II. *Darstellung aller Polarisationsbewegungen und einer zweiten verwandten Wellenbewegung durch Zusammensetzung zweier Schraubenbewegungen, nebst Nachricht von einem Apparat dazu;
von C. L. Gerling in Marburg.*

Ausgehend von der Bemerkung, daß alle Bewegungen, welche bei der Polarisation des Lichts zur Betrachtung kommen, sich auf die Zusammensetzung der Bewegungen zweier Schrauben zurückführen lassen, unternahm ich im Frühjahr 1855 einen neuen Wellen-Apparat zu construiren, welcher bei Vorlesungs-Versuchen vor dem sonst so sinnreichen Fessel'schen Apparat ¹⁾ die Vorzüge einer beliebig continuirlichen Bewegung und größeren Dauerhaftigkeit voraus haben sollte. Diese Construction führte mir nun auch Hr. Mechanicus Schubart während des folgenden Jahres vorerst an einem Modell mit zwei Schrauben so weit aus, daß eine Ueberzeugung von der Zweckmäßigkeit im Allgemeinen gewonnen wurde. Ich konnte das fertige Modell am 11. Juli 1856 in unserer naturforschenden Gesellschaft vorzeigen und machte von meiner Beschäftigung mit dem Gegenstand und dem bisherigen Erfolg am 20. Sept. 1856 in der mathematischen Section der Naturforscher-Versammlung zu Wien eine Mittheilung.

Mit Hülfe dieses Modells habe ich seitdem den Gegenstand weiter verfolgt, und bin jetzt seit Kurzem im Besitz eines Apparats, der schon in dieser ersten Ausführung seinen Zweck vollständig erfüllt.

Aber nicht bloß zu einer Maschine für Darstellung der Polarisationsbewegungen führten diese Arbeiten, sondern auch, schon bei der Anfertigung des Modells, zur Auffindung einer, meines Wissens bisjetzt noch nicht untersuchten Wellenbewegung, welche gleichsam ein *Gegenstück zur Polarisationsbewegung* macht.

1) Diese Ann. Bd. 78, S. 421.

Steht nämlich theoretisch und practisch fest, daß eine und jede Polarisationsbewegung aus Zusammensetzung der Bewegungen zweier congruenten oder zweier symmetrischen, gleichförmig um ihre Axe gedrehten Schrauben entstehen kann, und kehrt man alsdann die Frage um, so daß sie lautet: Welche Bewegung entsteht aus der Zusammensetzung der Bewegungen zweier solchen Schrauben; so erhält man zur Antwort: *Entweder* Polarisationsbewegung *oder* jene, meines Wissens neue, zweite Wellenbewegung.

Es scheint sich demnach an diese Untersuchungen auch ein wissenschaftliches Interesse knüpfen zu können, und deshalb glaube ich sie jetzt veröffentlichen zu müssen.

§. 1.

Zählt man auf einer horizontalen Abscissenlinie in einer verticalen Ebene die Abscissen von einem in unbestimmter Ferne liegenden Anfangspunkt aus, von links zu rechts positiv, die Ordinaten positiv nach aufwärts, bezeichnet sodann die Coordinaten zweier Punkte 1 und 2 der Ebene mit x_1 , y_1 , und x_2 , y_2 , und unterstützt nun durch diese Punkte die Katheten eines rechtwinklichen und gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse horizontal ist; so bestimmen sich, weil die Katheten unter 45° gegen die Abscissenlinie geneigt sind, die Coordinaten x , y des Scheitelpunktes des rechten Winkels aus den Gleichungen

$x - x_1 = y_1 - y$ und $x - x = y_2 - y$
und man hat also

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 - y_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2} \end{aligned} \right\} (1)$$

Der Scheitelpunkt bleibt also unverändert, und jeder andere Punkt in der Ebene des Dreiecks gleichfalls, so lange die ursprünglich angenommenen Coordinaten der Unterstützungspunkte unverändert bleiben. Macht man aber letzterwähnte Coordinaten veränderlich, so müssen auch alle Punkte der Dreiecksebene gleichmäfsig an der Bewegung

theilnehmen, welche der Scheitelpunkt dadurch erhält, so daß nur die Bewegung dieses letzteren Punktes zu betrachten bleibt.

§. 2.

Eine dem gegenwärtigen Zweck entsprechende Veränderlichkeit der Unterstützungspunkte erhält man nun dadurch, daß man die beiden Katheten auf zwei *gleichen* Kreisen (deren Halbmesser R heißen mag) berührend aufliegen, und die beiden Kreise mit *gleicher* Winkelgeschwindigkeit um Punkte ihrer Ebene rotiren läßt, welche in einer *gleichen* Entfernung (sie heiße e) von ihren Mittelpunkten liegen.

Legt man dann die Rotations-Mittelpunkte, um welche die Mittelpunkte der unterstützenden Kreise selbst in Kreisen vom Halbmesser e umlaufen, in die Abscissenlinie, beiderseits links und rechts vom Anfangspunkt der Coordinaten in eine Entfernung a von demselben; so ist klar, daß die Berührungspunkte der excentrischen Kreise mit den Katheten des Dreiecks, dessen Hypotenuse immer horizontal bleiben soll, selbst wieder Kreise vom Halbmesser e beschreiben müssen, deren Mittelpunkte die beiden gleichen Ordinaten $R \sin 45^\circ = b$ haben, während die Abscissen derselben $-a + b$ und $+a - b$ sind.

Um sodann über die Rotation selbst eine bestimmte Anschauung herzustellen, nenne man denjenigen Halbmesser eines excentrischen Kreises, dessen Rückwärtsverlängerung den Mittelpunkt der Rotationsbewegung enthält, *Hauptradius* und bestimme den Winkel (er heiße w) welchen dieser Hauptradius während der Rotation mit der positiven Ordinaten-Axe macht, zum Maafs der jedesmaligen Stellung dieses Kreises.

Nun bleibt zuvörderst festzusetzen, in welchem Sinn man diesen Winkel positiv nehmen will. Man nenne deshalb die Bewegung des Kreises *rechtläufig* wenn, vom Anfang der Bewegung, wo der Hauptradius also noch mit der positiven Ordinaten-Axe parallel ist, angefangen, bei dem Wachsen des w die Abscisse seines Endpunktes gleichfalls

wächst, die Ordinate desselben aber abnimmt, so daß also bei rechtläufiger Bewegung der Hauptradius in seiner Ebene umläuft wie der Zeiger einer Uhr über dem Zifferblatt.

Weil hier aber *zwei* solche excentrische Kreise in Betrachtung kommen, so ist zunächst deren ursprüngliche Stellung gegen einander auszudrücken. Dazu bezeichne man dasjenige positive, von 0 bis 360° fortgezählte, w , welches bei dem rechtsliegenden Kreise stattfindet, wenn der Hauptradius des linksliegenden Kreises mit der Ordinaten-Axe parallel ist, mit W .

Zuletzt bleiben noch die beiden Fälle zu unterscheiden, wo beide Kreise in demselben Sinn, und wo sie im entgegengesetzten Sinn mit gleicher Winkelgeschwindigkeit umlaufen. Hierbei ist es erlaubt vorauszusetzen, daß der rechtsliegende Kreis auch rechtläufig sey und bleibe, während der linksliegende das eine Mal gleichfalls rechtläufig, das andere Mal rückläufig ist. Die beiden anderen Combinationen fallen nämlich durch bloße Umkehrung der verticalen Ebene um die Ordinaten-Axe darauf zurück.

§. 3.

Nach allen Obigen hat man also für den *ersten Fall*, wo beide Kreise rechtläufig sind, zu setzen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -a + e \sin w & + b; & y_1 = e \cos w & + b \\ x_2 &= +a + e \sin(W + w) - b; & y_2 &= e \cos(W + w) + b \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Substituirt man diese Werthe in die Formel (1) so kommt zunächst

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{e}{2} [\sin w - \sin(W + w)] \\ &= e \cos \frac{1}{2} W \sin(\frac{1}{2} W + w) \\ \frac{x_1 - x_2}{2} &= \frac{e}{2} [\sin w - \sin(W + w)] - a + b \\ &= -e \sin \frac{1}{2} W \cos(\frac{1}{2} W + w) - a + b \\ \frac{y_1 + y_2}{2} &= \frac{e}{2} [\cos w + \cos(W + w)] + b \\ &= e \cos \frac{1}{2} W \cos(\frac{1}{2} W + w) + b \\ \frac{y_1 - y_2}{2} &= \frac{e}{2} [\cos w - \cos(W + w)] \\ &= e \sin \frac{1}{2} W \sin(\frac{1}{2} W + w) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

woraus dann folgt:

$$\left. \begin{aligned} x &= e \left(\cos \frac{1}{2} W + \sin \frac{1}{2} W \right) \sin \left(\frac{1}{2} W + w \right) \\ y &= e \left(\cos \frac{1}{2} W - \sin \frac{1}{2} W \right) \cos \left(\frac{1}{2} W + w \right) - a + 2b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Den constanten Theil der Ordinaten schaffe man nun dadurch fort, dafs man allen Ordinaten die Gröfse $+a - 2b$ zufügt, d. h. dafs man den Anfangspunkt der Coordinaten in denjenigen Punkt der Ordinaten-Axe verlegt, wo dieselbe von der geraden Linie geschnitten wird, welche man durch die Mittelpunkte der von den Berührungspunkten beschriebenen Kreise (§. 2) der Dreiecks-Katheten parallel legt. Zieht man sodann noch die Parenthesen in (4) zusammen ') und erhält somit bequeme Ausdrücke für den jedesmaligen Ort des bewegten Punktes, so bleibt endlich nur das veränderliche w zu eliminiren, um die Gleichung für die Bahn des Scheitelpunktes und somit auch aller übrigen Punkte in der Ebene (wovon nur jede ihren eigenen neuen Coordinaten-Anfang bekommt) auszudrücken, welche einem angenommenen W entspricht.

