhoff für ponderable elastische Kontinua angewandten Methode¹⁾ auf das „allgemeine elastische Medium“ dar unter der gemeinsamen Voraussetzung sehr kleiner Deformationen.

Indem man diese Voraussetzung berücksichtigt, erhält man zunächst:

1) G. Kirchhoff, l. c. 27. Vorlesung, § 1.

$$(28) \quad -df = \left\{ \begin{array}{l} X_x d \frac{\partial q_x}{\partial x} + X_y d \frac{\partial q_x}{\partial y} + X_z d \frac{\partial q_x}{\partial z} \\ + Y_x d \frac{\partial q_y}{\partial x} + Y_y d \frac{\partial q_y}{\partial y} + Y_z d \frac{\partial q_y}{\partial z} \\ + Z_x d \frac{\partial q_z}{\partial x} + Z_y d \frac{\partial q_z}{\partial y} + Z_z d \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{array} \right\}.$$

Andererseits ist

$$(29) \quad df = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_x}{\partial x}} d \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_x}{\partial y}} d \frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_x}{\partial z}} d \frac{\partial q_x}{\partial z} \\ + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_y}{\partial x}} d \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_y}{\partial y}} d \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_y}{\partial z}} d \frac{\partial q_y}{\partial z} \\ + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_z}{\partial x}} d \frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_z}{\partial y}} d \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_z}{\partial z}} d \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{array} \right\}.$$

Bei gewöhnlichen ponderablen elastischen Medien kommen an dieser Stelle die drei Bedingungen hinzu für die Schubspannungen:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_z = Z_y, \\ Z_x = X_z, \\ X_y = Y_x. \end{array} \right.$$

Hier, bei dem allgemeinen elastischen Medium, treten keine weiteren Einschränkungen auf. Die neun Größen

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \frac{\partial q_x}{\partial x}, \quad d \frac{\partial q_x}{\partial y}, \quad d \frac{\partial q_x}{\partial z}, \\ d \frac{\partial q_y}{\partial x}, \quad d \frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad d \frac{\partial q_y}{\partial z}, \\ d \frac{\partial q_z}{\partial x}, \quad d \frac{\partial q_z}{\partial y}, \quad d \frac{\partial q_z}{\partial z} \end{array} \right.$$

sind unabhängig voneinander, mithin ergibt sich

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_x}{\partial x}}, \quad X_y = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_x}{\partial y}}, \quad X_z = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_x}{\partial z}}, \\ Y_x = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_y}{\partial x}}, \quad Y_y = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_y}{\partial y}}, \quad Y_z = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_y}{\partial z}}, \\ Z_x = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_z}{\partial x}}, \quad Z_y = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_z}{\partial y}}, \quad Z_z = - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial q_z}{\partial z}}. \end{array} \right.$$

Um den Unterschied zwischen allgemeinem elastischen Medium und gewöhnlichen ponderablen elastischen Körpern genau verfolgen zu können, empfiehlt es sich, statt der neun Größen (22) die sechs „Deformationsgrößen“ (21) der gewöhnlichen elastischen Körper

$$(21) \quad \begin{cases} x_x = \frac{\partial q_x}{\partial x}, & y_z = z_y = \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z}, \\ y_y = \frac{\partial q_y}{\partial y}, & z_x = x_z = \frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x}, \\ z_z = \frac{\partial q_z}{\partial z}, & x_y = y_x = \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \end{cases}$$

einzuführen und dazu noch die Drehung, die wieder mit $u/2$ bezeichnet werden möge, so daß die Komponenten von u lauten:

$$(33) \quad \begin{cases} u_x = \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z}, \\ u_y = \frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x}, \\ u_z = \frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Dann hat man im ganzen wiederum neun voneinander unabhängige Größen, die den Namen „Deformationsgrößen des allgemeinen elastischen Mediums“ erhalten sollen. Sie leisten natürlich dasselbe wie die neun Größen (22). Man erhält dann statt (28):

$$(34) \quad -df = \left\{ \begin{array}{l} X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z \\ + \frac{1}{2}(Z_y + Y_z) dz_y + \frac{1}{2}(X_z + Z_x) dx_z + \frac{1}{2}(Y_x + X_y) dy_x \\ + \frac{1}{2}(Z_y - Y_z) du_x + \frac{1}{2}(X_z - Z_x) du_y + \frac{1}{2}(Y_x - X_y) du_z \end{array} \right\}$$

und statt (29):

$$(35) \quad df = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_x} dx_x + \frac{\partial f}{\partial y_y} dy_y + \frac{\partial f}{\partial z_z} dz_z \\ + \frac{\partial f}{\partial x_y} dz_y + \frac{\partial f}{\partial x_z} dx_z + \frac{\partial f}{\partial y_z} dy_x \\ + \frac{\partial f}{\partial u_x} du_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} du_y + \frac{\partial f}{\partial u_z} du_z \end{array} \right\},$$

so daß sich schließlich an Stelle von (32) ergibt:

$$(36) \quad \begin{cases} X_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_y = -\frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_z = -\frac{\partial f}{\partial z_z}, \\ \frac{1}{2}(Z_y + Y_z) = -\frac{\partial f}{\partial x_y}, & \frac{1}{2}(X_z + Z_x) = -\frac{\partial f}{\partial x_z}, & \frac{1}{2}(Y_x + X_y) = -\frac{\partial f}{\partial y_x}, \\ \frac{1}{2}(Z_y - Y_z) = -\frac{\partial f}{\partial u_x}, & \frac{1}{2}(X_z - Z_x) = -\frac{\partial f}{\partial u_y}, & \frac{1}{2}(Y_x - X_y) = -\frac{\partial f}{\partial u_z}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man die $X_x, Y_y, Z_z, X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$ berechnen und mit deren Hilfe die rechten Seiten der Bewegungsgleichung (24):

$$(37) \quad \begin{cases} k \cdot \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial t} = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ k \cdot \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial t} = -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ k \cdot \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial t} = -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{cases}$$

als Zustandsfunktionen darstellen, sobald f als Zustandsfunktion bekannt ist. Die Bestimmung des „allgemeinen elastischen Potentials“ f ist die einzige Aufgabe, die noch zu lösen bleibt.

§ 8. Das allgemeine elastische Potential.

Hierfür gelten nun dieselben Erwägungen wie bei den gewöhnlichen elastischen Körpern.¹⁾ Die neun Deformationsgrößen des allgemeinen elastischen Mediums sind unendlich klein, mithin hängen die $X_x, Y_y, Z_z, X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$ linear von ihnen ab; im „natürlichen Zustande“ haben alle neun Deformationsgrößen und zugleich alle neun Spannungskomponenten den Wert Null, folglich sind die $X_x, Y_y, Z_z, X_y, X_z, Y_x, Y_z, Z_x, Z_y$ nicht nur lineare, sondern auch homogene Funktionen aller neun „allgemeinen elastischen Deformationsgrößen“

$$(38) \quad \begin{cases} x_x, & y_y, & z_z, \\ y_z = z_y, & z_x = x_z, & x_y = y_x, \\ u_x, & u_y, & u_z, \end{cases}$$

dasselbe gilt für die in (36) vorkommenden Verbindungen $Z_y + Y_z, X_z + Z_x, Y_x + X_y$ und $Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y$; also

1) G. Kirchhoff, l. c. 27. Vorlesung, § 1.

muß schließlich das allgemeine elastische Potential f nach (36) eine homogene Funktion zweiten Grades der neun allgemeinen elastischen Deformationsgrößen (38) sein, da eine additive Konstante ohne physikalische Bedeutung sein würde und die Glieder vom ersten Grade fehlen müssen.

Demnach wird der allgemeinste Ausdruck für das allgemeine elastische Potential f im Falle eines ganz unsymmetrischen Mediums durch das folgende Schema (39) gegeben:

$$(39) \left\{ \begin{array}{cccccccccc} x_x & y_y & z_z & z_y & x_z & y_x & u_x & u_y & u_z & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & x_x \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & y_y \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & z_z \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & z_y \\ & & & & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} & x_z \\ & & & & & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} & y_x \\ & & & & & & a_{77} & a_{78} & a_{79} & u_x \\ & & & & & & & a_{88} & a_{89} & u_y \\ & & & & & & & & a_{99} & u_z \end{array} \right.$$

In diesem Schema ist jeder Koeffizient a mit denjenigen beiden allgemeinen elastischen Deformationsgrößen zu multiplizieren, die an der Spitze der Vertikal- und der Horizontalreihe stehen, der er angehört, und das Ganze ist zu addieren. In der Tat erhält man dann die allgemeinste quadratische Funktion der neun allgemeinen elastischen Deformationsgrößen. Sie enthält 45 Glieder und ebenso viele Konstanten a , während die Zahl bei den gewöhnlichen ponderablen elastischen Körpern nur 21 beträgt, weil dort die Entwicklung mit a_{66} abbricht.

Nun wird man, genau wie es dort geschieht, nacheinander immer höhere Grade der Symmetrie einführen, in der Absicht, schließlich zum vollständig isotropen Medium überzugehen, wie es der Weltäther sein muß.

Damit man vom asymmetrischen System, das also durch die 45 Konstanten dargestellt wird, zum monoklinen gelange, muß eine zweizählige Symmetrieachse eingeführt werden. Sei dies die z -Achse. Dann müssen die Koeffizienten a , die im allgemeinen ebenso wie die neun „allgemeinen elastischen

Deformationsgrößen“ vom Koordinatensystem abhängen, dieselben sein, wenn das Koordinatensystem um die x -Achse um 180° gedreht wird, wenn man also setzt:

$$\begin{aligned}x' &= -x, \\y' &= -y, \\z' &= +z.\end{aligned}$$

Man erhält alsdann

$$\begin{aligned}q_x' &= -q_x, \\q_y' &= -q_y, \\q_z' &= +q_z\end{aligned}$$

und weiter:

$$(40) \quad \begin{cases} x_x' = +x_x, & z_y' = -z_y, & u_x' = -u_x, \\ y_y' = +y_y, & x_z' = -x_z, & u_y' = -u_y, \\ z_z' = +z_z, & y_x' = +y_x, & u_z' = +u_z. \end{cases}$$

Infolgedessen erhalten im gestrichenen Koordinatensystem alle diejenigen Produkte, deren Faktoren in den Substitutionsgleichungen (40) ungleiche Vorzeichen haben, das Vorzeichen Minus; da der Koeffizient nach wie vor derselbe sein muß und die absoluten Werte der Faktoren beliebig angenommen werden können, ist erforderlich, daß jeweils der zugehörige Koeffizient verschwindet. Das gibt gegenüber dem Schema (39) des allgemeinen elastischen Potentials für asymmetrische Krystalle nunmehr die folgenden Vereinfachungen:

1. für die drei ersten Horizontalreihen des Schemas:

$$(41_1) \quad \begin{cases} a_{14} = 0, & a_{15} = 0, & a_{17} = 0, & a_{18} = 0, \\ a_{24} = 0, & a_{25} = 0, & a_{27} = 0, & a_{28} = 0, \\ a_{34} = 0, & a_{35} = 0, & a_{37} = 0, & a_{38} = 0, \end{cases}$$

2. für die zweiten drei Zeilen:

$$(41_2) \quad \begin{cases} a_{46} = 0, & a_{49} = 0, \\ a_{56} = 0, & a_{59} = 0, \\ a_{67} = 0, & a_{68} = 0, \end{cases}$$

3. für die drei letzten:

$$(41_3) \quad \begin{cases} a_{79} = 0, \\ a_{89} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Durch Einführen dieser Bedingungen (41) in (39) ergibt sich leicht das Schema des allgemeinen elastischen Potentials für die monoklinen Kristalle, es darf wohl davon abgesehen werden, es ausdrücklich anzuschreiben. Geht man sogleich zum rhombischen System über, so muß noch eine zweite zweizählige Symmetrieachse vorhanden sein, etwa die x -Achse. Dann wird:

$$\begin{aligned}x' &= +x, & \eta_x' &= +\eta_x, \\y' &= -y, & \eta_y' &= -\eta_y, \\z' &= -z, & \eta_z' &= -\eta_z\end{aligned}$$

und ferner

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{lll} x_z' = +x_x, & z_y' = +z_y, & u_x' = +u_x, \\ y_y' = +y_y, & x_z' = -x_z, & u_y' = -u_y, \\ z_z' = +z_z, & y_x' = -y_x, & u_z' = -u_z. \end{array} \right.$$

Zu den Vereinfachungen (41) treten demnach die folgenden hinzu:

1. für die drei ersten Horizontalreihen des Schemas:

$$(43_1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{16} = 0, & a_{19} = 0, \\ a_{26} = 0, & a_{29} = 0, \\ a_{36} = 0, & a_{39} = 0, \end{array} \right.$$

2. für die zweiten drei Zeilen:

$$(43_2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a_{46} = 0, & & a_{48} = 0, \\ \dots & a_{57} = 0 & \dots \end{array} \right.$$

3. für die drei letzten nur:

$$(43_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{77} = 0, \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Nimmt man nun (41) und (43) zusammen, so zeigt sich, daß die y -Achse von selbst gleichfalls eine zweizählige Symmetrieachse geworden ist, und es ergibt sich als Schema des rhombischen Systems:

x_x	y_y	z_z	z_y	x_z	y_x	u_x	u_y	u_z	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	0	0	0	0	0	0	x_x
	a_{22}	a_{23}	0	0	0	0	0	0	y_y
		a_{33}	0	0	0	0	0	0	z_z
			a_{44}	0	0	a_{47}	0	0	z_y
				a_{55}	0	0	a_{58}	0	x_z
					a_{66}	0	0	a_{69}	y_x
						a_{77}	0	0	u_x
							a_{88}	0	u_y
								a_{99}	u_z

Das hexagonale System kann hier ganz weggelassen werden. Das quadratische erfordert eine vierzählige Symmetrieachse; es sei die z -Achse, so daß man setzen muß:

$$x' = +y, \quad q_x' = +q_y,$$

$$y' = -x, \quad q_y' = -q_x,$$

$$z' = +z, \quad q_z' = +q_z,$$

dazu:

$$x_x' = +y_y, \quad z_y' = -x_z, \quad u_x' = +u_y,$$

$$y_y' = +x_x, \quad x_z' = +x_y, \quad u_y' = -u_x,$$

$$z_z' = +z_z, \quad y_x' = -y_x, \quad u_z' = +u_z.$$

Jetzt ergibt sich, daß mehrere der a einander gleich sein müssen; das Schema für die allgemein elastischen quadratischen Kristalle wird:

x_x	y_y	z_z	z_y	x_z	y_x	u_x	u_y	u_z	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	0	0	0	0	0	0	x_x
	a_{11}	a_{13}	0	0	0	0	0	0	y_y
		a_{33}	0	0	0	0	0	0	z_z
			a_{44}	0	0	a_{47}	0	0	z_y
				a_{44}	0	0	$-a_{47}$	0	x_z
					a_{66}	0	0	0	y_x
						a_{77}	0	0	u_x
							a_{77}	0	u_y
								a_{99}	u_z

Nun sind noch neun verschiedene Konstanten drin, sechs von dem gewöhnlichen elastischen Verhalten her, zwei (a_{77} und a_{99}), die zu den Drehungen, und eine (a_{47}), die zur Wechselwirkung beider gehören.

