VIII. *Bestimmung der Elasticitätsconstanten
von Beryll und Bergkrystall;
von W. Voigt.*

(Aus Nr. 3 des Jahrgangs 1886 der Gött. Nachr. auszugsweise mitgetheilt
vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 14–15.)

Einleitung.

Die Beobachtungen, welche ich im Folgenden mittheile, zerfallen in drei Theile: die Bestimmung der Dimensionen der benutzten Krystallstäbchen, die Messung ihrer Biegungen und die ihrer Drillungen bei bekannter mechanischer Einwirkung.

Die Dicken und Breiten wurden mittelst eines Sphärometers beobachtet, welches analog den gewöhnlichen von Hermann und Pfister in Bern gefertigten construiert war, mit dem einzigen Unterschied, dass an Stelle der Wasserwage, deren Ausschlag die erfolgte Berührung des Messungsobjectes anzeigt, ein Hebel angebracht war, der in einem bestimmten Augenblicke die Schliessung eines Telephons unterbrach. So war es möglich, ohne eine feste Aufstellung zu arbeiten und die Beobachtung sehr wenig anstrengend zu machen.

Theoretisch wird die Messung mit dem Sphärometer von dem Drucke abhängig, mit welchem der obere bewegliche Theil des Sphärometers auf dem Messungsobject in dem Augenblicke lastet, wo die Wasserwage oder das Telephon das Signal gibt; denn jener auf die äusserst kleine Berührungsstelle concentrirte Druck erzeugt daselbst eine Vertiefung, welche je nach der Elasticität der gedrückten Substanz eine verschiedene Grösse besitzt und einen Fehler der Messung verursacht, wenn die Elasticität der Substanz sich von derjenigen des stählernen Tellers des Sphärometers unterscheidet.

Es wurde durch besondere Beobachtungen constatirt, dass der hierdurch entstehende Fehler innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler blieb.

Bei den Messungen der Dimensionen wurden die Krystallstäbchen längs eines auf dem Tischchen des Sphärometers

befestigten, in Millimeter getheilten Lineals hingeschoben, um die Messungen in constanten Entfernungen von den Kanten und in gleich weit voneinander abstehenden $(n + 1)$ -Punkten vorzunehmen. Bei den Dickemessungen wurden zwei Beobachtungsreihen bei feststehendem Lineal nächst der Mittellinie des Stäbchens angestellt und zwischen ihnen das Stäbchen um die Längsrichtung gedreht. Das Mittel aus beiden gibt dann sehr nahe die Dicken in der Mittellinie selbst; zwei andere Reihen von Messungen wurden in $\frac{1}{6}$ der Breite Abstand von den Seitenkanten gemacht.

Das Mittel der vier auf einen Querschnitt bezüglichen Messungen ist als mittlere Dicke des Querschnittes selbst betrachtet. Diese Zahlen stellen sich sehr genau durch die Formel dar:

$$(1) \quad D = D_0 + D_1 x + D_2 x^2;$$

es ist daher angenommen, dass dies das wahre Gesetz der Dicke ist, und die Berechnung demgemäss angestellt.

Die Theorie ergibt, dass dann bei den Biegungsbeobachtungen eine mittlere Dicke (D) in Rechnung zu ziehen ist, gegeben durch:

$$(2) \quad (D) = D_0 + \frac{L^2}{40} \left(D_2 - \frac{2D_1^2}{D_0} \right),$$

hingegen bei der Drillung der arithmetische Mittelwerth aller Messungen.

Die Beobachtungen der Breiten sind auf den Mitten der Schmalseiten angestellt in zwei entgegengesetzten Lagen der Stäbchen. Bei den Bergkrystallstäbchen variirten die Breiten theilweise erheblich; sie sind daher für diese ebenfalls nach der Formel:

$$(3) \quad B = B_0 + B_1 x + B_2 x^2$$

berechnet wie die Dicken. Bei den Biegungen ist dann die in Rechnung zu ziehende Breite (B) gegeben durch:

$$(4) \quad (B) = B_0 + \frac{L^2}{40} \left(B_2 - \frac{B_1^2}{B_0} \right),$$

bei der Drillung wiederum durch den Mittelwerth.

Die Biegungen der Stäbchen habe ich mittelst eines neuen Apparates beobachtet, der hauptsächlich construirt

wurde, um das sehr anstrengende Messen von Grössen, die nur wenige Hundertmillimeter betragen, mit dem Mikrometermikroskop zu umgehen, und um Beobachtungen bei wechselnder Temperatur anstellen zu können.¹⁾

Das Stäbchen liegt, wie gewöhnlich, auf zwei Schneiden; die Belastung greift auf einem kleinen Stahlcylinder an, der quer über die Mitte des Stäbchens hinweggelegt wird; durch ein doppeltes Gelenk wird vermieden, dass die Belastung ein Drehmoment um die Längsaxe des Stäbchens ausübt.