Man erhält auf diese Weise das System

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \left(\frac{1}{2} W + 45^\circ \right) \sin \left(\frac{1}{2} W + w \right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \left(\frac{1}{2} W + 45^\circ \right) \cos \left(\frac{1}{2} W + w \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} W + 45^\circ \right)} + \frac{y^2}{2e^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2} W + 45^\circ \right)} = 1$$

wobei sich von selbst versteht, dafs unter $\sqrt{2}$ immer nur die positive Zahl $2 \sin 45^\circ$ zu verstehen ist.

§. 4.

Die Ellipse, in welcher sich in diesem Fall der Punkt bewegt, hängt also ihrer Gröfse nach nur von e , ihrer Form nach nur von W d. h. von der bleibenden gegenseitigen Stellung der beiden Kreise ab. Diese Ellipse geht über für $W=0$ in einen Kreis vom Halbmesser e

„ $W=90^\circ$ in eine horizontale Gerade von d. Länge $2\sqrt{2} \cdot e$

„ $W=180^\circ$ wieder in einen Kreis vom Halbmesser e

„ $W=270^\circ$ in eine verticale Gerade von d. Länge $2\sqrt{2} \cdot e$

1) Nach den bekannten Formeln

$$\cos x + \sin x = \cos x - \cos(90 + x) = 2 \sin 45^\circ \sin \left(\frac{1}{2} x + 45^\circ \right)$$

$$\cos x - \sin x = \cos x + \cos(90 + x) = 2 \cos 45^\circ \cos \left(\frac{1}{2} x + 45^\circ \right)$$

Für eine *beliebig vorgegebene* Form der Ellipse wird man nur das Verhältniß der beiden Axen durch den Zahlenwerth von $\tan\left(\frac{1}{2}W + 45^\circ\right)$ darzustellen und W darnach zu berechnen haben.

Aber auch der *Sinn der Bewegung* des Punktes in seiner Bahn ist bloß von W abhängig. Bezeichnet man nämlich den Bogen der Ellipse, von seinem Durchschnitt mit der positiven Ordinaten-Axe aus gezählt, mit s , so wird nach dem Obigen die Bewegung *recthläufig* genannt werden müssen, wenn ∂s und ∂w einerlei Zeichen haben, oder wenn der Quotient $\frac{\partial s}{\partial w}$ positiv ist. Für ∂s aber kann man $\frac{\partial x}{y} N$ schreiben, wobei N die stets positiv bleibende Normale bedeutet. Demnach richtet sich das Zeichen von $\frac{\partial s}{\partial w}$ nach dem Zeichen von $\frac{\partial x}{y \partial w}$. Letzterer Ausdruck ist aber nach den Formeln (I) immer $= \tan\left(\frac{1}{2}W + 45^\circ\right)$,

Demnach findet eine *recthläufige* Bewegung des Punktes in der Ellipse statt

$$\text{von } \frac{1}{2}W = 315^\circ \text{ bis } \frac{1}{2}W = 45^\circ,$$

$$\text{und von } \frac{1}{2}W = 135^\circ \text{ bis } \frac{1}{2}W = 225^\circ$$

d. h. von

$$W = 270^\circ \text{ bis } W = 90^\circ$$

und eine *rüchläufige* Bewegung

$$\text{von } \frac{1}{2}W = 45^\circ \text{ bis } \frac{1}{2}W = 135^\circ$$

$$\text{und von } \frac{1}{2}W = 225^\circ \text{ bis } \frac{1}{2}W = 315^\circ$$

d. h. von

$$W = 90^\circ \text{ bis } W = 270^\circ$$

Man hat also, nun Beides zusammengekommen, für $W = 0$ einen *recthläufigen* Kreis. Darauf folgen bei wachsendem W *recthläufige* breite Ellipsen, deren Vertical-Axe sich stets verkürzt, bis sie für $W = 90^\circ$ in eine horizontale Gerade übergehen. Von da an folgen dann *rüchläufige* breite Ellipsen, deren breite Vertical-Axe stets wächst, bis sie bei $W = 180^\circ$ in einen *rüchläufigen* Kreis übergehen. Jetzt folgen *rüchläufige* hohe Ellipsen mit stets sich verlängern-der Vertical-Axe, welche endlich bei $W = 270^\circ$ in eine

verticale Gerade übergehen. Von hier an bis $W = 360^\circ$ folgen endlich wieder *rechtläufige* hohe Ellipsen mit abnehmender Vertical-Axe, die bei $W = 360^\circ$ selbst, sich zu dem rechtläufigen Kreis abrunden, wovon ausgegangen war.

§. 5.

Auf ganz ähnliche Weise hat man für den *zweiten Fall* wo der rechtsliegende Kreis rechtläufig bleibt, der linksliegende aber rückläufig ist, die Bewegung des Punktes zu entwickeln.

Hier bekommt nämlich in dem Ausdruck von x_1 das veränderliche Glied $e \sin w$ das entgegengesetzte Zeichen, so dafs in (2) zu setzen ist

$$x_1 = -a - e \sin w + b \quad (5)$$

während die drei übrigen in (2) unverändert bleiben.

Bei der Substitution in (1) ändern sich also die beiden ersten Gleichungen in (3) indem sie nun werden

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{e}{2} [-\sin w + \sin(W + w)] \\ &= e \sin \frac{1}{2} W \cos(\frac{1}{2} W + w) \\ \frac{x_1 - x_2}{2} &= \frac{e}{2} [-\sin w - \sin(W + w)] - a + b \\ &= -e \cos \frac{1}{2} W \sin(\frac{1}{2} W + w) - a + b \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

während die beiden letzten Gleichungen von (3) ungeändert bleiben.

Verrichtet man damit nun dieselben Substitutionen und Zusammenziehungen wie in §. 3, so entspringt für diesen Fall das Gleichungs-System

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \frac{1}{2} W \sin(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \frac{1}{2} W \cos(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin^2 \frac{1}{2} W^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos^2 \frac{1}{2} W^2} = 1$$

Es ist also hier das Axenverhältnifs der Ellipsen durch den Zahlenwerth von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} W$ ausgedrückt.

§. 6.

Eine Vergleichung der beiden Systeme (I) und (II) anzustellen, beiziffern man sowohl die constanten W als die

veränderlichen w nach diesen beiden Fällen. Man hat dann für Zurückführung der Fälle auf einander die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} W_2 &= \frac{1}{2} W_1 + 45^\circ \text{ und} \\ \frac{1}{2} W_2 + w_2 + 45 &= \frac{1}{2} W_1 + w_1,\end{aligned}$$

Man übersieht also unmittelbar, dafs um *identische Ellipsen* zu erhalten, man nur $W_2 = W_1 + 90^\circ$ zu machen habe, und dafs um den bewegten Punkt auch *an demselben Ort* zu erhalten, noch *überdies* $w_2 = w_1 - 90^\circ$ zu machen sey. Hieraus folgt, dafs $W_2 + w_2 = W_1 + w_1$ seyn mufs d. h. dafs man in beiden Fällen den Hauptradius des rechtsliegenden Kreises um einen gleichen Winkel von dem Parallelismus mit der positiven Ordinaten-Axe weggedreht haben mufs, wenn man denselben Ort des bewegten Punktes in beiden Fällen erhalten will.

Der geometrische Grund dieses Satzes ist evident. Ist nämlich durch einen Winkel w_1 des ersten Falls der Punkt an einen bestimmten Ort gebracht, und macht also der Hauptradius des linksliegenden Kreises mit der Parallele der positiven Ordinaten-Axe den positiven Winkel w_1 , so ist der Winkel zwischen dem zum Berührungspunkt mit der linken Kathete gezogenen Halbmesser des excentrischen Kreises und dem Hauptradius $= w_1 - 45^\circ$. Da nun aber der excentrische Kreis durch den Hauptradius und seine Verlängerung symmetrisch theilbar ist; so mufs es auf seiner Peripherie einen zweiten Punkt geben, dessen Halbmesser gleichfalls um $w_1 - 45^\circ$ vom Hauptradius, aber nach der entgegengesetzten Seite, entfernt liegt, und der durch gehörige Umdrehung gleichfalls Berührungspunkt an *derselben* Geraden werden kann. Dieser zweite Berührungspunkt liegt also im Sinn der positiven w um $2w_1 - 90^\circ$ entfernt vom erstern. Will man ihn also mit dem erstern vertauschen, so mufs man nicht nur w_1 , sondern noch weiter $w_1 - 90^\circ$ d. h. w_2 zurückdrehen.

§. 7.

Die Untersuchung über die Form der Ellipsen und über den Sinn der Bewegung in ihnen geht nun in diesem zwei-

ten Fall denselben Weg wie §. 4. Man erkennt, daß die Form nur von der Größe des constanten Winkels W abhängt, und daß, da auch hier der Sinn der Bewegung von dem Zeichen des Ausdrucks $\frac{\partial x}{y \partial w}$ bestimmt wird, und dieser Ausdruck nach den Formeln (II) immer $= \operatorname{tg} \frac{1}{2} W$ ist, *rechtläufige* Bewegung stattfindet

von $\frac{1}{2} W = 0$ bis $\frac{1}{2} W = 90^\circ$ und von $\frac{1}{2} W = 180^\circ$ bis $\frac{1}{2} W = 270^\circ$

d. h. von $W = 0$ bis $W = 180^\circ$,

rückläufige Bewegung dagegen

von $\frac{1}{2} W = 90^\circ$ bis $\frac{1}{2} W = 180^\circ$ und von $\frac{1}{2} W = 270^\circ$ bis $\frac{1}{2} W = 360^\circ$

d. h. von $W = 180^\circ$ bis $W = 360^\circ$

Demnach hat man in diesem zweiten Fall

Bei $W = 0$ eine verticale Gerade von der Länge $2\sqrt{2} \cdot e$

Darauf folgen dann *rechtläufige* hohe Ellipsen, deren Vertical-Axe abnimmt, bis sie

bei $W = 90^\circ$ in einen *rechtläufigen* Kreis vom Halbmesser e übergehen. Darauf folgen dann wieder *rechtläufige* breite Ellipsen mit stets abnehmender Vertical-Axe bis am Ende

bei $W = 180^\circ$ eine horizontale Gerade von der Länge $2\sqrt{2} \cdot e$ beschrieben wird. Die hierauf folgenden breiten Ellipsen mit stets wachsender Vertical-Axe sind dann *rückläufig* bis sie

bei $W = 270^\circ$ in den *rückläufigen* Kreis vom Halbmesser e übergehen, welchem dann wieder gleichfalls *rückläufige* hohe Ellipsen folgen, die endlich

bei $W = 360^\circ$ wieder die verticale Gerade darstellen, von welcher ausgegangen war.