Das letzte Kristallsystem, das reguläre, wird erhalten, indem man auch die x -Achse zur vierzähligen Symmetrieachse macht, also setzt:

$$\begin{aligned} x' &= +x, & q_x' &= +q_x, \\ y' &= +z, & q_y' &= +q_z, \\ z' &= -y, & q_z' &= -q_y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_x' &= +x_x, & z_y' &= -z_y, & u_x' &= +u_x, \\ y_y' &= +z_z, & x_z' &= -y_x, & u_y' &= +u_z, \\ z_z' &= +y_y, & y_x' &= +x_z, & u_z' &= -u_y. \end{aligned}$$

Wieder nimmt die y -Achse von selbst die gleiche Eigenschaft wie die beiden anderen an, und es bleibt für das reguläre Kristallsystem das Schema (44):

$$(44) \left\{ \begin{array}{cccccccccc} x_x & y_y & z_z & z_y & x_z & y_z & u_x & u_y & u_z & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_x \\ & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_y \\ & & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_z \\ & & & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_y \\ & & & & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_z \\ & & & & & a_{44} & 0 & 0 & 0 & y_x \\ & & & & & & a_{77} & 0 & 0 & u_x \\ & & & & & & & a_{77} & 0 & u_y \\ & & & & & & & & a_{77} & u_z \end{array} \right.$$

Somit sind nur vier Konstanten übrig geblieben, drei (a_{11} , a_{12} , a_{44}) die auch bei den gewöhnlichen ponderablen elastischen Medien vorhanden sind und eine vierte (a_{77}), die sich auf die Drehungen allein bezieht, alle Glieder, die eine Wechselwirkung anzeigten, sind verschwunden. Das allgemeine elastische Potential f für reguläre Kristalle (und infolgedessen dann auch für isotrope Medien) ist also die Summe zweier Potentiale f_p und f_q ,

$$(45) \quad f = f_p + f_q,$$

deren erstes

$$(45_1) \quad f_p = \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) \\ + 2a_{12} \cdot (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ + a_{44} \cdot (z_y^2 + x_z^2 + y_x^2) \end{array} \right\}$$

mit dem elastischen Potential der ponderablen Körper identisch ist, während das zweite

$$(45_2) \quad f_q = a_{77} \cdot (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = a_{77} \cdot u^2$$

seiner physikalischen Bedeutung nach Drehungspotential genannt werden kann, oder aber einer von Lord Kelvin angewandten Bezeichnungsweise gemäß elastisches Potential eines „quasirigiden“ Mediums, worauf der Index q hinweisen soll. In einer seiner bekanntesten (allerdings nicht durchführbaren) Äthertheorien führt nämlich Lord Kelvin im Gegensatze zu den gewöhnlichen ponderablen festen oder „rigiden“ Körpern unter dem Namen „quasirides Medium“ ein Medium ein, dessen potentielle Energie gar nicht von den sechs gewöhnlichen elastischen Deformationsgrößen $x_x, y_y, z_z, z_y, x_z, y_x$ der ponderablen Körper abhängt, sondern nur von der Drehung $u/2$ und zwar dem Quadrate der Drehung proportional ist.¹⁾ Dagegen hängt bei den gewöhnlichen ponderablen festen Körpern die potentielle Energie nur von den sechs gewöhnlichen elastischen Deformationsgrößen ab und gar nicht von der Drehung $u/2$. Durch Superposition der Eigenschaften dieser beiden Klassen von Medien, *durch Superposition des gewöhnlichen elastischen Potentials f_p der ponderablen Körper und des quasirigiden Potentials f_q erhält man die Eigenschaften des allgemeinen elastischen Mediums, d. h. also das allgemeine elastische Potential f .*

Nebenbei mag das Ergebnis angeführt werden, das man gewonnen hätte, wenn man, anstatt die Gleichungen (34), (35) und (36) zu benutzen, von (28), (29) und (32) ausgegangen wäre. Dieser letztere Weg führt nicht über das Schema (39), sondern über ein ähnliches, das man erhält, indem man an Stelle von

$$x_x, y_y, z_z, z_y, x_z, y_x, u_x, u_y, u_z$$

1) Sir William Thomson, *Mathematical and physical papers*, London 1890, 3. p. 442.

einführt

$$x_x, y_y, z_z, \frac{\partial q_x}{\partial y}, \frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial x}, \frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_x}{\partial y}$$

und die neuen Konstanten etwa durch einen Stern kenntlich macht (a^* statt a). Für die sechs nur von x_x, y_y, z_z abhängenden Glieder, also die linke obere Ecke des Schemas, bleibt dann alles unverändert, die Unterschiede gelangen in dem übrigen Teile zum Ausdruck. Kommt man bei den regulären Körpern an, so lautet das Schema:

x_x	y_y	z_z	$\frac{\partial q_x}{\partial y}$	$\frac{\partial q_x}{\partial x}$	$\frac{\partial q_y}{\partial x}$	$\frac{\partial q_y}{\partial x}$	$\frac{\partial q_x}{\partial x}$	$\frac{\partial q_x}{\partial y}$	
a_{11}^*	a_{12}^*	a_{12}^*	0	0	0	0	0	0	x_x
	a_{11}^*	a_{12}^*	0	0	0	0	0	0	y_y
		a_{11}^*	0	0	0	0	0	0	z_z
			a_{44}^*	0	0	a_{47}^*	0	0	$\frac{\partial q_x}{\partial y}$
				a_{44}^*	0	0	a_{47}^*	0	$\frac{\partial q_x}{\partial x}$
					a_{44}^*	0	0	a_{47}^*	$\frac{\partial q_y}{\partial x}$
						a_{44}^*	0	0	$\frac{\partial q_y}{\partial x}$
							a_{44}^*	0	$\frac{\partial q_x}{\partial x}$
								a_{44}^*	$\frac{\partial q_x}{\partial y}$

Man erhält also

$$f = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}^* \cdot (x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) \\ + 2a_{12}^* \cdot (y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ + a_{44}^* \cdot \left\{ \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ + 2a_{47}^* \cdot \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial y} \right\} \end{array} \right.$$

Um nun zu den neun allgemein elastischen Deformationsgrößen

$$x_x, y_y, z_z, z_y, x_z, y_x, u_x, u_y, u_z$$

überzugehen, hat man auf die beiden letzten, die Konstanten a_{44}^* und a_{47}^* enthaltenden Glieder die Transformationen anzuwenden:

$$\left(\frac{\partial q_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2$$

$$2 \frac{\partial q_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2$$

usw. Sie ergeben

$$a_{i,i}^* \cdot \left\{ \left(\frac{\partial q_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

$$+ 2 a_{i,i}^* \cdot \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial y} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (a_{i,i}^* + a_{i,i}^*) \cdot (z_y^2 + x_z^2 + y_x^2) \\ + \frac{1}{2} (a_{i,i}^* - a_{i,i}^*) \cdot (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \end{array} \right\}$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{2} (a_{i,i}^* + a_{i,i}^*) = a_{i,i},$$

$$\frac{1}{2} (a_{i,i}^* - a_{i,i}^*) = a_{i,i},$$

so sieht man, daß auch dieser Weg auf dasselbe in die beiden voneinander unabhängigen Teile f_p und f_q zerfallende allgemeine elastische Potential f führt, wie es die Gleichungen (45), (45₁), (45₂) darstellen.

Von diesen Gleichungen aus erfolgt nun der Übergang zu den ponderablen Körpern, der, wie schon bemerkt, für f_p und f_q einzeln vollzogen werden kann, da beide voneinander unabhängig sind. Für f_q ist er überdies schon vorhanden, denn die Konstante a_{77} muß ohne weiteres vom Koordinatensystem unabhängig sein, weil der mit ihr verbundene Faktor u^2 als Quadrat eines Vektors nicht vom Koordinatensysteme abhängt. Für f_p kann er aus der Mechanik der gewöhnlichen ponderablen Körper herübergenommen werden. Dadurch reduzieren sich bekanntlich¹⁾ die drei Konstanten a_{11} , a_{12} , a_{44} auf zwei, für die man mittels der Substitutionen

$$a_{11} - 2 a_{44} = K \cdot \Theta$$

$$2 a_{44} = K$$

die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten K und Θ einführen kann. Indem man noch

$$a_{77} = a$$

1) G. Kirchhoff, a. a. O., 27. Vorlesung § 1, 11. Vorlesung § 7.

setzt, erhält man so für das isotrope allgemein elastische Medium:

$$(46) \quad f = \begin{cases} K \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2} z_y^2 + \frac{1}{2} x_z^2 + \frac{1}{2} y_x^2) \\ + K \cdot \Theta \cdot (x_x + y_y + z_z)^2 \\ + a \cdot (\text{curl } q)^2. \end{cases}$$

Damit ist die am Ende von § 7 gestellte Aufgabe, das allgemeine elastische Potential f als Zustandfunktion zu bestimmen, vollständig gelöst. Jetzt kann man nach (36) die Drucke und Schubspannungen berechnen und sie in die Bewegungsgleichung (37) bzw. (24) einführen.

§ 9. Die Bewegungsgleichung des allgemeinen elastischen Mediums.

Für die Drucke ergeben die Gleichungen (36):

$$(47_1) \quad \begin{cases} X_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x} = -2K \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \Theta \cdot \text{div } q \right), \\ Y_y = -\frac{\partial f}{\partial y_y} = -2K \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} + \Theta \cdot \text{div } q \right), \\ Z_z = -\frac{\partial f}{\partial z_z} = -2K \cdot \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} + \Theta \cdot \text{div } q \right), \end{cases}$$

für die Schubspannungen:

$$\frac{1}{2}(Z_y + Y_z) = -\frac{\partial f}{\partial x_y} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} \right), \quad \text{usw.}$$

$$\frac{1}{2}(Z_y - Y_z) = -\frac{\partial f}{\partial u_x} = -2a \cdot \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} \right), \quad \text{usw.}$$

Mithin sind die Schubspannungen einzeln:

$$(47_2) \quad \begin{cases} Z_y = -\frac{\partial f}{\partial x_y} - \frac{\partial f}{\partial u_x} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) - 2a \cdot [\text{curl } q]_x, \\ X_z = -\frac{\partial f}{\partial x_x} - \frac{\partial f}{\partial u_y} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) - 2a \cdot [\text{curl } q]_y, \\ Y_x = -\frac{\partial f}{\partial y_x} - \frac{\partial f}{\partial u_z} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) - 2a \cdot [\text{curl } q]_z \end{cases}$$

und

$$(47_3) \quad \begin{cases} Y_z = -\frac{\partial f}{\partial x_y} + \frac{\partial f}{\partial u_x} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) + 2a \cdot [\text{curl } q]_x, \\ Z_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x} + \frac{\partial f}{\partial u_y} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) + 2a \cdot [\text{curl } q]_y, \\ X_y = -\frac{\partial f}{\partial y_x} + \frac{\partial f}{\partial u_z} = -K \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) + 2a \cdot [\text{curl } q]_z. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte (47) in die allgemeine Bewegungsgleichung (37) ein, so folgt für eine Komponente, etwa x :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = \\
 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2K \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \Theta \cdot \operatorname{div} q \right) \right\} \\ & + K \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial q_z}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial z} \right) \right\} \\ & - 2a \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\operatorname{curl} q]_z - \frac{\partial}{\partial z} [\operatorname{curl} q]_y \right\} \end{aligned} \right\} \\
 = K \cdot \{ \Delta q + (1 + 2\Theta) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} q \}_x - 2a \cdot \{ \operatorname{curl} \operatorname{curl} q \}_x.
 \end{aligned}$$

Die *allgemeinste Bewegungsgleichung* für jedes kleine Deformationen erleidende „*allgemeine elastische Medium*“ lautet demnach:

$$(48) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = K \cdot \{ \Delta q + (1 + 2\Theta) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} q \} - 2a \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q.$$

Dagegen hatte die *allgemeinste Bewegungsgleichung* für jeden kleine Deformationen erleidenden *ponderablen elastischen Körper* die Grundform (18), die in § 5 in der Untergruppe (d) vermerkt worden ist,

$$(18) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = K \cdot \{ \Delta q + (1 + 2\Theta) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} q \}.$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Grundformen der zum ponderablen und der zum allgemeinen elastischen Medium gehörenden allgemeinsten Bewegungsgleichung besteht also darin, daß beim allgemeinen elastischen Medium auf der rechten Seite $-2a \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q$ hinzukommt; und das am Schlusse von § 6 aufgestellte Problem, die n Zusatzfunktionen Ω_1 bis Ω_n zu bestimmen, ist gelöst durch die Antwort: $C_1 \cdot \Omega_1$ ist gleich $-2a \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q$, und Ω_2 bis Ω_n sind Null.

§ 10. Folgerung.

Die Bestimmung der n Zusatzfunktionen Ω war deshalb in § 6 als wünschenswert bezeichnet worden, weil an ihre Möglichkeit die Hoffnung geknüpft werden konnte, für die ihrem mechanischen Sinne nach unbekannte Funktion Ψ eine endliche Anzahl von denkbaren Werten zu finden; entsprechend dem einzigen Werte (20) für die Funktion Ψ , der sich unter

der Annahme, der Äther habe die Eigenschaften eines ponderablen elastischen Kontinuums, aus der allgemeinsten Bewegungsgleichung (18) der ponderablen elastischen Körper ergeben hatte. Nun hatte jener Wert (20) dort nicht unmittelbar aus der Grundform (18) erschlossen werden können, vielmehr war es nötig gewesen, mittels der Beziehung

$$\Delta = - \operatorname{curl} \operatorname{curl} + \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

vorher die Gleichung aus der Grundform (18) in die Form (19) überzuführen:

$$(19) \quad h \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - K \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2 K \cdot (1 + \Theta) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} q.$$

Infolgedessen liegt es nahe, dieselbe Umformung auch bei der Grundform der *allgemeinen* elastischen Bewegungsgleichung (48) zu versuchen. Wendet man die Beziehung für das Laplacesche Δ auf (48) an, so bleibt:

$$(49) \quad h \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - (K + 2a) \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2 K \cdot (1 + \Theta) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} q$$

und man erhält das überraschende Resultat: *Die allgemeinste Bewegungsgleichung für das allgemeine elastische Medium nimmt dieselbe Form an wie die allgemeinste Bewegungsgleichung des gewöhnlichen ponderablen elastischen Kontinuums.*

Damit aber treten mit einem Schlage auch für das *allgemeine* elastische Kontinuum die Schlüsse der Untergruppe (d) in § 5 in Wirksamkeit. Schreibt man wieder die allgemeinste Bewegungsgleichung (7) des Äthers in der siebenten Gattung hinzu,

$$(7) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} q - k \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

so folgt nunmehr ganz allgemein und ohne jede Einschränkung durch Vergleich von (7) und (49) für Ψ ein einziger bestimmter Wert, und zwar ganz derselbe, wie ihn bereits Gleichung (20) darstellt:

$$(50) \quad \Psi = - \frac{2 K \cdot (1 + \Theta)}{k} \int_{-\infty}^t dt \cdot \operatorname{div} q.$$

Nicht einmal in den Konstanten tritt eine Änderung ein, indem die neue Konstante a nur in der veränderten Bedeutung

von h zum Ausdruck kommt, früher war $h = K$, jetzt ist $h = K + 2a$.

Dieser Wert (50) von Ψ stellt also die einzige übrig bleibende Theorie dar, an der die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen mit einem nicht wieder in diskrete Teilchen zerfallenden reinen Weltäther hängt. —

Anmerkungsweise mag darauf hingewiesen werden, daß dies eben der Wert von Ψ ist, den in § 5 nicht nur die Untergruppe (d), sondern auch die Untergruppen (a) und (c) als besonders einfachen Fall ergaben. Jene im Anfang von § 6 ganz hypothetisch ausgesprochene relative Wahrscheinlichkeit dieses Wertes von Ψ hat sich also als eine berechtigte Vermutung erwiesen. Insbesondere erscheint beachtenswert, daß gemäß den Ausführungen bei Untergruppe (a) dieses Ψ genau der Scheidung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ bzw. der elektrischen Erregung $\mathfrak{b}$ entspricht, die in der Lorentzschen Elektrodynamik als rein mathematischer Kunstgriff durchweg angewendet wird.

§ 11. Plan für die Untersuchung der letzten übrig gebliebenen Theorie.