Die ganze Periode der Bewegungen folgt also hier in derselben Reihenfolge wie im ersten Fall, nur daß die zugehörigen W hier um einen Quadranten höher zu setzen sind.

§. 8.

Es ist schon am Ende des §. 2 bemerkt worden, daß die beiden bisher betrachteten Fälle genügen, um alle möglichen Bewegungen zu untersuchen. Dieses leuchtet jetzt

noch deutlicher ein, wenn man erwägt, daß ein *Umkehren* der rechtläufigen Bewegung der Kreise in die rückläufige (d. h. also im ersten Fall die Annahme rückläufiger Bewegung in beiden Kreisen, und im zweiten Fall die Annahme rückläufiger Bewegung im rechtsliegenden und rechtläufiger Bewegung im linksliegenden) überall nur eine *Rückkehr* des bewegten Punkts in der Bahn zur Folge haben kann. Die Bedeutung des W ändert sich nämlich durch diese Annahme nicht, also ändert sich auch nicht das Zeichen von $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}W + 45^\circ)$ im §. 4 und $\operatorname{tg} \frac{1}{2}W$ im §. 7, also auch nicht das Zeichen von $\frac{\partial x}{y \partial w}$ und $\frac{\partial s}{\partial w}$; ∂s muß also mit ∂w *zugleich* sein Zeichen ändern.

Demnach steht durch das Bisherige fest, daß man durch zwei gleiche excentrische Kreise auf *zwei verschiedene Weisen* einem Punkte alle die Bewegungen ertheilen kann, welche man *jedem einzelnen Aetherpartikelchen* in einem polarisirten Lichtstrahl zuschreibt.

§. 9.

Es kommt nun aber darauf an, eine *Reihe solcher Punkte*, die einen Lichtstrahl vorstellen sollen, in angemessene Bewegungen zu versetzen. Zu dem Ende lege man den auf einander folgenden Punkten, außer den bisherigen Coordinaten x und y , noch die dritten Coordinaten z bei, die man sich *positiv wachsend* denke, wenn der Punkt sich von der ursprünglichen, schon durch das obige »rechts und links« charakterisirten Stellung des Beobachters *entfernt*.

Es müssen sodann die positiven oder negativen Veränderungen u , welche die bisherigen, bei $z = 0$ geltenden w erleiden, wenn man von dem bisher allein betrachteten einzelnen Punkt auf die folgenden übergeht, den z proportional seyn, und zwar so, daß man, für die angenommene Wellenlänge $= l$, hat $u = \frac{2\pi z}{l}$ oder $u = -\frac{2\pi z}{l}$. Diesen Zweck erreicht man, wenn man horizontale gerade Kreiscylinder mit dem Halbmesser e beschreibt, sodann um dieselben je eine Schraubenlinie (*helix*) legt, deren Gleichungen sind:

$$\xi = \pm e \sin \frac{2\pi z}{l}$$

$$\eta = e \cos \frac{2\pi z}{l},$$

endlich dann noch die bewegenden Kreise vom Halbmesser R sich selbst parallel mit ihren Mittelpunkten in diesen Schraubenlinien fortbewegt.

Hier ist nun zuerst die Duplicität des Zeichens durch die Unterscheidung von rechten und linken (oder rechtsgewundenen und linksgewundenen) Schrauben festzustellen. Wir nennen also, folgend dem allgemeinen Sprachgebrauch der Techniker, *rechte* (oder rechtsgewundene) Schraube eine solche, deren Gänge, wenn sie vertical steht, dem *von außen* sie betrachtenden Beobachter von links zu rechts *aufsteigen*, oder mit andern Worten, in welchen ein Punkt von der nach Osten liegenden Cylinderseite zu der nach Westen liegenden durch *Norden* aufsteigt ¹⁾. Demnach gilt bei dem obigen ξ das obere Zeichen für eine rechte und das untere für eine linke Schraubenlinie.

Die *krumme Oberfläche* der Schraube selbst, welche durch parallele Fortbewegung des Kreises vom Halbmesser R entsteht, ist dann in Folge der Gleichung $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$ auszudrücken

für die *rechte Schraube* durch

$$x^2 + y^2 - 2xe \sin \frac{2\pi z}{l} - 2ye \cos \frac{2\pi z}{l} = R^2 - e^2 \quad (7)$$

für die *linke Schraube* durch

$$x^2 + y^2 + 2xe \sin \frac{2\pi z}{l} - 2ye \cos \frac{2\pi z}{l} = R^2 - e^2 \quad (8).$$

1) Dieser uralte Sprachgebrauch aller Techniker ist auch von Linné (*Philos. botan., Stockholm 1757 p. 39*) in die wissenschaftliche Terminologie aufgenommen, mit den Worten: *ascendens... sinistrorsum secundum solem... dextrorsum contra solem*, und scheint hier unverändert beibehalten, bis 1827 De Candolle (dem wie es scheint auch manche Botaniker jetzt folgen) die Terminologie geradezu umkehrte, in den Worten: *on détermine cette direction en supposant qu'on est soi-même placé au centre de la spirale.*

Die *Durchschnitte* dieser krummen Fläche mit den coordinirten Ebenen yz und xz werden also (beide Schrauben zusammengenommen) ausgedrückt durch

$$\left. \begin{aligned} y^2 - 2ye \cos \frac{2\pi z}{l} &= R^2 - e^2 \\ x^2 \mp 2xe \sin \frac{2\pi z}{l} &= R^2 - e^2 \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

Die Gleichungen für die Curven aber, welche auf den coordinirten Ebenen yz und xz entstehen, wenn man ein die krumme Oberfläche berührendes Perpendikel auf dieselben sich selbst parallel fortführt, erhält man mittelst Nullsetzung der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial y}$ und $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Gleichungen (7) und (8), nämlich

$$\left. \begin{aligned} y &= e \cos \frac{2\pi z}{l} \\ x &= \pm e \sin \frac{2\pi z}{l} \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

Hieraus erhellt nun, daß Schrauben, welche eine *continuirliche* gerade Linie in die oscillirende Bewegung des polarisirten Lichts versetzen sollen, sich nach Art der sogenannten gewundenen Säulen auf der Drehbank wohl etwa dadurch machen ließen, daß man dem Drehstuhl eine nach den Gleichungen (10) gekrümmte Schneide doppelter Krümmung gäbe. Für die praktische Ausführung einer Maschine aber, wobei nur eine Reihe von auf der Wellenlänge l gleichvertheilten einzelnen Punkten zu bewegen ist, bleibt es vorzuziehen, statt der Schraube selbst ein System von cylindrischen Scheiben zu setzen, deren Dicke dem Unterschied je zweier benachbarter z gleich kommt, und deren Mittelpunkte in der obigen Schraubenlinie liegen, während die noch beliebig zu wählenden R nur nach den Zwecken der Genauigkeit und Dauerhaftigkeit des Apparats zu bestimmen sind ¹⁾.

1) Hr. Mechanikus Schubart, welcher 1855 die Schrauben zu meinem Modell sehr mühsam ausarbeitete, kam damals schon auf den Gedanken, Scheibensysteme dafür zu substituiren, und wir fanden dann auch

§. 10.

Um nun mittelst zweier solcher Schrauben (oder dafür substituierter Scheibensysteme)

die Polarisationsbewegungen

so wie sie bei dem Licht vorausgesetzt werden, hervorzu-
bringen, ist von den beiden eben beim Kreise betrachteten
Fällen Anwendung zu machen.

Läßt man überall die Kreise, mit denen sich in den
§§. 2 bis 8 beschäftigt wurde, für den Anfang der Wellen-
bewegung, $z = 0$, gelten, und behält die obigen Bedeu-
tungen für w und W in diesen *Anfangskreisen* bei, so hat
man für die folgenden Punkte nur einer Veränderung die-
ser beiden Größen, je nach den z vor auszusetzen.

1) Bei *zwei congruenten rechtsgewundenen* Schrauben,
welche sich in *demselben* Sinn umdrehen

hat man nun die w auf *beiden* Seiten um $\frac{2\pi z}{l}$ zu *vermehr-*
ren, wenn das z von 0 an bis z angewachsen ist. Das W
aber bleibt bei jedem z (jeder Scheibe) dasselbe.

Man hat demnach aus dem System (1) des §. 3. für die
krumme Linie, worin sich sämtliche Punkte befinden, die
Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin\left(\frac{1}{2}W + 45^\circ\right) \sin\left(\frac{1}{2}W + w + \frac{2\pi z}{l}\right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos\left(\frac{1}{2}W + 45^\circ\right) \cos\left(\frac{1}{2}W + w + \frac{2\pi z}{l}\right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

aus welchen sich mit dem w *zugleich* das z wie oben eli-
minirt, so dafs

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}W + 45^\circ\right)} + \frac{y^2}{2e^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}W + 45^\circ\right)} = 1 \quad (12)$$

ganz unverändert bleibt.

bald eine sichere Methode, dergleichen genau congruent oder genau
symmetrisch zu construiren. — Dem Ansehen der Abbildung nach zu
urtheilen, haben unsere Systeme die größte Aehnlichkeit mit der zwei
Jahre später durch diese Annal. Bd. 100, S. 585 uns bekannt gewor-
denen Einrichtung von Lissajous.

Diefs zeigt nun, dafs sich alle Bahnen als *identische* Ellipsen auf die Ebene xy projeciren, oder mit andern Worten, dafs die durch die Gleichungen (11) ausgedrückte krumme Linie doppelter Krümmung eine *Spirale* um einen geraden elliptischen Cylinder darstellt, wobei zum Ueberflufs noch bemerkt werden mag, dafs in den Fällen, wo die Ellipsen in gerade Linien übergehen (bei geradliniger Polarisation) diese Spirale in eine ebene Wellenlinie übergeht, was aber der Allgemeinheit nicht schadet.

Es fragt sich also nun zunächst, ob diese Spirale eine rechts- oder linksgewundene sey? Diefs zu entscheiden, denke man durch einen Punkt derselben, die Elemente ∂s in der Bahn des bewegten Punkts, und ∂z parallel der Axe nach ihren oben schon bestimmten positiven Richtungen gelegt; so wird das Element der Spirale ∂S , gleichfalls positiv gezählt, wo eine Entfernung vom Anfangspunkt ausgedrückt werden soll, nur dann *zwischen* dieselben fallen, oder mit andern Worten, so wird der Winkel vom positiven ∂s bis zum positiven ∂S nur dann spitz seyn, wenn die Spirale rechtsgewunden ist, stumpf aber, wenn sie linksgewunden ist. Die Cotangente dieses Winkels wird aber durch $\frac{\partial s}{\partial z}$ ausgedrückt. Es liegt also die Entscheidung in dem Zeichen dieses Ausdrucks oder (wie §. 4) im Zeichen des Ausdrucks $\frac{\partial x}{y \partial z}$, welches nach den Formeln (11) mit dem Zeichen von $\tan(\frac{1}{2}W + 45^\circ)$ identisch ist. Dieses, verglichen mit §. 4, zeigt also, dafs man

- a) bei zwei *rechtsläufigen rechtsgewundenen* Schrauben, rechtsgewundene und linksgewundene Spiralen zwischen denselben Gränzen erhält, zwischen welchen die Bahnen der einzelnen Punkte rechtsläufig oder rückläufig sind. Wenn dagegen
- b) beide *rechtsgewundene* Schrauben *rückläufig* werden, die w aller Punkte also durch die Drehung abnehmen, und letztere also in ihren nach a) beschriebenen Bahnen zurückkehren, die ∂s und ∂x also zugleich ihr

Zeichen ändern wie §. 8; so ändert sich doch das Zeichen der ∂z von einer Bahn zur folgenden dabei nicht; $\frac{\partial x}{\partial z}$ ändert also sein Zeichen, und man findet am Ende, daß man hier eine rechtsgewundene Spirale hat, wo vermöge der angenommenen W die Punkte in der Bahn rückläufig, und eine linksgewundene, wo sie rechtläufig sind.

§. 11.

Werden nun

- 2) zwei *congruente linksgewundene* Schrauben in demselben Sinn umgedreht

so bleibt gleichfalls W unverändert, die w aber *vermindern* sich bei wachsendem z auf beiden Seiten um $\frac{2\pi z}{l}$, man bekommt also nach dem System (I) des §. 3 die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin\left(\frac{1}{2} W + 45^\circ\right) \sin\left(\frac{1}{2} W + w - \frac{2\pi z}{l}\right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos\left(\frac{1}{2} W + 45^\circ\right) \cos\left(\frac{1}{2} W + w - \frac{2\pi z}{l}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin^2\left(\frac{1}{2} W + 45^\circ\right)} + \frac{y^2}{2e^2 \cos^2\left(\frac{1}{2} W + 45^\circ\right)} = 1 \quad (14)$$

Die Punkte laufen also auch hier auf der Oberfläche eines geraden elliptischen Cylinders wie in §. 10, und es ist kein Unterschied als daß das Zeichen von $\frac{\partial s}{\partial z}$ oder $\frac{\partial x}{y \partial z}$ das entgegengesetzte von dem wird, was in §. 10 galt. Man erhält also, im Verfolg der obigen Schlüsse,

- a) bei zwei *rechtläufigen linksgewundenen* Schrauben rechtsgewundene Spiralen, da wo die Bahnen der einzelnen Punkte rückläufig sind, und linksgewundene, da wo die Punkte in der Bahn rechtläufig sind. Dagegen aber hat man
- b) bei zwei *rückläufigen linksgewundenen* Schrauben, die rechtsgewundenen Spiralen bei den rechtläufigen Bahnen und die linksgewundenen bei den rückläufigen.

§. 12.

Werden nun aber zwei *symmetrische* Schrauben mit einander so verbunden, daß sie sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit umdrehen, so muß ein anderer Weg eingeschlagen werden, um zu den Polarisationsbewegungen zu gelangen.

Nach dem was am Ende des §. 2 bemerkt und §. 8 weiter ausgeführt wurde, ist es für die Untersuchung dabei gleichbedeutend, ob man die rechtsgewundene oder die linksgewundene als rechtsliegend betrachtet. Es mag also, zur bequemen Anknüpfung an das Obige vorausgesetzt werden, daß die rechtsliegende auch die rechtsgewundene sey.

In den symmetrischen Schrauben werden nun die Hauptradien, welche bei dem Anfangskreis ($z = 0$) einen Winkel W mit einander bilden, bei einem späteren z den Winkel $W + \frac{4\pi z}{l}$ gegen einander machen. Wollte man also auch hier wie in §. 10 und 11 eine Bewegung in *demselben Sinn* bei beiden Schrauben voraussetzen, und demgemäß in das System (I) des §. 3 substituiren, so würde man aus den Formeln, welche an die Stelle von (11) und (13) träten, weil die W nun aufgehört hätten constant zu seyn, nicht das z zugleich mit dem w eliminiren können, demnach nicht, wie in den beiden früheren Fällen, dieselbe Ellipse für alle Bahnen, d. h. nicht eine Spirale auf einen geraden elliptischen Cylinder für den geometrischen Ort aller bewegten Punkte, kurz *nicht die Polarisationsbewegung* erhalten. Dagegen kommt man hier zum Zweck, wenn man

3) *zwei symmetrische* Schrauben sich im *entgegengesetzten Sinn* drehen läßt.

In diesem Fall bestimmt sich nach der Festsetzung des §. 2 das W für einen späteren Kreis, für welchen z gilt, dadurch, daß man das bei $z = 0$ geltende W vorerst um $\frac{2\pi z}{l}$ vermehrt, weil die rechtsliegende Schraube auch als rechtsgewundene vorausgesetzt ist, und sodann den Hauptradius dieses rechtsliegenden Kreises, und somit die ganze

rechtsliegende Schraube, wieder um $\frac{2\pi z}{l}$ zurückdreht, damit der in der linksliegenden linksgewundenen Schraube um $\frac{2\pi z}{l}$ nach links gerückte Hauptradius wieder zum Parallelismus mit der positiven Ordinaten-Axe zurückkehre. Demnach heben sich die beiden $\frac{2\pi z}{l}$ um welche die Haupt-
radien auseinander gerückt sind, in den W wieder vollständig auf. Man behält also ein constantes W und kann nach dem System (II) des §. 5 ansetzen

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \frac{1}{2} W \sin \left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ + \frac{2\pi z}{l} \right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \frac{1}{2} W \cos \left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ + \frac{2\pi z}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin^2 \frac{1}{2} W^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos^2 \frac{1}{2} W^2} = 1 \quad (16)$$

Die Gestalt der Bahnen, in welchen sich die einzelnen Punkte bewegen und ihr Rechtlaufen oder Rücklaufen in denselben erkennt man dann unmittelbar durch den §. 7. Sie folgen demnach ganz dem Zeichen von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} W$ und fallen zusammen mit denen, die in §. 10 und 11 für zwei congruente Schrauben aufgefunden sind, wenn die in §. 6 aufgeführten Bedingungen erfüllt werden.

Was sodann die *Spiralen* betrifft, in welchen auf dem geraden elliptischen Cylinder die bewegten Punkte liegen, so werden sie wieder nach dem Zeichen von $\frac{\partial x}{y \partial z} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} W$ rechts- oder linksgewunden seyn.

- a) Wenn also die *rechtsliegende rechtsgewundene* Schraube auch *rechtläufig* ist, und die linksliegende linksgewundene dagegen rückläufig, so erhält man rechtläufige Bahnen verbunden mit rechtsgewundenen Spiralen, rückläufige Bahnen verbunden mit linksgewundenen.
- b) Wird die Bewegung aber umgekehrt, welches so viel ist, als ob eine *rechtsliegende linksgewundene* Schraube *rechtläufig* wäre, und dagegen die linksliegende rechtsgewundene rückläufig, so ändern sich die Richtungen

der Bahnen nach §. 8; die Windung der Spiralen bleibt aber unverändert dieselbe wie bei a), indem die x und z zugleich ihr Zeichen ändern, und man hat also rückläufige Bahnen verbunden mit rechtsgewundenen Spiralen und rechtläufige Bahnen mit linksgewundenen Spiralen.

Zu demselben Resultate würde man auch gelangen, wenn man vornherein zur rechtsliegenden Schraube eine linksgewundene gewählt hätte. Es würde dann nur in den Gleichungen (15) $-\frac{2\pi z}{l}$ an die Stelle von $+\frac{2\pi z}{l}$ zu schreiben seyn.

§. 13.

Nachdem in den vorigen Paragraphen festgestellt ist, dafs sich durch Zusammensetzung der Bewegungen *congruenter* sowohl als *symmetrischer* Schrauben alle Arten von Polarisationsbewegungen hervorbringen lassen, und zwar jede auf mehrere Weise, bleibt noch übrig die *Projectionen* der dabei vorkommenden Spiralen auf die Ebenen yz und xz etwas näher zu betrachten.