Jetzt handelt es sich nur noch um die eine Frage: Ist diese letzte übrig gebliebene mechanische Theorie der elektrischen Erscheinungen mit einem kontinuierlichen reinen Äther durchführbar oder nicht?

Fällt die Antwort bejahend aus, so ist damit die mechanische Erklärung der Elektrodynamik gefunden; im anderen Falle sind die elektrischen Erscheinungen durch einen kontinuierlichen reinen Äther nicht mechanisch erklärbar.

Um die Frage zu entscheiden, hat man, wie auch sonst, auf alle bekannten elektromagnetischen Erscheinungen die gefundene Theorie anzuwenden, d. h. also überall die speziellen Bewegungs- und Spannungszustände auszurechnen und zu diskutieren, die den betreffenden elektrischen und magnetischen Feldern zugrunde liegen müssen. Ob man dabei mit den schnell veränderlichen Feldern anfängt, oder etwa mit den statischen Erscheinungen, ist grundsätzlich gleichgültig. Wenn man keine Widersprüche findet, muß man eben doch alle verschiedenen Typen elektromagnetischer Vorgänge durchrechnen

und diskutieren; sollten aber Widersprüche in der Theorie enthalten sein, so ist es schließlich Glückssache, daß man sogleich dasjenige Gebiet herausgreift, auf dem sie verhältnismäßig offen zutage liegen. —

Der Ausgangspunkt für die mathematische Verfolgung ist überall auf der mechanischen Seite die Ätherbewegungsgleichung (7) der siebenten Gattung mit dem Werte (50) von Ψ , der die Gleichung (7) mit der allgemeinsten allgemein-elastischen Bewegungsgleichung (49) oder (48) identisch macht. Folgende Vereinfachungen und Umformungen, die ganz allgemein gelten, mögen vor Eintritt in die Untersuchung angemerkt werden.

Führt man zwei neue Konstanten H und G ein, die durch die Gleichungen definiert sind:

$$(51) \quad \begin{cases} K + 2a = H, \\ 2K \cdot (1 + \Theta) = G, \end{cases}$$

so nimmt die allgemeinste Bewegungsgleichung (49) der allgemein-elastischen Medien die Form an

$$k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -H \cdot \text{curl curl } q + G \cdot \text{grad div } q.$$

Hierzu tritt wieder die Grundgleichung (7) der siebenten Gattung

$$(7) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -h \cdot \text{curl curl } q - k \cdot \text{grad } \frac{\partial}{\partial t}$$

oder auch, da nach (4) in § 3 die Konstante $h = c^2 \cdot k$ ist,

$$k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -c^2 \cdot k \cdot \text{curl curl } q - k \cdot \text{grad } \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Dann lassen sich die Bedingungen der Identität von allgemeinsten Bewegungsgleichung der allgemein-elastischen Medien und allgemeinsten Ätherbewegungsgleichung der Gattung (7) auf etwas einfachere Formen bringen, die in den folgenden Beziehungen enthalten sind:

$$H = K + 2a = h = c^2 \cdot k,$$

$$\Psi = -\frac{G}{k} \cdot \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q = -\frac{2K \cdot (1 + \Theta)}{k} \cdot \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q.$$

Will man noch die Umformungen, die infolge der Beziehung

$$\Delta = - \operatorname{curl} \operatorname{curl} + \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

möglich sind, mittels der Konstanten H und G ausdrücken, so ergeben sich die folgenden drei gleichberechtigten Grundgleichungen der Theorie:

$$(52_1) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = -H \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{q} + G \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{q},$$

$$(52_2) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = (G - H) \cdot \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{q} + G \cdot \Delta \mathfrak{q},$$

$$(52_3) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = H \cdot \Delta \mathfrak{q} + (G - H) \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{q}.$$

Indessen wird man bei der tatsächlichen Durchführung der Untersuchung zweckmäßigerweise nicht von einer dieser *mechanischen* Grundgleichungen (52) ausgehen, sondern auf der *elektrischen* Seite beginnen, also die Maxwell-Lorentz'schen Grundgleichungen für einen von ponderabler Materie und von Elektronen freien Raum zugrunde legen,

$$(1) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{H},$$

$$(2) \quad -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = c \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{E},$$

wie sie im Anfang von § 3 den Ausgangspunkt der Gesamtuntersuchung geliefert haben. Alle Integrale dieser Gleichungen (1) und (2) sind zugleich Integrale der mechanischen Grundgleichung (52), einerlei, in welcher Form sie benutzt wird, und umgekehrt. Die eindeutige Zuordnung wird überall gegeben durch die Beziehungen (3) und (4) des § 3 mit dem Werte (50) von Ψ , also durch

$$(53) \quad \mathfrak{E} = -\sqrt{4\pi k} \cdot \left\{ \dot{\mathfrak{q}} - \frac{2K \cdot (1 + \Theta)}{k} \cdot \operatorname{grad} \int_{-\infty}^t dt \cdot \operatorname{div} \mathfrak{q} \right\},$$

$$(54) \quad \mathfrak{H} = \frac{h}{k} \cdot \sqrt{4\pi k} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{q} = c^2 \cdot \sqrt{4\pi k} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{q}.$$

Setzt man in den Gleichungen (1) und (2) z. B. $\mathfrak{H} = 0$, so bekommt man in bekannter Weise die Elektrostatik, $\mathfrak{E} = 0$ liefert die Magnetostatik, usw. usw.; und immer ergeben die Beziehungen (53) und (54) die zugehörigen Bewegungs- bzw.

Spannungszustände im Äther. Um nun zu entscheiden, mit welchen Klassen von Integralen man am besten anfängt, wird man auch bei dieser Theorie versuchen, sich zunächst durch ein Beispiel über die Art der hier auftretenden mechanischen Vorgänge zu orientieren.

§ 12. Wiederum ein Beispiel.

In § 4 wurde bereits unter anderen, allerdings undurchführbaren Grundannahmen (Inkompressibilität) das Feld eines geradlinig gleichförmig bewegten Elektrons mechanisch gedeutet. Es empfiehlt sich, dasselbe Beispiel auch hier zu betrachten.

Die Maxwell-Lorentzschen Grundgleichungen (1) und (2) ergeben, wenn die Bezeichnungen wie oben gewählt werden, nach § 4 für $\mathfrak{E}$ den Wert (11):

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}'_r = \frac{B \cdot \sin \Theta'}{r'^2} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}}$$

in relativen Koordinaten. Jetzt aber ist der Grundlage der vorliegenden Theorie, d. h. dem Werte (50) von Ψ zufolge die Scheidung von $\mathfrak{E}$ genau die, die man in der Maxwell-Lorentzschen Theorie selbst anwendet, indem man dort $\mathfrak{A}$ und φ ausrechnet. Man bekommt demnach¹⁾

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}'_{(\mathfrak{A})} &= \mathfrak{E}'_{(\mathfrak{A})z} = + \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{B}{r'^2} \cdot \frac{\cos \Theta'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}}, \\ \mathfrak{E}'_{(\psi)} &= - \operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi = \frac{B}{r'} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, deren Wert hier nicht gebraucht wird, liefert gemäß (54) die infolge der Bewegung auftretenden Drehungen, der Teil $\mathfrak{E}'_{(\psi)}$ von $\mathfrak{E}$ gemäß (53) die Dilatationen. Der Bewegungszustand selbst wird durch den Teil $\mathfrak{E}'_{(\mathfrak{A})}$ von $\mathfrak{E}$ dargestellt, der in (53) der Geschwindigkeit $\dot{q}$ entspricht. Wenn man wieder, um das Vorzeichen zu

1) H. A. Lorentz, l. c. p. 174f.

erhalten, $B = -A$ setzt, ergibt $\mathcal{E}_{(u)}$ für die Geschwindigkeit $\dot{q}'$ in relativen Koordinaten den Wert:

$$\dot{q}' = \dot{q}_z' = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \frac{r^2}{c^2} \cdot \frac{A}{r'^2} \cdot \frac{\cos \Theta'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}} - v.$$

Demzufolge sind die Bahnkurven sämtlich gerade Linien, parallel der Fortschreitungsrichtung z des Elektrons. Um die Art der Störung zu überblicken, empfiehlt es sich, statt der relativen Geschwindigkeit $\dot{q}'$ die absolute $\dot{q}$ zu betrachten, in dem Augenblick, wenn das Elektron den Punkt $z = 0$ durchschreitet. Der ganze Vorgang wird erkannt, wenn man eine beliebige Ebene herausgreift, die die z -Achse enthält. Man erhält dann für diese Zeit $t = t_0$ den Wert der Absolutgeschwindigkeit:

$$\dot{q} = \dot{q}_z = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{A}{r^2} \cdot \frac{\cos \Theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta\right)^{3/2}}$$

oder auch

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot A \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \varrho^2\right)^{3/2}}.$$

Der Äther ruht daher überall im Unendlichen, nämlich für $z = \infty$ und für $\varrho = \infty$; oder für $r = \infty$ bei jedem Werte von Θ . Ferner ist zur Zeit $t = t_0$ auf der ganzen ϱ -Achse seine absolute Geschwindigkeit Null, da längs der ϱ -Achse für jedes ϱ die Funktion $\cos \Theta$ Null wird (nur der Koordinatenanfangspunkt ist dabei auszuschließen). In bezug auf die z -Achse erweist sich der Vorgang selbstverständlich als symmetrisch. In den beiden der positiven z -Achse benachbarten Quadranten ist bei positivem A die Geschwindigkeit $\dot{q}$ positiv, in den beiden neben der Achse ($-z$) liegenden negativ, so zwar, daß die absoluten Werte $|\dot{q}|$ gleich groß sind in Punkten, die von der ϱ -Achse gleichen Abstand haben. Demnach muß $|\dot{q}|$, wenn man von der ϱ -Achse parallel z in die positive bzw. negative Unendlichkeit fortschreitet (oder auch, wenn man bei konstantem r den Winkel Θ von $\pi/2$ bis 0 bzw. bis π gehen läßt, sich also auf einem Viertelkreise von der ϱ - bis zur positiven bzw. negativen z -Achse bewegt) beiderseits in gleichem Abstände von der ϱ -Achse ein Maximum besitzen. Den Ort

dieses Maximums findet man etwa für die erste Art des Fortschreitens durch

$$\frac{\partial |\dot{q}|}{\partial x} = 0.$$

Außer den bereits bekannten Minimis ($z = \infty$ und $\rho = \infty$) liefert diese Gleichung für die Maxima

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \rho^2 - 2z^2 = 0.$$

Man erhält also zwei gerade Linien (vgl. Fig. 4), die durch den Nullpunkt gehen und deren Richtungskonstanten gegeben sind durch

$$\tan \omega = \frac{z}{\rho} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{2}}.$$

Auf allen Bahnkurven liegt der augenblickliche Maximalwert von $\dot{q}$ demnach auf dem Geradenpaare, das durch diese Gleichung bestimmt wird. Der Wert von ω , also des Winkels jeder der Geraden mit der ρ -Achse, hängt von der Translationsgeschwindigkeit v des Elektrons ab; die äußersten Grenzen sind:

1. v nahezu $= 0$, $\tan \omega = \pm 1/\sqrt{2}$, $\omega = \pm 35^\circ 15' 22''$,
2. $v = c$, $\tan \omega = \pm 0$, $\omega = 0^\circ$.

Fig. 4.

Der Maximalwert von $|\dot{q}|$ selbst nimmt auf dem Geradenpaare, wenn man vom Koordinatenanfangspunkt bis ins Unendliche geht, ab wie $1/r^2$, wie $|\dot{q}|$ das übrigens auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden tut. Die Dilatationsgeschwindigkeit ist in denjenigen durch das Geradenpaar erzeugten Abschnitten, die der z -Achse anliegen, negativ, in den der ρ -Achse anliegenden positiv, wobei das Maximum auf der ρ -Achse erreicht wird.

Diesen absoluten Bewegungszustand des Äthers erzeugt also das Elektron auf seiner ganzen Bahn. Während es die z -Achse mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v entlang läuft, erleidet der Äther überall in derselben Richtung, d. h. parallel z , unendlich kleine Verschiebungen aus der Ruhelage, und zwar

in der Hälfte des Raumes, die vor dem Elektron liegt, in der Richtung $(+z)$, in der anderen Hälfte in der Richtung $(-z)$; ist das Elektron wieder hinreichend weit entfernt, so gehen die Verschiebungen, sowie die Kompressionen bzw. Dilatationen auf Null zurück, jedes Teilchen nimmt seine ursprüngliche Lage ein. Auch Drehungen treten auf, während das Elektron vorbeigeht; sie werden als magnetische Feldstärke $\mathfrak{S}$ wahrgenommen, während die Verdichtungen bzw. Verdünnungen zusammen mit der Geschwindigkeit $\dot{q}$ als elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in Wirksamkeit treten, gemäß der Zusammensetzung von $\mathfrak{E}$ aus $\mathfrak{E}_{(q)}$ und $\mathfrak{E}_{(\psi)}$.

§ 13. Überschau.

Diese Vorgänge liefern ohne weiteres keine Gründe für oder gegen die Theorie; sie sind, wenn auch etwas eigenartig, so doch nicht unvorstellbar. Hier kann man sie benutzen, um einen Überblick über die charakteristischen mechanischen Zustände zu gewinnen, die in der vorliegenden letzten Theorie der Gattung (7) auftreten. Die drei Grundvorgänge bzw. -zustände sind die folgenden:

1. Elastische Deformation, gekennzeichnet durch ψ bzw. durch $\mathfrak{E}_{(\psi)}$,
2. Drehung, gemessen durch die magnetische Feldstärke $\mathfrak{S}$,
3. Bewegung, gekennzeichnet durch Geschwindigkeit $\dot{q}$ oder $\mathfrak{E}_{(q)}$.

Man kann nun schon an dem Beispiel grobenteils übersehen, was für eine mechanische Deutung die bekannten elektromagnetischen Erscheinungen bekommen. Setzt man nämlich die Geschwindigkeit v des Elektrons gleich Null, so erhält man den einfachsten Fall der Elektrostatik; das Hintereinanderreihen einer großen Zahl von gleichförmig bewegten Elektronen liefert den stationären galvanischen Strom, gleichzeitig erhält man einen einfachen Typus eines unveränderlichen Magnetfeldes, usf. Allgemein ergibt sich leicht, daß die drei unter (1), (2), (3) vermerkten mechanischen Grundvorgänge bzw. zustände bei den einzelnen Gruppen von elektromagnetischen Erscheinungen in folgender Weise auftreten:

I. In der Elektrostatik liegen reine Spannungszustände vor, charakterisiert durch einen polaren Vektor $\mathfrak{E}_{(q)}$ (Grundvorgang 1).

II. In der Magnetostatik ebenfalls reine Spannungszustände, aber gekennzeichnet durch einen axialen Vektor $\mathfrak{S}$ (Grundvorgang 2).

III. Bei stationären galvanischen Strömen Kombination von (1) und (2), bei veränderlichen von (1), (2) und (3), wobei Grundvorgang (3) durch einen polaren Vektor, die Geschwindigkeit $\dot{q}$, charakterisiert ist.

IV. Bei einzelnen bewegten Elektronen Kombination von (1), (2) und (3).

V. Bei schnellen Schwingungen Kombination von (1), (2) und (3) oder nur von (2) und (3).

Es sind hier alle Kombinationen der drei Grundvorgänge nacheinander hineingekommen von der ersten bis zur dritten Klasse mit Ausnahme von (3) allein und von (1, 3). Vorgänge, die (3) allein entsprächen, müßten durch die Geschwindigkeit $\dot{q}$ allein charakterisiert werden. Solche Bewegungszustände ohne potentielle Energie, wie sie etwa Quell- und Senkpunkte in einem inkompressiblen Medium erzeugen, sind aber durch die Form der Ätherbewegungsgleichung (7) bzw. (49) der siebenten Gattung ausgeschlossen. Indessen ist sehr wohl zu bemerken, daß die andere Möglichkeit, die Kombination von (1) und (3), durch die elektrischen wie die mechanischen Grundgleichungen der siebenten Gattung in der Tat offen gelassen wird. Setzt man in der mechanischen Grundgleichung etwa in der Form, wie sie durch (52₁) oder (52₂) dargestellt wird,

$$\text{curl curl } q = 0,$$

so ergibt sich, daß der Äther *reiner Longitudinalschwingungen* fähig sein muß, geliefert durch

$$k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = G \cdot \text{grad div } q$$

oder auch

$$k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = G \cdot \Delta q.$$

Da die Konstante G für $2K \cdot (1 + \Theta)$ eingeführt wurde (51), läßt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_l dieser reinen Longitudinalschwingungen folgendermaßen durch die Ätherkonstanten k , a , K , Θ ausdrücken:

$$c_l = \sqrt{\frac{2K \cdot (1 + \Theta)}{k}},$$

während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_t der Transversalwellen zu den Konstanten in der Beziehung steht:

$$c_t = \sqrt{\frac{K + 2a}{k}}.$$

Jedenfalls ergibt sich in der Tat als sechster möglicher Vorgang im reinen Äther:

VI. Reine Longitudinalwellen, Kombination von Grundvorgang (1) und Grundvorgang (3).

Nur haben diese reinen Longitudinalwellen, deren Möglichkeit übrigens der Kompressibilität des Äthers entspricht, die Eigenschaft, daß sie den Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Werte Null lassen. Die Theorie vermag demnach nicht anzugeben, wie diese reinen Longitudinalschwingungen hergestellt werden und wie sie, wenn sie auftreten sollten, für die menschlichen Sinne wahrnehmbar sein könnten.

Blickt man nun auf die sechs Gruppen von möglichen Vorgängen im reinen Äther zurück und fragt sich, mit welcher Gruppe man am besten die Untersuchung beginnt, so bietet sich als besonders einfach und zugleich als besonders charakteristisch für die Gattung (7) die Elektrostatik dar (I), denn in der Elektrostatik hängt das ganze Feld nur von der Funktion ψ ab, die nach Gleichung (8) dem elektrostatischen Potentiale φ proportional und ihrem mechanischen Sinne nach durch die Beziehung (50) bestimmt ist.

§ 14. Die Grundlagen der Elektrostatik.

Aus den Maxwell-Lorentzschen Gleichungen im reinen Äther

$$(1) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c. \operatorname{curl} \mathfrak{H},$$

$$(2) \quad -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = c. \operatorname{curl} \mathfrak{E},$$

erhält man die Elektrostatik, wenn man $\mathfrak{H} = 0$ setzt. Dann ergibt sich in bekannter Weise als einzige Grundgleichung

$$(55) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{(\psi)} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Von den Gleichungen in § 11, die die mechanische Deutung vermitteln,

$$(53) \quad \mathfrak{E} = -\sqrt{4\pi k} \cdot \left\{ \dot{q} - \frac{2K \cdot (1 + \Theta)}{k} \cdot \text{grad} \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q \right\},$$

$$(54) \quad \mathfrak{H} = \frac{h}{k} \cdot \sqrt{4\pi k} \cdot \text{curl } q = c^2 \cdot \sqrt{4\pi k} \cdot \text{curl } q$$

liefert die erste gemäß der Beziehung $\varphi = \sqrt{4\pi k} \cdot \Psi$ als Ergänzung von (55)

$$(56) \quad \dot{q} = 0,$$

d. h., der Äther ist überall in Ruhe, man hat es mit einem reinen Spannungs- oder Verschiebungszustande zu tun; und

$$(57) \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \varphi = \Psi = -\frac{2K \cdot (1 + \Theta)}{k} \cdot \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q,$$

die zweite zieht die Bedingung nach sich

$$(58) \quad \text{curl } q = 0.$$

Aus der Form (57) von φ bzw. Ψ folgt aber unmittelbar eine zweite Bedingung für den Verschiebungszustand im reinen Äther:

$$(59) \quad \text{div } q = 0,$$

denn andernfalls hätte Ψ keinen bestimmten Wert. Die letztere Bedingung ist so zu verstehen, daß *jetzt, nachdem das Feld statisch geworden ist*, die Divergenz von q gleich Null sein muß; früher muß sie selbstverständlich überall längere oder kürzere Zeit von Null verschieden gewesen sein, damit Ψ , als Zeitintegral über diese Divergenz, selber einen von Null verschiedenen Wert haben kann.

Aus den beiden Bedingungen (58), (59) ergibt sich nun allgemein, daß ein Verschiebungspotential Ω besteht,

$$(60) \quad q = -\text{grad } \Omega,$$

welches die Form haben muß

$$(61) \quad \Omega = \sum \frac{A}{r},$$

wobei sich die Konstante A und die Entfernung r jeweils auf ein Elektron beziehen. Dieselbe Form (61) hat aber bekanntlich auch das elektrostatische Potential φ selber; mithin ist das Verschiebungspotential Ω dem elektrostatischen Potential φ proportional

$$(62) \quad \Omega = C \cdot \varphi,$$

wo C eine Konstante ist, und die Verschiebung selber der elektrischen Feldstärke,

$$(63) \quad \mathfrak{q} = -C. \text{grad } \varphi = C. \mathfrak{E}.$$

Außerdem sagen die Bedingungen (58) und (59) aus, daß die elastische Energie im elektrostatischen Felde nicht von den Drehungen und nicht von den Dilatationen abhängt. Mithin kann sie nur in den drehungs- und dilatationsfreien Formänderungen enthalten sein.

Der Zahlenwert für die verschiedenen Formen der elastischen Energie, von denen hier die Rede ist, hängt nun wesentlich von den Konstanten K , Θ und α ab. Bevor zu einfachen elektrostatischen Feldern selbst übergegangen wird, muß demnach untersucht werden, ob zwischen diesen Konstanten Beziehungen bestehen können, die für die Elektrostatik von Bedeutung sind.

§ 15. Über die Konstanten.

Es ist besonders eine eigenartige, oben bereits angedeutete Beziehung für die Energie, welche eine Untersuchung über die Konstanten nötig macht. Wie am Schlusse von § 10 vermerkt wurde, führte die Untergruppe (c) des § 5 auf einen Wert von Ψ , der mit dem Ψ in Gleichung (50) identisch ist, d. h. mit eben dem Ψ der letzten übrig gebliebenen Theorie, die jetzt behandelt wird. Nun findet sich in jener Untergruppe (c) eine Energiegleichung (17), die, wenn man die später (in § 11) aufgestellten Beziehungen $h = K + 2\alpha$ und $G = 2K.(1 + \Theta)$ benutzt, die Form annimmt

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} h \cdot \dot{\mathfrak{q}}^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (K + 2\alpha) \cdot (\text{curl } \mathfrak{q})^2 + K \cdot (1 + \Theta) \cdot (\text{div } \mathfrak{q})^2 \right\} \\ & = \text{div} \{ (K + 2\alpha) \cdot [\dot{\mathfrak{q}}, \text{curl } \mathfrak{q}] + 2K \cdot (1 + \Theta) \cdot \dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{div } \mathfrak{q} \}. \end{aligned} \right.$$

Links steht neben der Änderungsgeschwindigkeit der kinetischen Energie die einer potentiellen, welche sich zusammensetzt aus Drehungs- und Dilatationsenergie; die rechte Seite entspricht einer ähnlich aufgebauten Energieströmung. Alle die mechanischen Energieformen, wie sie die linke Seite enthält, sind aber nach § 14 im elektrostatischen Felde Null.

Im elektrostatischen Felde wäre also, wenn der Energieumsatz überall nach der Gleichung (64) erfolgte, überhaupt keine Energie vorhanden. Hier scheint ein Widerspruch zu stecken.

Man vergleiche nun die von Gleichung (64) gelieferte potentielle Energie

$$(65) \quad \frac{1}{2} \cdot (K + 2a) \cdot (\text{curl } q)^2 + K \cdot (1 + \Theta) \cdot (\text{div } q)^2$$

mit der Form (46), die die potentielle Energie des Äthers insofern haben muß, als sie mit dem allgemein elastischen Potential f identisch sein soll:

$$(66) \quad f = \begin{cases} a \cdot (\text{curl } q)^2 \\ + K \cdot \Theta \cdot (\text{div } q)^2 \\ + K \cdot \left\{ \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{cases}$$

Da zeigt sich sofort die verschiedene Stellung der Konstanten. In (65) ist das Quadrat von $\text{curl } q$ mit der Verbindung $(K + 2a)/2$, das Quadrat von $\text{div } q$ mit der Verbindung $K \cdot (1 + \Theta)$ multipliziert. Dagegen sind in (66) die Faktoren nur a bzw. $K \cdot \Theta$, und es kommt dort noch ein drittes Glied hinzu, dessen Koeffizient K lautet. Es fragt sich: Ist die Zusammenfassung der ganzen potentiellen Energie in die zwei Glieder mit den Konstanten $(K + 2a)/2$ und $K \cdot (1 + \Theta)$, wie sie (65) bietet, neben dem allgemein elastischen Potential (66) zulässig oder nicht?

Um die Frage zu entscheiden, muß man sich den Zusammenhang der Gleichung (64) mit der allgemeinen Ätherbewegungsgleichung der vorliegenden letzten Theorie vergegenwärtigen. Dazu geht man am besten von der Form (48) aus, in der diese allgemeine Ätherbewegungsgleichung zuerst gewonnen wurde,

$$(67) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = K \cdot \{ \Delta q + (1 + 2\Theta) \cdot \text{grad div } q \} - 2a \text{ curl curl } q.$$

Multipliziert man hier beide Seiten mit $\dot{q}$ und führt rechts in

bekannter Weise die partiellen Integrationen aus, so folgt die Energiegleichung:

$$(68) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{aligned} & a \cdot (\text{curl } q)^2 \\ & + K \cdot \Theta \cdot (\text{div } q)^2 \\ & + K \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \right. \\ = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2 K \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \Theta \text{div } q \right) \cdot \dot{q}_x \right. \\ & \quad + \left(K \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) + 2 a [\text{curl } q]_z \right) \cdot \dot{q}_y \\ & \quad + \left(K \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) - 2 a [\text{curl } q]_y \right) \cdot \dot{q}_z \Big\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(K \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) - 2 a [\text{curl } q]_z \right) \cdot \dot{q}_x \right. \\ & \quad + 2 K \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} + \Theta \text{div } q \right) \cdot \dot{q}_y \\ & \quad + \left(K \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) + 2 a [\text{curl } q]_x \right) \cdot \dot{q}_z \Big\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(K \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) + 2 a [\text{curl } q]_y \right) \cdot \dot{q}_x \right. \\ & \quad + \left(K \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) - 2 a [\text{curl } q]_x \right) \cdot \dot{q}_y \\ & \quad + 2 K \cdot \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} + \Theta \text{div } q \right) \cdot \dot{q}_z \Big\} \end{aligned} \right\}.$$

Dies ist die Gleichung, die ganz allgemein den wirklichen Energieumsatz im reinen Äther wiedergibt. Das erkennt man daraus, daß hier die rechte Seite genau der Arbeit der äußeren Kräfte entspricht, wie sie in § 7 zur Herleitung des allgemeinen elastischen Potentials benutzt wurde (Gleichung (25₂) mit den Werten (47) aus § 9 für die Drucke und Schubspannungen). Links steht dabei Änderungsgeschwindigkeit der kinetischen Energie T und der potentiellen mit dem Werte von f , der sich in § 7 bis § 9 ergeben hat.

Nun läßt die Gleichung (68) folgende Umformung beider Seiten zu:

$$(69) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} (K + 2a) \cdot (\text{curl } q)^2 \\ & + K \cdot (1 + \Theta) \cdot (\text{div } q)^2 \\ & - 2K \cdot \left\{ \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \\ & = -2K \cdot \left\{ \begin{aligned} & \text{div} \{ (K + 2a) \cdot [\dot{q}, \text{curl } q] + 2K \cdot (1 + \Theta) \cdot \dot{q} \cdot \text{div } q \} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \dot{q}_x \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\dot{q}_y \cdot \frac{\partial q_x}{\partial y} + \dot{q}_x \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \dot{q}_y \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\dot{q}_x \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} + \dot{q}_x \cdot \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \dot{q}_x \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\dot{q}_x \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \dot{q}_y \cdot \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

und hier kann man, wie sich leicht ergibt, die mit $-2K$ multiplizierten Ausdrücke links und rechts gegeneinander heben, so daß übrig bleibt

$$(70) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} (K + 2a) \cdot (\text{curl } q)^2 \\ & + K \cdot (1 + \Theta) \cdot (\text{div } q)^2 \end{aligned} \right\} \\ & = \text{div} \left\{ \begin{aligned} & (K + 2a) \cdot [\dot{q}, \text{curl } q] \\ & + 2K \cdot (1 + \Theta) \cdot \dot{q} \cdot \text{div } q \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

Diese neue Energiegleichung (70) ist nun identisch mit der aus § 5 in diesen Paragraphen herübergenommenen Gleichung (64). Man gewinnt sie unmittelbar aus der allgemeinen Ätherbewegungsgleichung, indem man die letztere nicht in der Form (48) oder (67) zugrunde legt, sondern in der anderen (49), die in § 10 zur Bestimmung von Ψ benutzt wurde,

$$(71) \quad k \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - (K + 2a) \cdot \text{curl curl } q + 2K \cdot (1 + \Theta) \cdot \text{grad div } q.$$

So ist demnach der Zusammenhang zwischen den Energiegleichungen (64) oder (70) und (68). Um also von Gleichung (68), die rechts die tatsächliche Arbeit der äußeren Kräfte enthält,

zur Gleichung (64) oder (70) überzugehen, muß man, entsprechend der Veränderung der potentiellen Energie links, auf der rechten Seite von der wirklichen Arbeit der äußeren Kräfte gewisse Glieder wegstreichen. Daraus folgt unmittelbar, daß die Gleichung (64) oder (70) nicht den tatsächlichen Energievorrat und Energieumsatz darstellt, sondern allein die Energiegleichung (68).

Die im Anfange dieses Paragraphen hervorgehobene Schwierigkeit für die elektrostatische Energie ist demnach nur scheinbar vorhanden. Den tatsächlichen Wert der mechanischen Energie $f_{st.}$ für das elektrostatische Feld kann man aus Gleichung (68) unmittelbar entnehmen; es ist der Rest von f , der bleibt, wenn man $\text{curl } q$ und $\text{div } q$ gleich Null setzt,

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{st.} = K \cdot & \left\{ \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \right.$$

die formell bestehende Möglichkeit, die Gleichung (68) in (64) oder (70) umzuformen, kommt gar nicht in Betracht, weil sie dem tatsächlichen Vorgange nicht entspricht.

Nur in einem Falle könnte, rein von der mechanischen Seite betrachtet, auch Gleichung (64) oder (70) den wirklichen Energieumsatz geben, nämlich wenn die Konstanten a , K , Θ die folgenden Spezialwerte hätten:

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} & K \cdot \Theta \text{ endlich,} \\ & K = 0, \\ & a \text{ endlich.} \end{aligned} \right.$$

Dann würde tatsächlich (64) oder (70) mit der richtigen Energiegleichung (68) identisch werden. Da aber die mechanische Energie $f_{st.}$ des elektrostatischen Feldes in diesem Falle nicht nur scheinbar, sondern wirklich Null wäre, so folgt, daß die spezielle Wertekombination (73) unmöglich ist: K muß unter allen Umständen von Null verschieden sein. Lediglich dieses Ergebnis wird für die folgende Untersuchung des elektrostatischen Feldes gebraucht werden, etwaige denkbare Spezialwerte von a und von Θ kommen für sie nicht in Betracht und können daher bis auf weiteres unberücksichtigt bleiben.

§ 16. Ein elektrostatisch geladenes Kugelchen.