Dabei ist auszugehen von den Gleichungen (11), (13) und (15), die man mit Rücksicht auf die Bemerkung am Ende des vorigen §. nunmehr so schreiben kann:

Für zwei *congruente* gleichlaufend sich drehende Schrauben:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \left(\frac{1}{2} W + 45^\circ \right) \sin \left(\frac{1}{2} W + w \pm \frac{2\pi z}{l} \right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \left(\frac{1}{2} W + 45^\circ \right) \cos \left(\frac{1}{2} W + w \pm \frac{2\pi z}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

wobei das obere Zeichen für rechtsgewundene, das untere für linksgewundene gilt;

für zwei *symmetrische* entgegengesetzt sich drehende Schrauben

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \frac{1}{2} W \sin \left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ \pm \frac{2\pi z}{l} \right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \frac{1}{2} W \cos \left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ \pm \frac{2\pi z}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die rechtsgewundene Schraube nach der positiven Seite der Abscissenlinie hin liegt, das untere für den entgegengesetzten Fall.

Man übersieht aus diesen Gleichungen dann gleich, daß die Projectionen Wellenlinien sind, deren Excursionsweiten übereinstimmen mit den Halbaxen der Ellipsen, welche den verschiedenen W entsprechen, und daß bei den geradlinigen Polarisationen, welche in beiden Systemen entstehen können, die eine Projection in eine gerade Linie übergeht, während die andere ihre größte Excursionsweite ($=\sqrt{2} \cdot e$) erhält.

Ferner übersieht man leicht, daß diese Wellenlinien *laufenden Wellen* angehören, deren Knotenpunkte also bei der Drehung der Schrauben längs der Axe der z fortlaufen, und jedesmal in der zweiten Projection die größte Excursionsweite neben sich haben; so daß die Knotenpunkte beider Projectionen um $\frac{1}{4}l$ von einander liegen.

So hat man z. B. aus den Gleichungen (17) für den Fall der rechtsgewundenen congruenten Schrauben

das größte x neben $y = 0$

$$\text{für } \frac{1}{2}W + w + \frac{2\pi z}{l} = 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{1}{4}l - \frac{lW}{4\pi} - \frac{lw}{2\pi} \text{ oder } = \frac{3}{4}l - \frac{lW}{4\pi} - \frac{lw}{2\pi}$$

oder allgemein, da nach jeder Wellenlänge dasselbe wiederkehrt

$$\text{für } z = \frac{2n+1}{4}l - \frac{lW}{4\pi} - \frac{lw}{2\pi}$$

eine Vermehrung des w hat also eine Verminderung des z zur Folge, d. h. die Wellen laufen in diesem Fall, beim Vorwärtsdrehen der Schrauben, rückwärts gegen den Anfang der Abscissen zu und umgekehrt.

Entstände nun neben dieser Polarisationswelle eine *zweite* durch zwei symmetrische Schrauben in dem ersten Fall der Formel (18)

so wäre $y = 0$

$$\text{für } \frac{1}{2}W + 15^\circ + w + \frac{2\pi z}{l} = 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{1}{8}l - \frac{lW}{4\pi} - \frac{lw}{2\pi} \text{ oder } = \frac{5}{8}l - \frac{lW}{4\pi} - \frac{lw}{2\pi}$$

$$\text{allgemein für } z = \frac{4n+1}{8}l - \frac{lW}{4\pi} - \frac{lw}{2\pi}.$$

Auch hier also laufen die Wellen der Projectionen rückwärts gegen den Anfangspunkt der Abscissen, und wenn beide Wellensysteme mit gleichem W gebildet sind, so ist in der Projection auf yz der constante Abstand ihrer Knotenpunkte $= \frac{1}{8}l$, dergestalt, daß derjenige der zweiten Welle immer um so viel dem Anfange der Coordinaten näher liegt.

§. 14.

Es bleibt nun noch übrig die

zweite Wellenbewegung

zu untersuchen, welche, im Obigen schon angedeutet, *keine Polarisationsbewegung*, derselben aber nahe verwandt ist, weil sie auch aus der Bewegung congruenter oder symmetrischer Schrauben entsteht, wenn erstere entgegengesetzt oder letzterer gleichläufig sich drehen.

Bezeichnet man hier wie früher mit W und w die oben definirten Winkel der ersten Kreise, deren Ebenen mit der Ebene xy für $z = 0$ zusammenfallen, so setze man

- 1) bei *zwei rechtsgewundenen* Schrauben, die sich im *entgegengesetzten* Sinne drehen

einstweilen wieder voraus, daß die rechtsliegende auch rechtläufig sey. Für die Anfangskreise sind dann unmittelbar die Gleichungen (II) des §. 5 zu nehmen, für die späteren Durchschnitte (Scheiben) der beiden Schrauben aber, die W und w nach den z zu modificiren.

Die Hauptradien der Anfangskreise sind nun (bei $z = 0$) um W gegen einander geneigt, wenn der Hauptradius des linksliegenden Kreises mit dem positiven Theil der Ordinaten-Axe parallel ist. Für einen folgenden Kreis der einem beliebigen z angehört, sind alsdann, weil die Schrau-

ben beide als rechtsgewunden vorausgesetzt werden, die Haupttradien im Sinn der rechtsläufigen Drehung um $\frac{2\pi z}{l}$ vor denen der Anfangskreise voraus. Damit also der Hauptradius des linksliegenden folgenden Kreises in die Lage des Hauptradius des linksliegenden Anfangskreises zurückgeführt werde, muß, weil entgegengesetzter Lauf stattfindet, der rechtsliegende noch um $\frac{2\pi z}{l}$ weiter vorwärts gedreht werden. Dadurch tritt an die Stelle der frühern W nunmehr $W + \frac{4\pi z}{l}$. Sind aber die Anfangskreise um w aus der Anfangslage herausgedreht, so sind die späteren Kreise erst um $w - \frac{2\pi z}{l}$ aus derselben heraus. Man hat also durch Substitution in das System (II) des §. 5, indem sich die $\frac{2\pi z}{l}$ neben den $\frac{1}{2}W$ und w gegen einander aufheben, für die Curve doppelter Krümmung, worin die einzelnen Punkte sich bewegen, die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} e \sin\left(\frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l}\right) \sin\left(\frac{1}{2}W + w + 45^\circ\right) \\ y &= \sqrt{2} e \cos\left(\frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l}\right) \cos\left(\frac{1}{2}W + w + 45^\circ\right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die Elimination von w giebt hier die Gleichung

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin\left(\frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l}\right)^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos\left(\frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l}\right)^2} = 1 \quad (20),$$

woraus man erkennt, daß die Punkte sich auf einer krummen Fläche bewegen, die lauter *elliptische Durchschnitte* senkrecht zur Schrauben-Axe hat, für jedes z aber eine *andere Ellipse* giebt.

Durch Elimination von z aber erhält man aus (19) die Gleichung

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin\left(\frac{1}{2}W + w + 45^\circ\right)^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos\left(\frac{1}{2}W + w + 45^\circ\right)^2} = 1 \quad (21)$$

welche anzeigt, daß die Projectionen sämtlicher Punkte

auf die Ebene xy eine sich während der Drehung stets verändernde Ellipse giebt.

Um die Beschaffenheit dieser neuen Bewegungsfläche, welche sich also in der Projection auf xy als einen geraden mit der Drehung stets *veränderlichen* elliptischen Cylinder darstellt, und des Laufs der Punkte in ihr näher zu untersuchen, gehe man

A. von der Gleichung (21) aus. Man erkennt dann, dafs die veränderliche Ellipse der Projection auf xy

a) in eine verticale gerade Linie übergeht für

$$\frac{1}{2}W + w + 45^\circ = 360^\circ \text{ oder } 180^\circ$$

$$\text{d. h. für } w = 315^\circ - \frac{1}{2}W \text{ und } 135^\circ - \frac{1}{2}W$$

b) in einen Kreis für

$$\frac{1}{2}W + w + 45^\circ = 45^\circ \text{ oder } = 135^\circ \text{ oder } = 225^\circ \text{ oder } = 315^\circ$$

$$\text{d. h. für } w = 360^\circ - \frac{1}{2}W; = 90^\circ - \frac{1}{2}W; = 180^\circ - \frac{1}{2}W; \\ = 270^\circ - \frac{1}{2}W.$$

c) in eine horizontale gerade Linie für

$$\frac{1}{2}W + w + 45^\circ = 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ$$

$$\text{d. h. für } w = 45^\circ - \frac{1}{2}W \text{ und } 225^\circ - \frac{1}{2}W.$$

Die Punkte befinden sich also während *einer* Umdrehung in *achtfacher* Abwechselung; zweimal in der Lage der geradlinigen Polarisation, deren Schwingungen in einer verticalen Ebene mit der Excursionsweite $\sqrt{2} \cdot e$ vorgehen, zweimal in der Lage der geradlinigen Polarisation mit horizontalen Schwingungen von derselben Excursionsweite, und viermal in der Lage, die sie bei der Kreispolarisation für den Halbmesser e annehmen würden. Ueberdies sieht man leicht, dafs die Uebergänge zwischen diesen acht Projectionsformen durch Ellipsen geschehen, welche zwischen den Verticalen und ihren benachbarten Kreisen hoch, zwischen den horizontalen und ihren benachbarten Kreisen aber breit sind.

B. Sodann giebt die Gleichung (20) in Verbindung mit (19) weiteren Aufschluß über die *Bahnen* der *einzelnen* Punkte in der Bewegungsfläche. Man sieht, dafs die

Beschaffenheit dieser Bahnen ganz von der Größe von z abhängt. Die Bahn ist

a) eine verticale gerade Linie

$$\text{für } \frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l} = 0^\circ \text{ oder } = 360^\circ \text{ und } = 180^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = l - \frac{lW}{4\pi} \text{ und } = \frac{1}{2}l - \frac{lW}{4\pi}$$

b) ein Kreis

$$\text{für } \frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l} = 45^\circ; = 135^\circ; = 225^\circ; = 315^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{1}{8}l - \frac{lW}{4\pi}; = \frac{3}{8}l - \frac{lW}{4\pi}; = \frac{5}{8}l - \frac{lW}{4\pi} = \frac{7}{8}l - \frac{lW}{4\pi}$$

c) eine horizontale Gerade

$$\text{für } \frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l} = 90^\circ \text{ und } = 270^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{1}{4}l - \frac{lW}{4\pi} \text{ und } = \frac{3}{4}l - \frac{lW}{4\pi}.$$

Es ist auch hier wie vorhin leicht zu übersehen, daß der Uebergang zwischen diesen acht Hauptfällen der Punkt-bewegung durch Ellipsen gebildet wird, welche hoch oder breit sind, je nachdem sie den verticalen oder horizontalen Geraden benachbart sind.

C. Die beiden vorigen Sätze machen es nun wünschenswerth die in einer Wellenlänge mehrfach vorkommenden Bahnen gehörig von einander zu unterscheiden, und den im Wesentlichen willkürlichen Anfangspunkt einer Welle dann so zu bestimmen, daß er einer bestimmten Bahn und einer bestimmten Lage des bewegten Punkts in ihr entspricht. Zu dem Ende nenne man für jedes angenommene W diejenige verticale Bahn *erste Verticale*, welche das kleinste positive z hat, und bestimme den *Anfang* einer Welle so, daß in dieser ersten Verticale das y seinen *größten positiven* Werth hat für $x = 0$.

Da man nun immer $W < 360^\circ$ setzen kann, so wird man die erste Verticale im Allgemeinen bei $\frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l} = 180^\circ$ d. h. bei $z = \frac{1}{2}l - \frac{lW}{4\pi}$ finden (wenn nämlich nicht

gerade $W = 0$, wo dann freilich $z = 0$ selbst der kleinste positive Werth von z für die erste Verticale würde). Dann hat man für den Anfang der Welle, damit ein größtes positives y entstehe, auch $\frac{1}{2}W + w + 45^\circ = 180^\circ$, d. h. $w = 135^\circ - \frac{1}{2}W$ zu setzen. Wäre z. B. $W = 90^\circ$, so hätte man die erste Verticale bei $z = \frac{3}{8}l$, und für den Anfang der Welle müßte man $w = 90^\circ$ setzen.

Es leuchtet von selbst ein, daß man durch veränderte Annahme der W die erste Verticale auf jedes beliebige z verlegen kann. Sollte z. B. die erste Verticale bei $z = \frac{1}{8}l$ fallen, so müßte man $W = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{l} \right) = 270^\circ$ setzen und die Welle anfangen lassen, wo $w = 0$

D. Die Projectionen der bewegten Punkte auf die Ebenen yz und xz sind nach (19) Wellenlinien, deren Ordinaten gegen die Abscissenlinie z von w abhängen, während ihre Excursionsweiten von z selbst bestimmt werden. So findet sich z. B. für den nach C bestimmten Anfang der Welle die positive Excursionsweite der $y = +\sqrt{2} \cdot e$ bei $w = 135^\circ - \frac{1}{2}W$, die negative Excursionsweite $= -\sqrt{2}$ bei $w = 315^\circ - \frac{1}{2}W$, wogegen die Projection sämmtlicher Punkte auf xy in eine verticale gerade Linie übergeht, und die Projection auf xz mit der Axe des z zusammenfällt. Für dieselben Werthe von w hat man dagegen bei einem z , welches um $\frac{1}{8}l$ weiter vom Anfang liegt, in der Ebene yz die größte Excursionsweite $= +e$, die kleinste $= -e$. Bei einem z , welches $\frac{1}{4}l$ vom Anfang liegt, findet man wieder für dieselben Werthe von w in yz beide Excursionsweiten $= 0$ und hat dagegen in xz bei dem ersten Werthe von w die Excursionsweite $+\sqrt{2} \cdot e$, bei dem zweiten $-\sqrt{2} \cdot e$.

Man sieht nun leicht, daß beide Projectionen auch unabhängig von w d. h. *fortwährend in denselben Punkten* die Axe der z schneiden. Bei der Projection auf yz findet dieses statt

$$\text{für } \frac{1}{2}W + \frac{2\pi z}{l} = 90^\circ \text{ und } = 270^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{1}{4}l - \frac{lW}{4\pi} \text{ und } = \frac{3}{4}l - \frac{lW}{4\pi}$$

Bei der Projection auf xz

$$\text{für } \frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} = 180^\circ \text{ und } = 360^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{1}{2} l - \frac{lW}{4\pi} \text{ und } = l - \frac{lW}{4\pi}$$

Bei denjenigen Werthen von z , welche in der einen Projection einen Durchschnitt mit der Axe der z geben, hat die andere Projection ihre größte Excursion.

Jede einzelne dieser beiden Projectionen stellt also das Bild von *stehenden Wellen* dar, deren Knotenpunkte um $\frac{1}{2}l$ von einander entfernt sind, während die übrigen Punkte auf beiden Seiten jedes Knotenpunkts nach verschiedenen Seiten schwingen und alle gleichzeitig in die gerade Linie zurücktreten. Dabei liegen die Knotenpunkte der einen Projection um $\frac{1}{4}l$ entfernt von denen der anderen.

Bei einer Aenderung von W ändert sich endlich *nur die Lage* der Knotenpunkte auf der Axe der z , sonst bleibt alles ganz unverändert, so lange l unverändert bleibt.

E. Der Lauf jedes Punktes in seiner Bahn ist nun ganz so wie in §. 4 durch das Zeichen des Ausdrucks $\frac{\partial s}{\partial w}$ oder $\frac{\partial x}{y \partial w}$, also durch partielle Differentirung der Gleichungen (19) zu entscheiden.

Man hat also rechläufige oder rückläufige Bahnen je nachdem $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} \right)$ positiv oder negativ ist.

Demnach sind alle Bahnen von der ersten Verticale bis zur ersten Horizontale, d. h. nach der Festsetzung in C, im *ersten Viertel* der Wellenlänge *rechtläufig*, von da bis zur zweiten Verticale, d. h. im *zweiten Viertel* der Wellenlänge, *rückläufig*, und so fort wechselt der Lauf bei jedem Viertel.

F. Auf der *Oberfläche*, die bisher untersucht wurde, liegen die einzelnen Punkte nun in einer durch die Gleichungen (19) ausgedrückten *veränderlichen Spirale*, welche in den Fällen, wo die Projection auf xy in gerade Linien übergeht, sich zu einer ebenen Wellenlinie verflacht.

Um zu untersuchen, wo diese Spirale rechts oder links

gewunden ist, muß man, wie im §. 10, von dem Ausdruck, $\frac{\partial s}{\partial z}$ oder $\frac{\partial z}{y \partial x}$ ausgehen, dessen positives Zeichen das Rechtsgewundenseyn anzeigt. Es ist aber hier

$$\frac{\partial x}{y \partial z} = \tan\left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ\right)$$

und man hat also, wieder ausgehend vom Anfang der Welle, nach der Festsetzung in *C*, eine *rechtsgewundene* Spirale im *ersten* und *dritten* Viertel der *Weiterdrehung*, eine *linksgewundene* in den beiden anderen Vierteln. Dabei verflacht sich im ersten Viertel die rechtsgewundene Spirale zwischen erster Verticale und erster Horizontale allmählich zu einer ebenen Wellenlinie, erhebt sich dann wieder aus derselben zur linksgewundenen im zweiten Viertel u. s. w.

G. Schliesslich bleibt nur noch zu bemerken, daß hier eben so wie oben §. 10 bei der Polarisationsbewegung, da wo ein *Rücklauf* der Punkte in ihren Bahnen eintritt, auch nun die Spiralen in das Symmetrische übergehen, so daß man linksgewundene erhält wo in *F* rechtsgewundene waren und umgekehrt.

§. 15.

Die sieben Sätze *A* bis *G*, welche im vorigen §. aus den Gleichungen (19), (20) und (21) gefolgert sind, vermitteln nun die *Anschauung* der eigenthümlichen *krummen Fläche* auf welcher die Schwingungen der hier betrachteten *zweiten Wellenbewegung* vor sich gehen, wenn die *w* stetig wachsen, d. h. wenn die rechtsliegende Schraube auch rechtsläufig gedreht wird.

Um diese Anschauung festzustellen, denke man auf einer Wellenlänge sechszehn Punkte gleichmäÙig vertheilt, die von 0 bis 15 numerirt seyn mögen, so daß 16 den Schluß der ersten Welle, d. h. dem Anfang der folgenden Welle angehört. Man setze nun, um den nach *C* in §. 14 definirten Anfang einer Welle mit dem allgemeinen Anfang der Coordinaten zusammenfallen zu lassen, das willkührliche $W = 0$ und lasse die Bewegung beginnen wo $w = 315^\circ$. Dann liegen nach dem Obigen sämmtliche Punkte in der

Ebene yz und ihre Projection bildet also darauf eine ebene Wellenlinie, in welcher 0 und 16 die Gipfel von Wellenlängen mit $\sqrt{2} \cdot e$ Excursionsweite, 8 aber die Tiefe eines Thals von gleicher Excursionsweite, endlich 4 und 12 Knotenpunkte bilden. Die Zwischenpunkte 2 und 14 haben die Ordinaten $+e$ und dagegen 6 und 10 die Ordinaten $-e$. Die Projection auf xz ist dabei durchweg eine gerade Linie.

Man denke nun diese Orte der Punkte in der Ebene yz fixirt, während man das w um 90° vergrößert, so entsteht aus jener ersten Wellenlinie eine Gerade; dagegen sind nun sämtliche Punkte in die Ebene xz hinabgestiegen und bilden hier wieder eine Wellenlinie bei welcher 0, 8 und 16 in ihren Knotenpunkten sich befinden, während 4 den Gipfel eines Berges mit positiver Ordinate $x = +\sqrt{2} e$, 12 die Tiefe eines Thals mit $x = -\sqrt{2} e$ annimmt, die Punkte 2 und 6 die Ordinate $+e$, 10 und 14 aber die Ordinate $-e$ haben, so daß diese vier letzterwähnten Punkte die der Länge nach gleichen Ordinaten haben wie vorher in der Ebene yz .