Das einfachste elektrostatische Feld erhält man, wenn man sich eine ruhende, sehr kleine elektrostatisch geladene Kugel denkt, deren Mittelpunkt zum Koordinatenanfang gemacht wird. Bezeichnet D die Maßzahl der Ladung, so ist in diesem Falle das elektrostatische Potential

$$(74) \quad \varphi = \frac{D}{r}$$

und die elektrische Feldstärke

$$(75) \quad \mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi = \mathfrak{E}_r = \frac{D}{r^2}.$$

Es ist nun leicht, auch unabhängig von der allgemeinen Überlegung des § 14 den Verschiebungszustand zu bestimmen. Der Wert (50) von ψ

$$\psi = -\frac{2K \cdot (1 + \Theta)}{k} \int_{-\infty}^t dt \cdot \text{div } q$$

soll, wenn man seinen Gradienten bildet, die elektrische Feldstärke liefern. Da diese zeitlich konstant sein soll, folgt zunächst

$$\text{grad div } q = 0.$$

Zunächst bliebe also die Möglichkeit, daß etwa bei einem positiven Elektron $\text{div } q$ überall im ganzen unendlichen Raume gleich einer endlichen Konstanten c_1 sei,

$$(76_1) \quad \text{div } q = c_1.$$

Indessen müßte dann für ein negatives Elektron der Wert $-c_1$ sein, mithin ergibt sich

$$(76_2) \quad c_1 = 0.$$

Dasselbe Resultat findet man zugleich mit der Lösung selbst unmittelbar folgendermaßen. Angenommen, es sei gemäß Gleichung (76₁) überall $\text{div } q = c_1$, der Koordinatenursprung der einzige Unstetigkeitspunkt. Dann ist aus Symmetriegründen die (immer sehr kleine) Verschiebung q im ganzen Raume radial gerichtet und nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängig. Infolgedessen ergibt die Bedingung (76₁), wenn

$$|q| = f(r)$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \eta = \frac{2 \cdot f(r)}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} = c_1.$$

Diese Gleichung hat zum allgemeinen Integrale die folgende:

$$\eta = f(r) = \frac{A}{r^2} + \frac{c_1}{3} \cdot r,$$

wobei A die willkürliche Konstante ist. Soll verhindert werden, daß die Verschiebung η in sehr großer Entfernung vom Nullpunkt unendlich groß wird, so kommt nur in Betracht

$$\eta = \frac{A}{r^2},$$

oder, indem man die Richtung des Vektors zum Ausdruck bringt,

$$(77) \quad \eta = \eta_r = \frac{A}{r^2}.$$

Das ist derselbe der Gleichung (75) für die elektrische Feldstärke entsprechende Wert der Verschiebung η , der gemäß § 14 aus dem Vorhandensein eines dem elektrostatischen Potentiale φ proportionalen Verschiebungspotentials

$$(78) \quad \Omega = \frac{A}{r}$$

hätte erschlossen werden können.

Um ein Bild von diesem Verschiebungszustande zu erhalten, stelle man sich zunächst den *Geschwindigkeitszustand* vor, der durch dieselbe Funktion Ω geliefert wird, wenn man sie als Geschwindigkeitspotential betrachtet. Dann muß man sich im Koordinatenursprung eine sogenannte Quelle vorhanden denken, das Kontinuum strömt überall vom Anfangspunkte radial nach außen, und zwar inkompressibel. Die Geschwindigkeit selbst nimmt umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ab, so daß sie im Unendlichen Null wird. Über jede, auch eine unendlich große konzentrische Kugelfläche tritt in der Zeit 1 genau soviel Äther nach außen wie über die unendlich kleine Kugelfläche, die den Nullpunkt umschließt. Diese inkompressible Ätherbewegung denke man sich nun zu irgend einer Zeit t_0 in dem vorher absolut ruhenden Äther beginnend und darauf eine gewisse kleine Zeit δt hindurch andauernd, bis zum Zeitpunkte t_1 . Läßt man dann die Be-

wegung ebenso plötzlich wieder zur Ruhe kommen, so ist das Gesamtergebnis derjenige *Verschiebungszustand*, der dem Verschiebungspotentiale (78)

$$\Omega = \frac{A}{r}$$

entspricht. Die Energie der Drehungen und der Dilatationen ist dabei Null, da weder die einen noch die anderen vorhanden sind. Die gesamte elastische Energie f_{el} beruht auf den reinen Formänderungen. Jedes Volumelement (Fig. 5) erweist sich

Fig. 5.

Fig. 6.

nämlich, da sein Abstand vom Nullpunkt größer geworden ist, als in radialer Richtung komprimiert und in der darauf senkrechten Ebene nach allen Richtungen gleichmäßig dilatiert, wie es die Fig. 6 veranschaulicht.

Dieser Formänderung wirken gewisse Drucke X_n, Y_n, Z_n entgegen. Um Formänderung wie Drucke zu berechnen, empfiehlt es sich, ein Volumelement $dx \cdot dy \cdot dz$ zu betrachten, das auf einer der Koordinatenachsen liegt, etwa der x -Achse. Dann folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} x_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} &= -\frac{2A}{r^3}, & y_z = z_y = \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} &= 0, \\ y_y = \frac{\partial q_y}{\partial y} &= +\frac{A}{r^3}, & z_x = x_z = \frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} &= 0, \\ z_z = \frac{\partial q_z}{\partial z} &= +\frac{A}{r^3}, & x_y = y_x = \frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Das ist die Deformation, und die entgegenwirkenden Drucke:

$$\begin{aligned} X_x &= +\frac{4K \cdot A}{r^3}, & Y_z &= Z_y = 0, \\ Y_y &= -\frac{2K \cdot A}{r^3}, & Z_x &= X_z = 0, \\ Z_z &= -\frac{2K \cdot A}{r^3}, & X_y &= Y_x = 0. \end{aligned}$$

gemäß den allgemeinen Bestimmungsgleichungen (47) für die Drucke und Schubspannungen im allgemein elastischen Medium, wie sie in § 9 hergeleitet sind. Die drei Hauptdrucke liegen also in der Tat, entsprechend den Dilatationen, in der Richtung des Radiusvektors und senkrecht darauf; ihre Vorzeichen sind, wie erforderlich, denen der Hauptdilatationen entgegengesetzt. Jedes Teilchen strebt in die Anfangsgestalt zurück, die es eben in der Anfangslage besaß.

Beim negativen Elektron kehren sich überall die Vorzeichen um, sonst bleibt alles unverändert. In beiden Fällen ist der Gesamtbetrag der in der Volumeinheit enthaltenen *potentiellen elastischen Energie*, der Einfachheit halber wieder sogleich für die spezielle Lage $x = r$, $y = 0$, $z = 0$, gegeben durch den Wert (72) von $f_{st.}$, wenn man darin y_z usw. gleich Null setzt und für x_x , y_y , z_z die soeben abgeleiteten Werte einsetzt. Man erhält dann

$$(79) \quad f_{st.} = \frac{6 K \cdot A^2}{r^6}.$$

Die potentielle elastische Energie des elektrostatischen Feldes pro Volumeinheit ist also der sechsten Potenz der Entfernung vom Kugelmittelpunkt umgekehrt proportional.

Alle diese, aus der Existenz des Verschiebungspotentials Ω und seinem Werte (78)

$$\Omega = \frac{A}{r}$$

abgeleiteten Aussagen über den Zustand des Feldes sind einleuchtend und geben eine einheitliche, verständliche mechanische Vorstellung vom elektrostatischen Felde.

Nun aber macht sich die eigentlich charakteristische Eigenschaft der Gattung (7) geltend. Die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik liefert nämlich eine Funktion, die, ganz abgesehen von Ω usw., *für sich allein* den physikalischen Zustand in jedem Punkte des Feldes bestimmen soll. Der Maxwell-Lorentzschen Theorie zufolge ist die entscheidende physikalische Größe nicht das Verschiebungspotential Ω , das dort überhaupt nicht auftritt, sondern das elektrostatische Potential φ .

Infolgedessen erhebt sich zunächst offenbar die Forderung, daß dieses φ in der mechanischen Erklärung ebenfalls eine Zustandsgröße im mechanischen Sinne sein muß. Der mecha-

nische Wert von φ ist nun aber gegeben durch den grundlegenden Wert (50) der Funktion ψ , die mit φ durch die Beziehung (8)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \varphi$$

zusammenhängt. Er lautet

$$(50) \quad \psi = - \frac{2 K \cdot (1 + \Theta)}{k} \int_{-\infty}^t dt \cdot \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Da scheint sogleich ganz allgemein ein unlösbarer Widerspruch vorzuliegen. Dieses ψ hängt ja offenbar durchaus nicht vom Zustande ab, sondern von dem *Zeitintegral* über eine Zustandsgröße. Wie sollen die Werte, welche die Divergenz der Verschiebung, also die absolute Verdünnung oder Verdichtung selbst, zu längst vergangenen Zeiten besessen hat, irgendwie auf den elastischen Zustand von Einfluß sein können, der *jetzt* herrscht?

Um zunächst diese Frage näher zu untersuchen, muß man auf die vorhin gewählte Veranschaulichung für den Verschiebungszustand zurückgreifen. Man sieht sogleich, daß das dort entworfene kinematische Bild gewiß nicht das richtige ist. Denn es setzt voraus, daß die ganze Bewegung vor Eintreten des statischen Zustandes inkompressibel erfolgt sei, daß also stets

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

gewesen sei. Dann müßte aber nach (50) auch ψ und φ selber im ganzen Raume Null sein.

Damit nun

$$\psi = - \frac{2 K \cdot (1 + \Theta)}{k} \int_{-\infty}^t dt \cdot \operatorname{div} \mathbf{q}$$

nicht Null wird, sondern gemäß (74) überall den Wert

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \cdot \frac{D}{r}$$

bekommt, muß zunächst in jedem Punkte $\int_{-\infty}^t dt \cdot \operatorname{div} \mathbf{q}$ einen endlichen Wert haben, d. h. es muß früher irgendwann einmal eine endliche Dilatation dort bestanden haben; und zweitens

muß diese Dilatation, damit die umgekehrte Proportionalität mit der Entfernung r gewahrt wird, in der Nähe länger gedauert haben oder stärker gewesen sein. So gelangt man zu folgender Vorstellung von der erstmaligen „Schöpfung“ eines Elektrons mit seinem Felde: Zu irgend einer sehr weit zurückliegenden Zeit, etwa $t = -\infty$, ist ein gewisses Ätherquantum aus dem Innern der Kugel (d. h. aus dem dort angehäuften verdichteten Äthervorrat (oder auch aus der vierten Dimension)) gleichmäßig über die Oberfläche nach außen gestoßen worden. Dieser Stoß hat sich dann als longitudinale Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c_l der Longitudinalschwingungen (§ 13) weiter nach außen radial fortgepflanzt bis ins Unendliche, so zwar, daß im Endeffekt über jede konzentrische ideale Kugelfläche, auch über eine unendlich große, dasselbe Ätherquantum nach außen gestoßen ist. Beim negativen Elektron hat im Augenblick der Schöpfung ein entsprechendes Einsaugen stattgefunden. Alles in allem ist aber die tatsächliche Lage nach diesem longitudinal fortgepflanzten Schöpfungsakte dieselbe wie nach der inkompressiblen Bewegung, die zuerst zur vorläufigen Veranschaulichung angenommen wurde; nur hat sich die Sache jetzt mit der Kompressibilität des Äthers in Einklang bringen lassen. — Es ist überhaupt eigentümlich, daß fast alle Äthertheorien für die erstmalige Schöpfung der Elektronen ein irgendwie vorstellbares mechanisches Bild ergeben, mag es auch manchmal abenteuerlich genug aussehen.

§ 17. Einwände.

Bedenken erheben sich nun auch hier sogleich. Da tatsächlich die Endlage der Ätherteilchen nach dem Schöpfungsakte sich durch nichts unterscheidet von der, die sie nach dem zuerst angenommenen inkompressiblen Vorgang haben würden, bleibt hier im Beispiel die allgemeine Bemerkung aus § 16 bestehen, daß die Funktion ψ ganz und gar nicht vom Zustande, sondern von der Vorgeschichte abhängt. Wie aber diese Vorgeschichte in dem jetzigen Zustande des kontinuierlichen und überall gleichartigen reinen Äthers zum Ausdruck kommen soll, ist absolut unerfindlich; selbst bei diskontinuierlicher Struktur des reinen Äthers müßte man erst nach Hypo-

thesen über Eindrücke oder Nachwirkungen von den Deformationen her, die früher einmal geherrscht haben, suchen.

Noch gewichtigere Bedenken erheben sich aber, wenn man von der Maxwell-Lorentzschen Funktion φ

$$(74) \quad \varphi = \frac{D}{r}$$

zu dem Werte für die *potentielle Energie* des elektrostatischen Feldes übergeht, den dieses φ liefert. Der Zusammenhang ist bekanntlich der folgende. Aus dem Werte von φ erhält man die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ gemäß Gleichung (75) als

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r = \frac{D}{r^2}$$

und daraus ist die potentielle Energie W_e des elektrostatischen Feldes nach der allgemein gültigen Beziehung (vgl. § 3)

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2$$

zu berechnen. Somit erhält man für die potentielle Energie des elektrostatischen Feldes pro Volumeinheit, von den *elektrischen* Grundlagen aus berechnet, den Wert

$$(80) \quad W_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{D^2}{r^4}.$$

Nun war aber im vorigen Paragraphen dieselbe potentielle Energie des elektrostatischen Feldes pro Volumeinheit von den *mechanischen* Grundlagen aus berechnet worden, d. h. mittels des Verschiebungspotentials Ω (78) und des allgemeinen elastischen Potentials f in der Form (72), wie sie sich in § 15 für elektrostatische Felder ergeben hatte. Jener von den mechanischen Grundlagen aus berechnete Wert lautete

$$(79) \quad f_{st.} = \frac{6K \cdot A^2}{r^6}.$$

Bei der einen Art der Berechnung bekommt man also umgekehrte Proportionalität mit der *vierten*, bei der anderen mit der *sechsten* Potenz der Entfernung. Da drängt sich sogleich die Frage auf: Sind diese beiden Ausdrücke (79) und (80) miteinander vereinbar?

Unmittelbar kann man diese Frage nicht beantworten; denn verschiedene Form der Abhängigkeit bei einem *Differentialgesetze* gestattet nicht sogleich auf Verschiedenheit des

Integralgesetzes zu schließen. Indessen kann man versuchen, wirklich zum Integralgesetze überzugehen. Das Integralgesetz des elektrostatischen Feldes ist durch die Erfahrung längst festgestellt worden: es ist in der einfachsten Form das Coulombsche Gesetz. Der Maxwell-Lorentzsche Wert W_e ist mit diesem Gesetze vereinbar; dient er doch heutzutage sogar als Ausgangspunkt, wenn man, etwa für zwei sehr kleine geladene Kugeln¹⁾, das Coulombsche Gesetz aus der Theorie herleiten will. Die Frage muß also folgendermaßen formuliert werden: Liefert der aus der vorliegenden mechanischen Theorie erschlossene Wert $f_{st.}$, wenn man ihn etwa gleichfalls für zwei sehr kleine geladene Kugeln ausrechnet, beim Übergehen zum Integralgesetze gleichfalls das Coulombsche Gesetz, oder nicht?

Wie die Antwort lauten wird, kann man nicht voraussagen. Fällt sie verneinend aus, so ist die mechanische Theorie mit der Erfahrung nicht vereinbar.

§ 18. Zwei elektrostatisch geladene Kügelchen:
Die elastische Energie f .

Es sollen also zwei sehr kleine ruhende, elektrostatisch geladene Kügelchen im reinen Äther betrachtet werden. Dann ist das Verschiebungspotential

$$(81) \quad \Omega = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2},$$

wobei r_1 und r_2 die Entfernung des Aufpunktes P von den

Fig. 7.