Der Uebergang von der früher fixirten Lage in yz zu der jetzt eben aufgeführten in xz , welche von nun an auch fixirt gedacht werden soll, geschah nun bei 0 durch ein Absteigen parallel der Axe der y , bei 2 durch ein Vorwärtslaufen in einem Kreis, bei 4 durch ein Vorlaufen im Sinn der positiven x , bei 6 durch ein Rückwärtslaufen in einem Kreis, bei 8 durch ein Aufsteigen parallel der Axe der y , bei 10 durch Vorwärtslaufen im Kreis, bei 12 durch Rücklaufen im Sinn der negativen x , bei 14 endlich durch Rückwärtslaufen im Kreis.

Denkt man endlich eine der Ebene xy parallele Ebene sich auf der Axe z von 0 bis 16 stetig fortbewegend, und in ihr bei jeder ihrer Lagen eine vollständige Ellipse gezogen, deren Scheitel in den beiden vorher fixirt gedachten Wellenlinien liegen, so bildet der *Inbegriff* aller dieser *Ellipsen* die *krumme Oberfläche*, auf welcher diese zweite Bewegung vorgeht.

Man übersieht dann auch leicht, daß die Oberfläche

vorerst aus zwei congruenten Hälften besteht, die beiderseits von Verticalen begränzt sind; jede Hälfte wieder aus zwei congruenten aber im Sinn der z entgegengesetzt gestellten Vierteln, welche durch eine Horizontale getrennt sind; jedes Viertel wieder aus zwei congruenten Achteln, die von einer kreisförmigen Grundfläche aus nach entgegengesetzten Seiten sich ausdehnen, und deren durch $\frac{1}{4}l$ getrennte Firste rechte Winkel gegen einander bilden ¹⁾).

Es verdient hier noch einmal als eine charakteristische Verschiedenheit zwischen dieser zweiten Wellenbewegung und der Polarisationsbewegung hervorgehoben zu werden, dafs die Abänderung der W gar keine Aenderung der *Bewegungsfläche* mit sich bringt; denn da durch die Annahme eines beliebigen W nur ein Abzug von $\frac{lW}{4\pi}$ an den z bewirkt wird, so hat man genau dieselben Bewegungen wie vorher, nur an anderen Punkten der Axe der z .

§. 16.

Setzt man nun statt der in §. 14 gemachten Annahme voraus, dafs

2) *zwei linksgewundene Schrauben sich im entgegengesetzten Sinne drehen,*

wobei man die rechtsliegende wieder als rechtläufig annehmen kann, so gelangt man zu den nöthigen Formeln ganz auf demselben Wege wie in §. 14, indem in der dortigen Ableitung nur $-\frac{2\pi z}{l}$ an die Stelle von $+\frac{2\pi z}{l}$ tritt, was auch ganz damit übereinstimmt, dafs eine Schraube in die symmetrische sich verwandelt, wenn die Coordinaten *einer* Axe alle ihr Zeichen ändern.

Man erhält auf diese Weise also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \left(\frac{1}{2} W - \frac{2\pi z}{l} \right) \sin \left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ \right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \left(\frac{1}{2} W - \frac{2\pi z}{l} \right) \cos \left(\frac{1}{2} W + w + 45^\circ \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

1) Hr. Dr. Fließner, dem ich bei einem Besuche hieselbst diese Bewegungsfläche zeigte, bemerkte gleich die Aehnlichkeit, welche zwischen derselben und der in diesen Annal. Bd. 65, S. 120 bis 123 beschriebenen stattfindet.

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin\left(\frac{1}{2}W - \frac{2\pi z}{l}\right)^2} + \frac{x^2}{2e^2 \cos\left(\frac{1}{2}W - \frac{2\pi z}{l}\right)^2} = 1 \quad (23)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin\left(\frac{1}{2}W + w + 45^\circ\right)^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos\left(\frac{1}{2}W + w + 45^\circ\right)^2} = 1 \quad (24)$$

Demnach hat man im Verfolg der Betrachtungen des §. 14.

A. Die Aenderungen der Projectionen auf die Ebene xy in derselben Reihenfolge und in denselben Gränzen wie oben.

B. Die Bahnen, welche im Obigen betrachtet wurden, kommen auch hier vor, nur bei anderen z , also

a. Die verticale Gerade

$$\text{bei } z = \frac{lW}{4\pi} \text{ und } z = \frac{1}{2}l + \frac{lW}{4\pi}$$

b. Der Kreis

$$\text{bei } z = \frac{1}{8}l + \frac{lW}{4\pi} \text{ u. s. w.}$$

c. Die horizontale Gerade

$$\text{bei } z = \frac{1}{4}l + \frac{lW}{4\pi} \text{ u. s. w.}$$

Kurz die z , bei welchen hier dieselben Bahnen vorkommen, sind um $\frac{lW}{2\pi}$ gröfser als oben. Will man also die z unverändert erhalten, so mufs man bei zwei linksgewundenen Schrauben $360^\circ - W$ für das W setzen, welches bei zwei rechtsgewundenen erforderlich war, um die verlangte Bahn zu geben.

C. Man wird auch hier, eben so wie oben, die einzelnen Bahnen von der *ersten Verticalen* an zählen können, wo für ein angenommenes W das Kleinste z stattfindet, und eben so den *Anfang einer Welle* in die erste Verticale verlegen können; für letzteren also nur ein w so zu bestimmen haben, wie es dem angenommenen W entspricht, um ein positives gröfstes y in der ersten Verticale zu erhalten.

Bei dem Uebergang von einer Bahn in die andere hat man dann die W so viel zu vermindern oder zu vermeh-

ren, als man sie in §. 14 zu vermehren oder zu vermindern hatte. Auch wird die *Verlegung* der ersten Verticale auf ein *bestimmtes* z sich eben so bewirken lassen wie §. 14.

D. Die Projectionen auf yz und xz fallen dann, vorbehaltlich nur der gehörigen Modification der W und w für den Anfang, genau eben so aus wie §. 14.

E. Aus denselben Gründen wie oben, bleiben denn die Bahnen auch hier im ersten Viertel der Wellenlänge rechtsläufig u. s. w.

F. Die *Spiralen* dagegen bekommen, weil $\frac{\partial x}{\partial z}$ sein Zeichen ändert, die entgegengesetzte Windung, und sind also, vom Anfang ausgegangen, im *ersten* und *dritten* Viertel der Weiterdrehung *linksgewunden*, in den beiden anderen Vierteln rechtsgewunden.

G. Beim Rückwärtsdrehen endlich, wodurch in den Bahnen ein Rücklauf eintritt, gehen denn auch die *Spiralen* eben so wie oben in das Symmetrische über, was in F für das Vorwärtsdrehen stattfand.

Die in §. 15 behandelte Bewegungsfläche endlich bleibt (immer vorbehaltlich der gehörigen Modification der W und w für den Anfang) genau dieselbe wie oben. Es bleibt also am Ende gar kein Unterschied als der der *Spiralen*.

§. 17.

Wird nun zuletzt noch vorausgesetzt, daß

3) *zwei symmetrische* Schrauben sich in *demselben* Sinne drehen,

wobei man die rechtsliegende wieder als rechtsgewunden und beide rechtsläufig denken kann; so ist in das System (I) des §. 3 gehörig zu substituieren.

Hier gehen nun, wenn in den Anfangskreisen ($z = 0$) die Hauptradien um ein gewisses W gegen einander geneigt sind, für einen folgenden Kreis, der ein gewisses z hat, die Hauptradien um $\frac{4\pi z}{l}$ weiter auseinander, gerade wie §. 14, nur aus einem anderen Grunde, weil nämlich

hier die symmetrischen Schrauben gleichlaufend sind, während dort die congruenten entgegengesetzt laufend waren.

Es ist also vorerst für W in den Formeln (I) nun zu setzen $W + \frac{4\pi z}{2}$. Derselbe Grund aber, das Auseinanderweichen der Haupttradien, bewirkt, daß das w neben dem vermehrten W um $\frac{2\pi z}{l}$ sich vermindert. Demnach erhält man aus (I) die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cdot e \sin \left(\frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} + 45^\circ \right) \sin \left(\frac{1}{2} W + w \right) \\ y &= \sqrt{2} \cdot e \cos \left(\frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} + 45^\circ \right) \cos \left(\frac{1}{2} W + w \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin \left(\frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} + 45^\circ \right)^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos \left(\frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} + 45^\circ \right)^2} = 1 \quad (26)$$

$$\frac{x^2}{2e^2 \sin \left(\frac{1}{2} W + w \right)^2} + \frac{y^2}{2e^2 \cos \left(\frac{1}{2} W + w \right)^2} = 1 \quad (27)$$

welche nun hier wie in den §. 14 und 16 näher zu betrachten sind.

A. Die veränderliche Ellipse der Projectionen auf die Ebene xy geht über

a. in verticale gerade Linien

$$\text{für } w = 360^\circ - \frac{1}{2} W \text{ und } w = 180^\circ - \frac{1}{2} W$$

b. in Kreise

$$\text{für } w = 45^\circ - \frac{1}{2} W; 135^\circ - \frac{1}{2} W; 225^\circ - \frac{1}{2} W; 315^\circ - \frac{1}{2} W$$

c. in horizontale gerade Linien

$$\text{für } w = 90^\circ - \frac{1}{2} W \text{ und } 270^\circ - \frac{1}{2} W.$$

B. Die Bahnen der einzelnen Punkte sind

a. verticale gerade Linien

$$\text{für } \frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} + 45^\circ = 360^\circ \text{ und } = 180^\circ$$

$$\text{d. h. für } z = \frac{7}{8} l - \frac{lW}{4\pi} \text{ und } \frac{3}{8} l - \frac{lW}{4\pi}$$

b. Kreise

$$\text{für } z = l - \frac{lW}{4\pi}; \frac{1}{4} l - \frac{lW}{4\pi}; \frac{1}{2} l - \frac{lW}{4\pi}; \frac{3}{4} l - \frac{lW}{4\pi}$$

c. horizontale gerade Linien

$$\text{für } z = \frac{1}{8} l - \frac{lW}{4\pi} \text{ und } \frac{5}{8} l - \frac{lW}{4\pi}$$

C. Auch hier wird man zweckmäfsig diejenige verticale Bahn, bei welcher für ein angenommenes W das kleinste z stattfindet, als *erste Verticale* bezeichnen, und dann auch den *Anfang einer Welle* durch Bestimmung des w dahin verlegen, wo in der ersten Verticale ein *größtes positives* y mit $x = 0$ zusammentrifft.