Kugelmittelpunkten Q_1 und Q_2 bezeichnen. Durch die beiden Punkte Q_1 und Q_2 möge die z -Achse eines rechtsdrehenden Cartesischen Koordinatensystems gelegt werden, so, daß der Anfangspunkt mitten zwischen Q_1 und Q_2 liegt, von beiden um die Strecke m entfernt; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ bezeichne die Abmessung senkrecht zur z -Achse

(vgl. Fig. 7). Die gesuchte potentielle Energie des elektrostatischen Feldes, berechnet von den mechanischen Grundlagen

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, I. Teil, Leipzig 1891. p. 112 ff.

aus, möge statt $f_{\text{st.}}$ von jetzt ab einfach f genannt werden (immer pro Volumeneinheit). Zunächst ist also auszuwerten

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= K \cdot \left\{ \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \right.$$

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Ω in (81) das Verschiebungspotential darstellt.

Die Verschiebung q ist nach (81):

$$(82) \quad q = -\text{grad } \Omega = -\text{grad} \left(\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} \right).$$

Benutzt man die Beziehungen für r_1 und r_2 :

$$(83) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - m)^2 = r_1^2, \\ x^2 + y^2 + (z + m)^2 = r_2^2, \end{cases}$$

so werden die Komponenten von (82):

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{A_1}{r_1^3} \cdot x + \frac{A_2}{r_2^3} \cdot x, \\ q_y &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{A_1}{r_1^3} \cdot y + \frac{A_2}{r_2^3} \cdot y, \\ q_z &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial z} \\ &= \frac{A_1}{r_1^3} \cdot (z - m) + \frac{A_2}{r_2^3} \cdot (z + m). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte:

$$(84_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{A_1}{r_1^5} \cdot (r_1^2 - 3x^2) & + \frac{A_2}{r_2^5} \cdot (r_2^2 - 3x^2), \\ \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{A_1}{r_1^5} \cdot (r_1^2 - 3y^2) & + \frac{A_2}{r_2^5} \cdot (r_2^2 - 3y^2), \\ \frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{A_1}{r_1^5} \cdot (r_1^2 - 3(z - m)^2) & + \frac{A_2}{r_2^5} \cdot (r_2^2 - 3(z + m)^2) \end{cases}$$

und

$$(84_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_x}{\partial y} = \frac{\partial q_y}{\partial x} = -3 \frac{A_1}{r_1^5} \cdot y \cdot (z - m) - 3 \frac{A_2}{r_2^5} \cdot y \cdot (z + m), \\ \frac{\partial q_x}{\partial z} = \frac{\partial q_z}{\partial x} = -3 \frac{A_1}{r_1^5} \cdot (z - m) \cdot x - 3 \frac{A_2}{r_2^5} \cdot (z + m) \cdot x, \\ \frac{\partial q_y}{\partial x} = \frac{\partial q_x}{\partial y} = -3 \frac{A_1}{r_1^5} \cdot x \cdot y & - 3 \frac{A_2}{r_2^5} \cdot x \cdot y. \end{cases}$$

Indem man abermals die Beziehungen (83) berücksichtigt, erhält man aus (84) für die beiden verschiedenartigen Bestandteile von f :

$$(85_1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z} \right)^2 \\ &= \frac{A_1^2}{r_1^5} \cdot \{ 3 r_1^4 - 6 r_1^4 + 9 (x^4 + y^4 + (z-m)^4) \} \\ &+ \frac{A_2^2}{r_2^5} \cdot \{ 3 r_2^4 - 6 r_2^4 + 9 (x^4 + y^4 + (z+m)^4) \} \\ &+ \frac{2 A_1 \cdot A_2}{r_1^5 \cdot r_2^5} \cdot \{ 3 r_1^2 r_2^2 - 3 r_2^2 r_1^2 - 3 r_1^3 r_2^2 \\ &\quad + 9 (x^4 + y^4 + (z^2 - m^2)^2) \} \end{aligned} \right.$$

und

$$(85_2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial y} \right)^2 \\ &= 18 \frac{A_1^2}{r_1^5} \cdot \{ y^2 (z-m)^2 + (z-m)^2 x^2 + x^2 y^2 \} \\ &+ 18 \frac{A_2^2}{r_2^5} \cdot \{ y^2 (z+m)^2 + (z+m)^2 x^2 + x^2 y^2 \} \\ &+ \frac{36 A_1 \cdot A_2}{r_1^5 \cdot r_2^5} \cdot \{ y^2 (z^2 - m^2) + (z^2 - m^2) x^2 + x^2 y^2 \}. \end{aligned} \right.$$

Jetzt sind drei weitere Relationen heranzuziehen, die leicht aus (83) folgen:

$$(86_1) \quad x^4 + y^4 + (z-m)^4 + 2 \{ y^2 (z-m)^2 + (z-m)^2 x^2 + x^2 y^2 \} = r_1^4,$$

$$(86_2) \quad x^4 + y^4 + (z+m)^4 + 2 \{ y^2 (z+m)^2 + (z+m)^2 x^2 + x^2 y^2 \} = r_2^4,$$

sowie

$$(86_3) \quad \left\{ \begin{aligned} & r_1^2 \cdot r_2^2 = x^4 + y^4 + (z^2 - m^2)^2 \\ & \quad + 2 \{ y^2 (z^2 + m^2) + (z^2 + m^2) x^2 + x^2 y^2 \}, \\ & \text{oder} \\ & x^4 + y^4 + (z^2 - m^2)^2 + 2 \{ y^2 (z^2 - m^2) + (z^2 - m^2) x^2 + x^2 y^2 \} \\ & \quad = r_1^2 \cdot r_2^2 - 4 m^2 \cdot \varrho^2, \end{aligned} \right.$$

wobei $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist. Dann bleibt

$$(87) \quad f = f_1 + f_2 + f_3,$$

die einzelnen Teile sind

$$(87_1) \quad f_1 = \frac{6 K \cdot A_1^2}{r_1^5},$$

$$(87_2) \quad f_2 = \frac{6 K \cdot A_2^2}{r_2^5},$$

$$(87_3) \quad f_3 = \frac{12 K \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot (r_1^2 \cdot r_2^2 - 6 m^2 \cdot \varrho^2)}{r_1^5 \cdot r_2^5}.$$

§ 19. Prüfung des Coulombschen Gesetzes.

Soll nun festgestellt werden, ob dieser Wert (87) der potentiellen Energie f das Coulombsche Gesetz liefert, so muß man die gesamte Energie des Systems berechnen, also f über den ganzen unendlichen Raum integrieren, und dann die Entfernung $2m$ der Kugelmittelpunkte als variabel auffassen. Wie man unmittelbar sieht, werden f_1 und f_2 davon nicht berührt; sie entsprechen eben dem Anteil der Energie, der sich ergeben würde, wenn nur eins der beiden Elektronen vorhanden wäre, in Übereinstimmung mit dem in § 16 gefundenen Werte (79). Infolgedessen ist die Rechnung nur für den von der Entfernung $2m$ abhängigen Bestandteil

$$(88) \quad \int d\tau \cdot f_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_3$$

durchzuführen.

Wegen der Symmetrie um die z -Achse empfiehlt es sich, Zylinderkoordinaten zu benutzen, also

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\chi = \arctg \frac{y}{x},$$

so daß man zu berechnen hat

$$(89) \quad \int d\tau \cdot f_3 = \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} d\rho \cdot \rho \cdot f_3.$$

Die χ -Integration, von $\chi = 0$ bis $\chi = 2\pi$, kann man sogleich ausführen, sie liefert den Faktor 2π . Durch die Erwägung, daß man wegen der Symmetrie in bezug auf die Ebene $z = 0$ anstatt einmal von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ besser zweimal von $z = 0$ bis $z = +\infty$ integriert, bekommt man noch einmal den Faktor 2, im ganzen tritt also 4π heraus. Indem man alsdann für das Produkt $r_1 \cdot r_2$ den mit (86₃) identischen Wert

$$r_1 \cdot r_2 = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + m^2)^2 - 4m^2 z^2}$$

einsetzt und $\int d\tau \cdot f_3$ gemäß (87₃) in seine Teilintegrale J_1 und J_2 zerlegt, erhält man

$$(90) \quad \int d\tau \cdot f_3 = 4\pi \cdot 12 \cdot K \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \{J_1 + J_2\},$$

$$(90_1) \quad J_1 = \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{\sqrt{(\rho^2 + z^2 + m^2)^2 - 4m^2 z^2}},$$

$$(90_2) \quad J_2 = -6m^2 \cdot \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\rho \frac{\rho^3}{\sqrt{(\rho^2 + z^2 + m^2)^2 - 4m^2 z^2}}.$$

Für die weitere Auswertung liegt es nahe, die Substitution zu benutzen:

$$(91) \quad \rho^2 + z^2 + m^2 = v.$$

Sie ergibt für die Differentiale

$$2 \cdot \rho \cdot d\rho = dv$$

und für die Grenzen

$$\rho = 0 \quad v = z^2 + m^2,$$

$$\rho = \infty \quad v = \infty,$$

so daß zunächst das kompliziertere Integral J_2 übergeht in

$$J_2 = -3m^2 \int_0^\infty dz \cdot \left\{ \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{v \cdot dv}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}} - (z^2 + m^2) \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}} \right\}.$$

Das erste v -Integral kann man vollständig, das zweite teilweise integrieren; dabei tritt überall im Nenner die Zahl 3 auf, die sich gegen die vor dem ganzen Ausdruck stehende 3 wegheben läßt. Dann bleibt:

$$\begin{aligned} J_2 = & -m^2 \cdot \int_0^\infty dz \cdot \left\{ - \left[\frac{1}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty} \right. \\ & \left. + (z^2 + m^2) \cdot \left[\frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty} \right\} \\ & - m^2 \cdot \int_0^\infty dz \cdot (z^2 + m^2) \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{v^2 \cdot \sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}}. \end{aligned}$$

Für die obere Grenze $v = \infty$ oder $\rho = \infty$ wird jede der beiden eckigen Klammern für sich Null; für die untere Grenze $v = z^2 + m^2$ hebt sich bei der zweiten eckigen Klammer v im Nenner gegen $z^2 + m^2$ im Zähler, die beiden eckigen Klammern werden also entgegengesetzt gleich und fallen gegeneinander weg. Der Rest ist

$$(92) \quad J_2 = -m^2 \int_0^\infty dz \cdot (z^2 + m^2) \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{v^2 \cdot \sqrt{v^2 - 4m^2 z^2}}.$$

Schreibt man hierzu den Wert, den J_1 (Gleichung 90₁) durch die Substitution (91) annimmt,

$$(93) \quad J_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 4m^2 z^2}},$$

so erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich sein wird, die beiden Integranden von J_1 und J_2 in eine Beziehung zueinander zu bringen. Das geschieht durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4m^2 z^2}} \right) &= -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4m^2 z^2}} - \frac{1}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} + \frac{4m^2 z^2}{v^3 \cdot \sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} \end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

$$\begin{aligned} m^2 \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{v^2 \sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2z^2} \cdot \left[\frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^2} \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} \right\}. \end{aligned}$$

Führt man diesen Wert in (92) ein, so geht J_2 über in

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dz \cdot \left\{ \frac{z^2 + m^2}{2z^2} \cdot \left[\frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{m^2}{z^2} \right) \cdot \int_{z^2+m^2}^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^3 - 4m^2 z^2}^3} \right\} \end{aligned} \right.$$

Jetzt kann man in der Tat J_1 und J_2 in den Formen (93) und (94) zusammenfassen. Indem man zugleich das letzte v -Integral ausführt gemäß der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}} - \frac{v^2}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}^3} = - \frac{4m^2\kappa^2}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}^3}$$

oder, anders geschrieben:

$$m^2 \cdot \int_{z^2+m^2}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}^3} = - \frac{1}{4\kappa^2} \cdot \left[\frac{v}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty}$$

erhält man als Gesamtergebnis der v -Integration:

$$(95) \quad \left\{ J_1 + J_2 = - \frac{1}{4} \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{d\kappa}{\kappa^2} \cdot \left\{ (z^2 + m^2) \cdot \left[\frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty} - \frac{1}{2\kappa^2} \cdot \left[v \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4m^2\kappa^2}} \right]_{v=z^2+m^2}^{v=\infty} \right\} \right\}.$$

Für die obere Grenze $v = \infty$ wird die erste eckige Klammer Null, die zweite gleich $+1$; für die untere Grenze wird v als Divisor bzw. als Faktor einfach gleich $z^2 + m^2$, die Wurzel gleich dem absoluten Betrage von $z^2 - m^2$, d. h. für $z < m$ gleich $m^2 - z^2$, für $z > m$ gleich $z^2 - m^2$. Infolgedessen muß man bezüglich der z -Integration das ganze $J_1 + J_2$ in zwei Teile zerlegen

$$(96) \quad J_1 + J_2 = (J_1 + J_2)_I + (J_1 + J_2)_{II},$$

von denen der erste die Integration von 0 bis m , der zweite von m bis ∞ darstellt, und die einzeln lauten:

$$(J_1 + J_2)_I = - \frac{1}{4} \int_{z=0}^{z=m} \frac{d\kappa}{\kappa^2} \cdot \left\{ - \frac{1}{m^2 - \kappa^2} - \frac{1}{2\kappa^2} \cdot \left(1 - \frac{\kappa^2 + m^2}{m^2 - \kappa^2} \right) \right\},$$

$$(J_1 + J_2)_{II} = - \frac{1}{4} \int_{z=m}^{z=\infty} \frac{d\kappa}{\kappa^2} \cdot \left\{ - \frac{1}{\kappa^2 - m^2} - \frac{1}{2\kappa^2} \cdot \left(1 - \frac{\kappa^2 + m^2}{\kappa^2 - m^2} \right) \right\}.$$

Indem man in den inneren Klammern den Addenden 1 auf gleichen Nenner mit dem daneben stehenden Bruche bringt, bekommt man

$$(J_1 + J_2)_I = -\frac{1}{4} \int_{z=0}^{z=m} \frac{d\kappa}{\kappa^3} \cdot \left\{ -\frac{1}{m^2 - \kappa^2} + \frac{1}{m^2 + \kappa^2} \right\},$$

$$(J_1 + J_2)_{II} = -\frac{1}{4} \int_{z=m}^{z=\infty} \frac{d\kappa}{\kappa^3} \cdot \left\{ -\frac{1}{\kappa^2 - m^2} + \frac{m^2}{\kappa^2 \cdot (\kappa^2 - m^2)} \right\}$$

oder

$$(J_1 + J_2)_I = 0,$$

$$(J_1 + J_2)_{II} = -\frac{1}{4} \int_{z=m}^{z=\infty} \frac{d\kappa}{\kappa^4} \cdot \frac{-\kappa^2 + m^2}{\kappa^2 - m^2} = +\frac{1}{4} \int_{z=m}^{z=\infty} \frac{d\kappa}{\kappa^4}.$$

Mithin wird das ganze $(J_1 + J_2)$ nach Ausführung auch der z -Integration

$$(97) \quad J_1 + J_2 = \left[-\frac{1}{12 \kappa^3} \right]_{z=m}^{z=\infty} = +\frac{1}{12 m^3}$$

und das gesuchte Integral $\int d\tau \cdot f_3$, wenn man diesen Wert (97) in (90) einsetzt:

$$(98) \quad \int d\tau \cdot f_3 = \frac{4 \pi \cdot K \cdot A_1 \cdot A_2}{m^3}$$

oder auch, indem man den Abstand $2m$ der Kugelmittelpunkte hineinbringt:

$$(99) \quad \int d\tau \cdot f_3 = \frac{32 \pi \cdot K \cdot A_1 \cdot A_2}{(2m)^3}.$$

Jetzt ist die Entscheidung möglich. Läßt man in bekannter Weise die Entfernung $2m$ der beiden Kügelchen um $\delta(2m)$ abnehmen, so wächst $\int d\tau \cdot f_3$ um

$$(100) \quad \delta \int d\tau \cdot f_3 = \frac{96 \pi \cdot K \cdot A_1 \cdot A_2}{(2m)^4} \cdot \delta(2m).$$

Der mit $\delta(2m)$ multiplizierte Ausdruck muß die ponderomotorische Kraft darstellen. Die mechanische Theorie liefert also in der Tat eine ponderomotorische Kraft; aber diese ponderomotorische Kraft ist der vierten Potenz der Entfernung $2m$ umgekehrt proportional, und das stimmt mit dem durch die Erfahrung bestätigten Coulombschen Gesetze nicht überein.

Mithin entspricht auch diese mechanische Theorie wie alle ihre Vorgängerinnen nicht der Wirklichkeit, sie muß aufgegeben werden.

§ 20. Schluß.

Um die Tragweite dieses Ergebnisses zu erkennen, muß man auf die frühere Untersuchung zurückgreifen. Das frühere Ergebnis, das hier gebraucht wird, findet sich in der Mitte von § 2 und lautet:

Für jeden Versuch einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen ist die Annahme des Weltäthers unumgänglich.

Jetzt tritt das neue Ergebnis hinzu:

Die Hypothese, der reine Weltäther außerhalb der ponderablen Materie habe die Eigenschaften eines Kontinuums, ist undurchführbar.

Versucht man, beide Resultate positiv auszudrücken und zusammenzufassen, so gelangt man etwa zur folgenden Formulierung:

Der Dualismus Mechanik-Elektrodynamik, bis zu dem es die Physik heutzutage gebracht hat, läßt sich durch eine mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen, wenn überhaupt, nur unter der Bedingung in einen physikalischen Monismus verwandeln, daß man die Hypothese zuläßt: Der reine Weltäther außerhalb der ponderablen Materie ist im ganzen Weltall diskontinuierlich konstituiert.

Eine Tatsache muß man ausdrücklich hervorheben: Positives weiß man von solchen hypothetischen „Ätheratomen“ gar nichts. Nur eine einzige Beschränkung ist freilich selbstverständlich, wenn man sich einmal zu der neuen Hypothese entschließt: Sie können unter keinen Umständen die Atome der ponderablen Materie an Größe erreichen, müssen im Gegenteil viel kleiner angenommen werden als die kleinsten Teilchen der Materie, die mit elektrischen Ladungen behaftet auftreten. Irgend eine positive Tatsache aber, die als Stütze für die Hypothese der Existenz von „Ätheratomen“ dient oder dienen könnte, gibt es weder in der Elektrodynamik noch in irgend einem anderen Gebiete der Physik. Die neue Hypothese gründet sich einzig und allein auf die neue Erkenntnis, daß die auf den Weltäther angewiesene mechanische Erklärung der elektrischen Erschei-

nungen mit einem kontinuierlichen reinen Weltäther unmöglich ist.

Schon früher¹⁾ sind die großen Schwierigkeiten angedeutet worden, die sich erheben, sobald man den diskontinuierlichen reinen Weltäther einer ähnlichen mathematischen Behandlung zu unterwerfen versucht, wie sie bei dem als kontinuierlich angenommenen reinen Äther möglich gewesen und nunmehr bis zum Ende durchgeführt ist. Grundlegende Bedeutung für alle Versuche einer mechanischen Erklärung der Elektrodynamik durch einen in diskrete Teilchen zerfallenden Weltäther hat eine Erkenntnis, deren mathematische Darstellung sich zuerst in dem bekannten Werke von Hrn. Poincaré findet.²⁾ Hrn. Poincarés Untersuchung geht aus vom Hamiltonschen Prinzip; hier genügt es, ihr Resultat anzuführen, das man gewöhnlich folgendermaßen formuliert:

„Wenn eine Erscheinung eine vollständige mechanische Erklärung zuläßt, so wird sie auch noch eine unbeschränkte Anzahl anderer Erklärungen zulassen, welche ebensogut von allen durch das Experiment enthüllten Einzelheiten Rechenschaft ablegen.“

Die Vieldeutigkeit, die in diesem Satze zum Ausdruck gebracht wird, kann man sich auf sehr einfache Weise verständlich machen. Angenommen, in irgend einer der sechs Gattungen der Undulations- oder Äthertheorien sei eine exakt durchführbare Theorie mit diskontinuierlichem reinen Äther gefunden, der *möglichst einfache* Annahmen über die physikalische Beschaffenheit usw. der diskreten Teilchen zugrunde liegen. Dann sagt der Poincarésche Satz, daß man aus dieser einen beliebig viele andere ebenfalls die Wirklichkeit exakt wiedergebende mechanische Theorien ableiten kann, indem man den Mechanismus durch einen *komplizierteren* ersetzt, und die unendlich große Anzahl von Möglichkeiten kommt dadurch zustande, daß nach der Seite der größeren Komplikationen hin keine Grenze angegeben werden kann. Mithin ist jene Viel-

1) H. Witte, l. c. p. 216 ff.

2) H. Poincaré, Elektrizität und Optik, Deutsche Übersetzung von W. Jaeger und E. Gumlich, 1. p. 3 ff. Berlin 1891.

deutigkeit tatsächlich auf einfache Weise in der Sache selbst begründet.

Sie erklärt nun auch die Schwierigkeiten, denen man begegnet, wenn man eine systematische Behandlung versucht. Sobald man diskrete Teilchen einführt, werden die allgemeinen Schlußweisen hinfällig, die beim kontinuierlichen reinen Äther überall als Ausgangspunkt benutzt werden konnten; es erweist sich als unmöglich, die Fülle der von vornherein in jeder der sechs Gattungen (4) bis (9) denkbaren mechanischen Theorien mit diskontinuierlichem reinem Äther auf endliche Kreise zu beschränken, so daß man das weitere Problem, durch allmähliches Aussondern von Gruppen und Gattungen, die der Wirklichkeit nicht entsprechen, und immer engeres Zusammenziehen der übrig bleibenden Kreise den wirklichen Bau des diskontinuierlichen reinen Äthers zu finden, ganz dahingestellt sein lassen muß.

Infolgedessen bleibt, wenn man das Problem des diskontinuierlichen reinen Weltäthers angreifen will, nichts weiter übrig, als daß man *probierend* vorgeht. Immerhin wird man dabei einen gewissen, wenn auch der Natur der Sache nach eben nicht systematisch-erschöpfenden Plan zugrunde zu legen vermögen. Man könnte daran denken, zunächst in jeder der sechs Gattungen (4) bis (9) eine gewisse endliche Anzahl von Haupttypen denkbarer Theorien aufzustellen, die sich durch möglichste Einfachheit in den Grundannahmen auszeichnen. Etwa so:

Gruppe (1): Die diskreten Teilchen sind starre Kugeln, die Kräfte zwischen den Kugeln sind Fernkräfte und hängen nur von den Entfernungen der Kugelmittelpunkte voneinander ab;

Gruppe (2): Die diskreten Teilchen sind deformierbare Kugeln, für die Kräfte dieselbe Annahme wie unter (1);

Gruppe (3): Die diskreten Teilchen sind Würfel, Kräfte wie oben usw. usw.

Zuletzt würde nach einer endlichen Anzahl n von Gruppen stets eine Gruppe $(n+1)$ bleiben, die den Rest von denkbaren, ähnlich zu bildenden, einfachen Theorien umfaßt, weil man eben nicht nach einem deduzierten System einteilen kann,

sondern aufs Geratewohl unter den unendlich vielen Möglichkeiten gewisse herausgreifen muß.

Bei der Untersuchung würde man nun an den Poincaréschen Satz zu denken haben. Geht es in irgend einer der $(n + 1)$ Gruppen mit den zugrunde gelegten einfachen Voraussetzungen nicht, dann wird man bei einem Teil der Grundhypothesen kompliziertere Voraussetzungen einführen (im obigen Beispiel etwa für die Kräfte zwischen den Teilchen: zunächst die Kräfte noch Fernkräfte, nur komplizierter, sodann ein Zwischenmedium, zwei, drei usw.). So würde immer die Hoffnung bleiben, daß, wenn bei irgend einem gewissen Grade y an Komplikation das Ziel noch nicht erreicht ist, man doch durch Erhöhung der Kompliziertheit schließlich einmal an die Grenze gelange, bei der die Bewegungsgleichungen usw. des Äthers *genau* „von allen durch das Experiment enthüllten Einzelheiten Rechenschaft ablegen“. Ist man aber so weit gekommen, dann würde ja stets jenseits dieser Grenze eine unendliche Menge noch komplizierterer Möglichkeiten bleiben, im Vergleich zu denen die endlich gefundene Theorie dann schließlich jederzeit noch als relativ einfach betrachtet werden müßte.

Indessen kann man nun zunächst nicht im geringsten voraussehen, *wieviel* weitere Grade von Kompliziertheit man zu dem vorhin angenommenen Grade y würde hinzufügen müssen, d. h. wo eben diese Grenze liegt, bei deren Überschreiten die Theorien anfangen, die Wirklichkeit exakt wiederzugeben. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sie sich in allen Gattungen und Gruppen im Unendlichen befindet. Mit anderen Worten: Es könnte sich auch trotz der unendlichen Anzahl von Möglichkeiten herausstellen, daß jegliche die wirklichen Erscheinungen an der ponderablen Materie *genau* liefernde Vorstellung über Zahl, Form usw. der Ätherpartikelchen, über den verbindenden Mechanismus usw. jenseits aller endlichen Grenzen liegt, daß also auch mit einem noch so komplizierten diskontinuierlichen reinen Weltäther die mechanische Erklärung bei jedem nur irgendwie denkbaren endlichen Grade von Kompliziertheit exakt unmöglich ist.

Doch sei jetzt von diesem äußersten Extrem abgesehen, das nur einmal angedeutet werden mußte, weil es eben doch

auch nicht geradezu als undenkbar bezeichnet werden darf. Es werde also angenommen, daß die Grenze im Endlichen liegt.

Auch dann bietet das Bewußtsein, man werde, von irgendwelchen verhältnismäßig einfachen, aber ungenügenden Annahmen ausgehend, durch wachsende Komplikation schließlich einmal zu dem wahren Weltäther gelangen, doch nur einen schwachen Trost, sobald die Grenze einigermaßen weit hinausliegt. Wie, wenn man zur Erklärung des einfachen konstanten Feldes einer elektrostatisch geladenen Kugel, das die Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik durch eine einzige Funktion $\varphi = D/r$ beschreibt, würde annehmen müssen, in jedem Ätherwürfelchen, dessen Kantenlänge einen gewissen Bruchteil eines Millimikrons beträgt, sitze ein mechanischer Motor von der Kompliziertheit einer Taschenuhr oder einer Wassermühle?

Aber man kann ja nicht voraussehen, ob die Sache so kompliziert werden müßte. Vielleicht ist die untere Grenze der Kompliziertheit doch einfacher. Soviel indessen bleibt unter allen Umständen bestehen: ganz einfach, nämlich so einfach wie bei einem Kontinuum, kann der Mechanismus nicht sein. Es handelt sich eben um *diskontinuierlichen* reinen Äther, und da gibt es dann notwendigerweise überall:

1. diskrete Teilchen, und
2. zwischen den Teilchen entweder ein bestimmtes Spiel von anziehenden bzw. abstoßenden Kräften oder mindestens ein Zwischenmedium von mehr oder weniger einfachem Bau.

(In der Tat arbeiten die wenigen bis jetzt in Angriff genommenen diskontinuierlichen Äthertheorien allesamt mit nichts weniger als einfachen Zwischenmedien in Gestalt von Zahnstangen, Zahnrädern oder elastischen Bändern und dergleichen mehr, oder auch mit Kreiseln innerhalb der diskreten Teilchen, womöglich je drei aufeinander senkrecht stehenden usw.)

So werde nun nur dasjenige Mindestmaß an Komplikation als erforderlich für die mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen angenommen, welches durch die diskontinuierliche Struktur ohne weiteres gegenüber einem kontinuierlichen Medium bedingt wird.

Selbst dann erheben sich für den Physiker noch gewichtige Bedenken.

Bei der *ponderablen Materie* haben sich die Physiker daran gewöhnt, an einen diskontinuierlichen Aufbau zu glauben: Zerfall in Moleküle, Atome, Elektronen. Dort lag und liegt die Sache aber auch wesentlich anders. Eine große Anzahl verschiedenartiger physikalischer Erscheinungen hatte immer wieder auf dieselben Schlüsse geleitet, die Übereinstimmung erwies sich nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ als gut; immer neue Erscheinungen wurden gefunden, die sich nur durch die Annahme jenes diskontinuierlichen Aufbaues qualitativ begreifen ließen, und auch hier war immer wieder auch quantitative Übereinstimmung vorhanden. So kann man heutzutage bei der ponderablen Materie ohne jene Annahme eines diskontinuierlichen Aufbaues nicht auskommen, sie hat sich vielmehr als die bei weitem einfachste, ökonomischste Darstellungsweise der Erscheinungen erwiesen, indem sie eine gewaltige Fülle von Erscheinungen, die sonst durch lauter neue wesensverschiedene „Kräfte“ oder „Eigenschaften“ erklärt werden müßten, einheitlich darzustellen gestattet. Bei der ponderablen Materie haben sich also, der Not gehorchend, die Physiker allmählich mit Gedanken vertraut gemacht wie dem, daß in einem Fingerhut voll Stoff sehr viele Millionen mal so viel selbständige „Atome“ vorhanden sein müssen, wie das schärfste irdische Fernrohr Sterne im Weltenraume zählt; den *Weltäther* hingegen pflegten sie sich wohl allgemein als ein durchaus allenthalben gleichförmiges, im Gleichgewichtszustande ruhendes und überall streng kontinuierliches Medium vorzustellen, in welchem dann jene ponderable Materie als einzige Störung vorhanden sein sollte. Jetzt aber müßte man annehmen, daß nicht nur die schließlich geringen Mengen von Materie, die in den unendlichen Weltäther hier und da eingesprengt sind, eine diskontinuierliche Struktur haben; sondern der Weltäther selbst, der doch einen unendlich viel größeren Raum erfüllt, nämlich das ganze übrige Weltall, müßte überall und an jeder Stelle diskontinuierlich konstituiert sein. (Wozu dann noch weiter nach Analogie mit der ponderablen Materie neben verschiedenen anderen die interessante Frage kommt, ob man nicht vielleicht auch beim Äther in

dem sogenannten Gleichgewichts- oder Ruhezustand in Wahrheit einen verborgenen Bewegungszustand zu sehen hätte; ob also außer dem Zerfallen in diskrete Teilchen vielleicht auch gar noch die unaufhörliche, den Ruhezustand nur vortäuschende, verborgene *Bewegung* der Urbestandteile, welche die moderne Physik den Atomen der ponderablen Materie ja in ausgiebiger Weise zuschreibt, dem ganzen Weltall zugeschrieben werden müßte, jeder Zeit und in jedem Punkte des Raumes bis hin zu den fernsten Nebelflecken!)