So hätte man z. B. für $W = 0$ die erste Verticale bei $z = \frac{3}{8} l$, indem man $\frac{1}{2} W + \frac{2\pi z}{l} + 45^\circ = 180^\circ$ setzte, und müßte nun, um ein *positives* Größtes für y zu erhalten, auch $\frac{1}{2} W + w = 180^\circ$ d. h. für den Anfang der Welle $w = 180^\circ$ nehmen.

D. Die Projectionen auf die Ebenen yz und xz sind dann wieder auch ganz dieselben, wie sie §. 14 gefunden wurden.

E. Auch der Lauf in der Bahn bleibt derselbe wie §. 14, rechtsläufig im ersten Viertel der Wellenlänge u. s. w.

F. Die auf der Bewegungsfläche beschriebenen Spiralen hängen hier von dem Zeichen von $\tan(\frac{1}{2} W + w)$ ab. Man hat also ganz so wie §. 14 und im Gegensatz gegen den in §. 16 behandelten Fall, eine *rechtsgewundene* Spirale im ersten und dritten Viertel der Weiterdrehung, eine *linksgewundene* in den beiden anderen Vierteln.

G. Beim *Rückwärtsdrehen* endlich, wo die Bahnen den entgegengesetzten Lauf annehmen, gehen auch die Spiralen in die symmetrischen von denen über, welche beim *Vorwärtsdrehen* stattfinden.

Es ist leicht zu übersehen, dafs hier die ursprüngliche willkürliche Annahme, dafs die rechtsgewundene Schraube auch die rechtsliegende sey, auf das Resultat ohne Einfluss ist, indem nur in dieser Annahme rückwärts gedreht zu werden braucht, um w , x und dann auch noch z zugleich im Zeichen ändern und somit die linksgewundene als rechtsliegende zu denken, wodurch sich also nichts ändert als der Sinn, in welchem die Spiralen gewunden sind.

§. 18.

Die in §. 16 und 17 vorgetragenen Sätze zeigen nun, daß *dieselbe Bewegungsfläche* welche in §. 15 festgestellt ist, in *allen* Fällen stattfindet, wo congruente Schrauben entgegenlaufend oder symmetrische gleichlaufend sind, und daß sie immer *unverändert* bleibt, wie sich auch die ursprüngliche Annahme über die Lage der Hauptradien der Anfangskreise ändern möge; daß sodann auf dieser Bewegungsfläche auch immer *dieselben Bahnen* und zwar in *derselben Reihenfolge* beschrieben werden, nur nach den Umständen an verschiedenen Punkten der Axe der z anfangend; daß endlich die einzige Verschiedenheit zwischen den einzelnen Fällen dieser zweiten Wellenbewegung nur in dem Rechts- oder Linksgewundenseyn der Spiralen bestehen kann.

Die *Umsetzung* dieser zweiten in §. 14 bis 17 betrachteten Bewegung in die §. 10 bis 14 betrachtete Polarisationsbewegung erfolgt durch Umkehrung der Drehung von *einer* der beiden Schrauben in die entgegengesetzte. Dabei können aber aus der zweiten Bewegung alle möglichen Polarisationsbewegungen entstehen, während umgekehrt aus allen möglichen Polarisationsbewegungen nur eine und dieselbe zweite Bewegung entsteht.

Der Apparat, welcher diese Bewegungen versinnlicht, hat drei parallele horizontale Schrauben, welche zwischen sich auf je einer Wellenlänge 16 Dreiecke tragen, deren in jedem Zwischenraume 28 liegen. Die mittlere Schraube, welche mit einer Kurbel versehen ist, ist eine rechtsgewundene, die rechtsliegende ist dann gleichfalls rechtsgewunden, die linksliegende linksgewunden. Eine vierte Schraube noch anzubringen, um auch zwei linksgewundene zusammenwirken zu lassen, schien nicht zweckmäfsig, da nach dem Obigen keine neue Gattung von Bewegungen daraus entstehen kann.

Alle drei Schrauben sind mit Zahnrädern von gleicher Anzahl von Zähnen und überdies die beiden äufseren mit

einer Kreistheilung versehen um die W nach Bedürfnis einzustellen und die w zu messen.

Zwischen je zwei Zahnrädern liegen nun verschiebbare Wechselplatten, welche einerseits ein Wechselrad von $2n$ Zähnen und andererseits zwei Wechselräder von n und $n+1$ Zähnen tragen. Diese Einrichtung gestattet also, durch Verschieben oder Zurückschieben der Wechselplatten, die Schrauben nach Belieben gleichlaufend oder gegenlaufend zu machen.

Die Dreiecke, welche auf den Schrauben ruhen, tragen nun zuvörderst auf ihren nach außen liegenden Spitzen eine Reihe von kleinen Kugeln auf Stiften von gleicher Länge.

Sollen diese Kugeln die *Polarisationsbewegungen* darstellen, so ist rechts das eine Wechselrad, links aber sind zwei Wechselräder einzuschalten, was durch Ziffern auf den Zeigern angedeutet ist. Jede verlangte Polarisation kann nun leicht dargestellt werden, wenn man das W , welches die Form der Ellipse bestimmt, nach (12) oder (16) berechnet und einstellt. Um aber auch ohne vorgängige Rechnung die vorzüglichsten Formen einstellen zu können, sind neben den Kreistheilungen die acht Hauptfiguren eingravirt, z. B. rechtläufige hohe Ellipse, rechtläufiger Kreis, rechtläufige breite Ellipse u. s. w.

Um die *zweite Bewegung* zu erhalten, braucht man dann nur eine Abänderung mit den Wechselrädern vorzunehmen, also rechts zwei Wechselräder, links ein Wechselrad einzuschalten, und ist, weil hier immer dieselbe Art von Bewegung entsteht, das W mag angenommen seyn wie es will, nur in dem einzigen Fall etwas zu rechnen, wo man auf ein *bestimmtes* z gerade die erste Verticale verlegen will.

Jede Dreiecksreihe trägt nun auf ihren nach innen liegenden Spitzen noch eine zweite Reihe von Stiften mit Kugeln, welche eine gemeinschaftliche Reihe von doppelter Anzahl über der mittleren Schraube bilden, und dazu bestimmt sind, die *Combinationen* je zweier Bewegungen vor-

zustellen. Sollen beide *Polarisationsbewegungen* seyn, so werden dieselben unmittelbar durch Einstellen der betreffenden Figuren hervorgebracht. Bei der *zweiten Wellenbewegung* ist sodann nur zu beachten, daß man, wenn die rechtsliegende Schraube nach der obigen, immer vorausgestellten, Voraussetzung auch rechtlaufend seyn soll, die mittlere rückwärts drehen muß, also in dem linken System dann eine rückläufige Bewegung hervorgebracht wird. Bei Combination einer Polarisationsbewegung mit einer zweiten Bewegung wird man also am bequemsten die erste im rechtsliegenden System hervorbringen und die letztere dann auch durch Rechtsdrehen der Kurbel gleich rechtläufig mit erhalten.

Um die Bewegungen auch abgesondert erhalten, und sie fortwährend mit der Ruhelage vergleichen zu können, sind zwischen den Schrauben noch vier *Kämme* angebracht, welche durch das Aufheben je *zweier* Hebelpaare die Dreiecke von ihren Schrauben ganz abheben, und alle Kugeln in gerade Linie bringen.

Hebt man aber bei einem Dreieckssystem nur *einen* Kamm, so streift die eine Kathete des Dreiecks auf demselben hin und her, während die andere von ihrer Schraube getrieben wird. Es entstehen auf diese Weise geradlinige Polarisationen mit den Excursionsweiten e , welche unter 45° gegen die Abscissenlinie geneigt sind, indem die unter 45° geneigte Ebene nach §. 9 von lauter tangirenden Perpendikeln getroffen wird.

Eine ähnliche, nicht mehr zu dem Obigen gehörende, aber doch nahe damit zusammenhängende, Bewegung erhält man dadurch, daß man eine oder die andere Schraube ganz *in Stillstand setzt*, während die Dreiecke mittelst der anderen allein bewegt werden. Mechanisch wird dieser Stillstand bei den beiden äußeren Schrauben dadurch bewirkt, daß man die zugehörigen Wechselplatten ganz ausrückt und dagegen die Umdrehungs-Axen durch eine Seitenschraube feststellt. Die mittlere Schraube kann dagegen

von ihrem Zahnrad durch Ausziehen eines Stiftes abgelöst und gleichfalls durch eine Seitenschraube festgestellt werden. Eine wieder eingerückte Wechselplatte macht dann, daß eine freie äußere Schraube umläuft, während die mittlere ruht.

Die Bewegung, welche auf diese Weise entsteht und einen Uebergang zwischen der Polarisationsbewegung und der zweiten Bewegung bildet, hat Eigenschaften, die denen Beider analog sind. Vorbehaltlich sie gelegentlich specieller zu behandeln, genüge es hier zu bemerken, daß sie vorgeht auf einer Cylinderfläche, deren Seiten der einen Kathete des Dreiecks parallel sind, während die Grundlinie eine unveränderliche Wellenlinie von der Excursionsweite e in einer der zweiten Kathete parallelen Ebene bildet. Die Projectionen auf die unter 45° gegen den Horizont geneigten Ebenen geben einerseits die unveränderliche Welle der Grundlinie wieder, andererseits aber laufende Wellen mit der Excursionsweite e . Die Projection auf xy endlich stellt die veränderliche Ellipse der zweiten Bewegung dar, jedoch mit einer doppelt so langen Periode der Wiederkehr.

Marburg den 15. Julius 1858.