Es ist das Postulat der möglichst großen *Ökonomie* in den naturwissenschaftlichen Begriffen, das hier den Ausschlag gibt. Jede Auflösung in diskontinuierliche Teilchen, jede Annahme von Unstetigkeiten, wo bisher durch stetige Größen (hier elektrische Feldstärke $\mathcal{E}$ und magnetische Feldstärke $\mathcal{H}$ im reinen Äther¹⁾, bei der Wärmelehre z. B. Temperatur t usw.) beschrieben wurde, führt zunächst von einer ökonomischen Darstellung ganz erheblich ab. Lassen sich nun — wie bei der ponderablen Materie — viele früher für wesensverschieden gehaltene Erscheinungen dadurch zusammenfassen, so kann allerdings infolge dieser qualitativen Vereinfachungen die quantitative Komplizierung wieder so weit kompensiert werden, daß sogar schließlich die Einführung der diskreten Teilchen das Ökonomischere ist. Beim Äther ist das aber ganz anders. Hier handelt es sich nur um *eine*, wenn auch für sich unendlich mannigfaltige, jedoch physikalisch *einheitliche* Gruppe von Erscheinungen, die durch stetige Größen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ bzw. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{h}$ bisher erschöpfend dargestellt wurde. Der einzige Grund, der die Hypothese eines diskontinuierlichen reinen Weltäthers stützt, ist der, daß man mit einem kontinuierlichen reinen Äther die elektrischen Erscheinungen nicht mechanisch erklären kann. Anderweitige Gründe für die Hypothese von Unstetigkeiten im reinen Weltäther sind weder in der Elektrodynamik noch sonst in irgend einem anderen Gebiete der Physik vorhanden, geschweige denn auch nur die geringsten Anhaltspunkte für bestimmte Annahmen über Zahl, Form usw. der hypothetischen Ätheratome. Es steht also weder in der

1) bzw. elektrische Erregung $\mathfrak{b}$ und magnetische Erregung $\mathfrak{h}$ (H. A. Lorentz).

Elektrodynamik noch auch in den anderen Gebieten der Physik ein Vorteil von der Einführung des diskontinuierlichen reinen Weltäthers zu erwarten, sondern allenthalben nichts als unabsehbar vermehrte Komplikationen. Infolgedessen verlangt das Prinzip der Ökonomie zurzeit — mag auch die einfachste mögliche diskontinuierliche Struktur des Weltäthers relativ noch so wenig kompliziert sein — daß man auf die Einführung des diskontinuierlichen reinen Weltäthers verzichtet.

Gibt man aber den diskontinuierlichen reinen Weltäther auf, so verzichtet man, wie bewiesen ist, auf den Weltäther überhaupt. Und den Weltäther überhaupt aufgeben, heißt auf die mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen verzichten.

Das ist also die Folgerung, zu der diese Arbeit am Ende führt: Man muß auf die mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen verzichten. Offenbar ein negatives Resultat. Es fragt sich: Hat dieses negative Ergebnis eine positive Bedeutung für die Zukunft der Physik?

Daß mit dem Verzicht auf die mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen nicht auch zugleich der Gedanke an eine schließliche Überführung des physikalischen Dualismus Mechanik-Elektrodynamik in einen physikalischen Monismus aufgegeben wird, ist bekannt.

Bei jedem Dualismus (a , b) ergibt die Kombinationsrechnung drei Wege, auf denen sich die Monismusversuche vorwärts zu bewegen vermögen. Man kann 1.) versuchen, b durch a , sodann 2.) a durch b und 3.) beide durch ein drittes, z , zu erklären. Hier sind die drei Wege also:

1. Mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen, kurz zu bezeichnen als „physikalischer Materialismus“;
2. Elektromagnetische Begründung der Mechanik, Elektrisierung der Physik oder „physikalischer Elektrizismus“;
3. Versuch, sowohl Mechanik als auch Elektrodynamik beide auf ein drittes „Urprinzip“ zurückzuführen.

Auf allen drei Wegen hat die jüngste Geschichte der Physik Vorstöße zu verzeichnen.

Was die Frage nach der Möglichkeit des physikalischen Materialismus anlangt, so ist diese durch das negative Resultat der vorliegenden Arbeit zu einem gewissen Abschluß gebracht worden.

Inzwischen haben die Vorkämpfer der modernen Physik einen solchen Abschluß nicht erst abgewartet, sondern wegen des fortwährenden Fehlschlagens mechanischer Erklärungsversuche die Maxwell'sche Elektrodynamik weiter ausgebaut ohne Rücksicht auf die Möglichkeit einer mechanischen Deutung, lediglich von dem Bestreben geleitet, neu entdeckten Erscheinungen gerecht zu werden. In der Tat erwiesen sich die neuen, von der Möglichkeit einer mechanischen Interpretation sich immer weiter entfernenden Vorstellungen als besser geeignet zur Darstellung der bekannten und zur Entdeckung von neuen Erscheinungen. So mußte die Physik, wenn sie ihr Streben nach einem Monismus nicht aufgeben wollte, allmählich auf den Weg des physikalischen Elektrizismus gelangen, der zuerst von Hrn. W. Wien besritten wurde.¹⁾ Auf diesem Wege ist in der Tat bereits eine merkliche Annäherung an das Ziel, den physikalischen Monismus, erfolgt.

Auf dem dritten Wege liegt bisher nur ein einziger wissenschaftlich begründeter Versuch vor, die Energetik. Indessen darf bei allem theoretischen Interesse, das dieses Unternehmen weckt, doch als zugestanden angesehen werden, daß für absehbare Zeit die Energetik an praktischer Bedeutung gegenüber dem, was auf den beiden anderen Wegen vorliegt, nicht in Betracht kommt. Überdies bleibt der Energetik unbenommen, das Resultat der vorliegenden Arbeit in ihrem Sinne zu verwerthen.

Die beiden ersten Wege: Physikalischer Materialismus, physikalischer Elektrizismus, sind es also, die für den Versuch eines physikalischen Monismus heutzutage miteinander in Wettbewerb stehen.

Soll man nun die *positive Förderung* in Worte fassen, die die Monismusversuche durch diese Arbeit erfahren, so kann man sie dahin formulieren: Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit schließt eine neue Ermutigung für die Versuche in

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 5. p. 501 ff. 1901.

sich, die Mechanik elektrodynamisch zu begründen, also auf dem Wege des physikalischen Elektrizismus den physikalischen Monismus zu gewinnen.

Ein Fortschreiten auf dem neuen Wege leistet die Untersuchung freilich nicht. Indessen liegt in dem Beweise, daß der andere Weg ungangbar wird, ebenfalls eine Bestätigung dafür, daß man sich jetzt auf dem richtigeren Wege befindet, und ein neuer Grund für die Hoffnung, er werde zum Ziele führen.

Dies ist das positive Ergebnis der vorliegenden Arbeit.

Der Abschluß wäre unvollständig, wenn nicht noch auf einen *Einwand* eingegangen würde, der des öfteren, bei den verschiedensten Anlässen, erhoben worden ist und gegen den es diese Formulierung des Ergebnisses von vornherein zu sichern gilt.

In zwei Formen ist der Einwand aufgetreten, erstens negierend, allgemein gehalten, und zweitens in Gestalt einer bestimmten positiven Behauptung.

Der allgemeinere, *negative* Einwand lautet: Damit man zu einem wirklichen Monismus gelangt, genügt die Zurückführung auf irgend eine Naturkraft in keiner Weise. Die Hauptsache ist übersehen. Es ist ja unbedingt erforderlich, daß man das „Wesen“ dieser letzten Naturkraft kennt, die den Kern der Natur bilden soll. Und das ist eben bei der Elektrizität nicht der Fall, ihr Wesen ist ein uns völlig unbekanntes *x*. Und daraus folgt ganz offenbar, daß man sich bei dem physikalischen Elektrizismus unmöglich auf dem richtigen Wege befindet.

Was es mit diesem vielberufenen, angeblich unbekannten „Wesen“ der Elektrizität auf sich hat, zeigt sich, wenn man sich gegenwärtig hält, was die Physik bei den *anderen* „Naturkräften“ unter dem „Wesen“ verstanden hat.

Bei dem physikalischen Pluralismus, wie er zuerst vorhanden war, hatte man, während Raum und Zeit immer unabhängige Variabele waren und sind, eine sehr große Anzahl von abhängigen Variablen, durch welche die beobachteten Erscheinungen dargestellt wurden. Die abhängigen Variablen sind ungerichtete oder gerichtete Größen, die sinnlich Wahr-

genommenes zahlenmäßig zu messen und sinnlich Wahrnehmbares zahlenmäßig vorherzusagen gestatten. Gemäß den einzelnen Gebieten, welche die pluralistische Physik unterschied, bildeten sie eine endliche Anzahl von Gruppen. So hatte man eine Gruppe $a_1, a_2, \dots a_n$, etwa die Variablen der Elastizitätstheorie; sodann eine zweite $b_1, b_2, \dots b_m$, etwa die Variablen des Galvanismus; eine dritte $c_1, c_2, \dots c_r$, etwa die Akustik usw. Die Antwort auf die Frage nach dem „Wesen“ einer Erscheinungsgruppe erhielt man dann jedesmal durch eine der in der Folgezeit eintretenden Herabminderungen des Pluralismus. Beispielsweise: Der Pluralismus wird um einen Grad erniedrigt, indem c auf a zurückgeführt wird; in Worten: das Wesen des Schalles ist die Elastizität. So geht das weiter. Aber naturgemäß nicht ohne eine Grenze. Sie wird erreicht, wenn der letzte Schritt, vom Dualismus zum Monismus, geschieht. Da das „Wesen“ einer Naturkraft in der Zurückführung auf eine andere besteht, muß zuletzt eine bleiben, die kein Wesen mehr hat.

Soviel über jene allgemeinere, rein negierende Behauptung, der physikalische Elektrizismus sei unmöglich der richtige Weg, weil man das „Wesen“ der zuletzt bleibenden Naturkraft nicht kenne.

Damit sollte die Sache eigentlich erledigt sein. Indessen haben bis zum heutigen Tage die Stimmen noch nicht zum Schweigen kommen wollen, die über jene negative Behauptung noch hinausgehen. Es wird *positiv* behauptet: Es gibt ja aber ganz offenbar ein Gebiet der Physik, dessen Wesen wir kennen. Das ist die Mechanik. Dort wird alles auf den Stoff zurückgeführt, dieser ist der „Träger“ der beobachteten Erscheinungen; da wissen wir also ganz genau, was der „Kern“ der Erscheinungen ist . . . Und damit ist ja alles weitere selbstverständlich: Unbedingt überall mechanische Erklärung! und wenn in jedem Kubikmillimikron Weltäther Quintillionen von Ätheratomen sitzen müßten und jedes einzelne Atom komplizierter sein als eine Eisenbahnlokomotive — unter allen Umständen mechanisch erklären, denn da stehen wir a priori auf festem Boden, da kennen wir den Kern der Erscheinungen, das Innere der Natur!

So gelangt man, wie man sieht, gerade auf den anderen

von den beiden Wegen, die miteinander in Wettbewerb stehen: auf den Weg des physikalischen Materialismus, den diese Arbeit, auf aposteriorischer Einsicht fußend, als ungangbar nachgewiesen zu haben überzeugt war.

Was nun diesen positiven, aprioristisch begründeten Einwand anbetrifft, so wird an diesem Orte der Hinweis auf die bekannten kritischen Untersuchungen genügen, die insbesondere von Mach angestellt worden sind.¹⁾

Es ist eine Täuschung, wenn man meint, die Mechanik sei uns irgendwie vertrauter. Alles, was der Physiker beobachtet, mißt, vorausberechnet, sind nur Maße für sinnlich wahrgenommenes, wie übrigens schon oben beim physikalischen Pluralismus angemerkt wurde. Der sogenannte Stoff, der „Träger“ der Eigenschaften findet sich in Wahrheit unter diesen Maßgrößen nirgends. In der ganzen Mechanik kommt man nirgendwo mit der Erfahrung in Widerspruch, wenn man rundweg behauptet: der sogenannte „Träger“ der Erscheinungen existiert überhaupt nicht, er ist lediglich eine Fiktion. Was existiert, sind abgesehen von den wahrnehmenden Subjekten nur die Eindrücke selbst, die von jenen Subjekten wahrgenommen werden. Die wahrnehmenden Subjekte sind imstande, die erfahrenen Eindrücke zu messen und spätere Eindrücke vorauszuberechnen; das ist alles. Was darüber hinaus von angeblicher Vertrautheit mit dem „Träger“ der Eigenschaften behauptet, und alles, was aus solchen Behauptungen gefolgert wird, ist aprioristische Spekulation und für den Physiker wertlos.

Nur die Feststellung dieser Tatsache ist es übrigens, um die es sich hier handelt. Daß von der psychologischen Seite betrachtet die weite Verbreitung jener unrichtigen Fiktionen verständlich ist, kann ja nicht bestritten werden.²⁾ Teils alt-hergebrachte Anschauungen, teils Infektionen von der Naturphilosophie her, im weitesten Sinne des Wortes genommen,

1) E. Mach, Populär-wissenschaftliche Vorlesungen, Leipzig 1897. p. 200ff.; Erkenntnis und Irrtum, Leipzig 1905. p. 10ff.; ferner: Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig, Brockhaus usw.

2) Vgl. u. a. die kritischen Ausführungen von E. Lecher, Mechanische oder elektrische Naturauffassung (Gemeinverständlicher Vortrag), Himmel und Erde 22. p. 145ff. 1907.

sind es, die derartigen aprioristischen Urteilen über eine angebliche Sonderstellung der Mechanik und damit auch des physikalischen Materialismus Vorschub geleistet haben. Dies ist ein Kapitel, über das sich noch vieles hinzufügen ließe, indessen fehlt für eine ausführliche Darstellung solcher Dinge hier der Raum.

Für die physikalische Seite des Einwandes kommt nur in Betracht die Erkenntnis, daß jene mit der Miene der aprioristischen Gewißheit vorgetragenen Meinungsäußerungen hinfällig sind.

Man hat also wirklich, wenn sich der physikalische Elektrizismus durchführen läßt, einen physikalischen Monismus, der durchaus auf festen Füßen steht. Man wird dann eben nicht mehr fragen: Was „ist“ denn nun eigentlich die elektrische Feldstärke b in einem von ponderabler Materie und von Elektronen freien Raume? usw.; sondern man wird sich solche und ähnliche Fragen abgewöhnen in der klaren Erkenntnis, daß die Antwort: „sie ist eine gewisse Eigenschaft eines Stoffes“ für sich allein gar keine neue Einsicht zu bringen vermag.

Als oberste Instanz in der Physik fungiert schließlich ja doch niemals ein aprioristisch arbeitender Gerichtshof, sondern nach wie vor die Erfahrung und mit ihr das Prinzip der Ökonomie, das am Schlusse der vorliegenden Arbeit wegen der Unmöglichkeit eines kontinuierlichen Weltäthers zum Verzicht auf den physikalischen Materialismus geführt hat. —

Eine ganz andere Frage ist freilich die, ob nicht, nachdem man den physikalischen Elektrizismus durchgeführt haben wird, *a posteriori*, d. h. durch spätere *Erfahrung*, die Physik einmal gezwungen werden könnte, Unstetigkeiten in dem von ponderabler Materie und von Elektronen freien Raume anzunehmen. Das wäre nur möglich, wenn man ganz ungeahnte, neue Erscheinungen entdeckte, die sich in dem von ponderabler Materie und von Elektronen freien Raume nicht wie bisher durch stetige Größen b , h , usw. darstellen lassen, sondern die Annahme von verborgenen Diskontinuitäten erfordern. Sollte das jemals eintreten, dann könnte sich allerdings sehr wohl zugleich auch die Frage erheben, ob zur Darstellung dieser Diskontinuitäten die elektrodynamischen Begriffe noch aus-

reichen. Indessen kann man die Frage, ob eine solche aposteriorisch begründete Erweiterung einmal nötig werden wird, gestrost der Zukunft überlassen. Auf den Wettbewerb zwischen physikalischem Materialismus und physikalischem Elektrizismus, von dem hier die Rede gewesen ist, hat sie keinen Einfluß.

So bleibt — unbeschadet dieser Möglichkeit einer späteren Erweiterung, insbesondere aber auch unberührt von jeglichen Einsprüchen von seiten aprioristischer Verteidiger des physikalischen Materialismus — als positives Ergebnis der vorliegenden Arbeit das oben formulierte bestehen: eine neue Ermutigung für die Versuche, die Mechanik und mit ihr die ganze Physik auf die Elektrodynamik zu begründen.

Wolfenbüttel, 31. März 1908.

(Eingegangen 3. April 1908.)