Etwa 10 cm über dem Stäbchen befinden sich zwei sehr leicht gearbeitete, parallele, horizontale Stahlaxen, die sich zwischen Spitzen drehen und je eine kleine Rolle und einen Planspiegel tragen. Ein ganz feiner Platindraht ist mit seiner Mitte in eine flache Rinne des eben erwähnten Stahlcylinders gelegt, sodass er fast genau auf dem Stäbchen aufliegt, und schlingt sich mit seinen beiden Enden um jene Röllchen; kleine Gewichte von circa 8 g an beiden Enden spannen ihn straff. Bei einer Biegung des Stäbchens senkt sich also der kleine Stahlcylinder, der Platindraht wird herabgezogen, die Röllchen drehen sich ein wenig; diese Drehung wird an den Spiegeln mit Fernrohr und Scala abgelesen und gibt das Maass der erfolgten Biegung.

Beide Spiegel drehen sich in entgegengesetzter Richtung; dadurch wird jede Verschiebung oder Erschütterung des ganzen Apparates oder des Fernrohres mit Scala unschädlich, wenn man die Summe der an beiden Spiegeln beobachteten Drehungen der Rechnung zu Grunde legt.

Die Reibung der Spiegelaxen in den Spitzen ist sehr gering und constant, da stets derselbe Druck auf sie ausgeübt wird. Man kann sie fast vollständig zum Verschwinden bringen, wenn man bei jeder Ablesung den ganzen Apparat durch leise Schläge an den ihn tragenden Wandtisch er-

1) Den sinnreichen Apparat von Koch (Wied. Ann. 5. p. 251. 1878) habe ich deshalb nicht benutzt, weil ich es zum Theil mit so grossen Biegungen zu thun hatte, dass die Beobachtung auf bequemere Weise möglich war, und weil für die Messung der Drillungen die Einrichtung zur Ablesung mit Fernrohr und Scala einmal getroffen und sogleich zu benutzen war.

schüttet; indess habe ich es praktischer gefunden, die Reibung dadurch zu eliminiren, dass ich, unter möglichster Vermeidung von Erschütterungen, bei der Belastung zunächst den gewünschten Werth etwas überschritt und die definitive Stellung durch Entlastung erreichte, also die Einstellung bei Belastung und Entlastung von höheren Zahlen her vornahm. Die Differenz beider Ablesungen ist von der Reibung frei, wenn diese als constant an beiden Stellen angesehen werden kann. Hierfür ergab sich die Prüfung dadurch, dass man eine beliebige Einstellung erst von grösseren, dann von kleineren Zahlen aus vornahm; die dann stattfindende Differenz ist direct die Wirkung der Reibung. Sie wechselte von Tag zu Tag etwas an Grösse, vielleicht infolge der Schwankungen der Temperatur, hielt sich aber während einer Beobachtungsreihe merklich constant.

Die Temperatur wirkt auf die Ablesung an dem Apparat nicht, wenn sie nur in der Zeit von Belastung bis Entlastung constant bleibt.

Die Auswerthung seiner Angaben geschah direct dadurch, dass zwei recht grosse Biegungen bei möglichst gleichen Umständen an demselben Apparat erst mit dem Mikrometernmikroskop, dann mit Fernrohr und Scala bestimmt wurden.

Die Biegungen η sind im Folgenden in Millimetern (μ) der Beobachtungsscala angegeben und bei jeder Reihe bemerkt (da dieselben unter verschiedenen Umständen beobachtet sind), welcher Bruchtheil eines Millimeters dieser Grösse entspricht.

Die direct beobachteten Biegungen sind noch mit einem Fehler behaftet, der von der Eindrückung der messingenen Lagerschneiden durch die Belastung herrührt. Da die Einrichtung des Apparates sehr dicke Stäbe aufzulegen nicht gestattete, bei welchen die Biegung unmerklich gewesen wäre, und die Beobachtung jenen Fehler fast rein ergeben hätte, so habe ich einmal dasselbe Stäbchen in sehr verschiedenen Längen beobachtet und durch die Combination den Fehler bestimmt, ferner aber auch durch einen kleinen Hilfsapparat die Belastung nicht auf die Mitte des Stäbchens, sondern

direct auf seine unterstützten Enden wirken lassen und dadurch die Eindrückung der Lager rein erhalten. Hierbei ergab sich, dass keine merkliche Zusammendrückung der ganzen Unterlage, sondern nur eine Eindrückung des direct unter den Stäbchen liegenden Theiles der Schneide stattfand. Diese oft wiederholten Beobachtungen ergaben keine sehr gute Uebereinstimmung, sondern wichen bis zu $1''$ der Scala voneinander ab, was wahrscheinlich in der Unregelmässigkeit der Lagerschneiden, sowie der Oberfläche der Stäbchen seinen Grund hat.

Der jeder Beobachtung entsprechende Werth der Eindrückung, der mit der Substanz der Stäbchen und Lagerschneiden, mit der Breite der Stäbchen und der Grösse der Belastung variirte, ist in den folgenden Tafeln unter η' angegeben und von der direct beobachteten Biegung η in Abzug zu bringen.

Die Durchdrückung der Lagerschneiden halte ich für eine der unangenehmsten Fehlerquellen bei den Biegebearbeitungen an sehr kurzen Stäbchen und kenne kein Mittel, sie mit voller Zuverlässigkeit zu eliminiren, da man nicht sicher sein kann, ob sie auf dasselbe Stäbchen nicht je nach dem verschiedenen Auflagen verschieden wirken kann.

Die Drillungen wurden mittelst des an anderer Stelle beschriebenen¹⁾ Torsionsapparates beobachtet. Hier war die Reibung in den Axen grösser, mit der Belastung und auch mit der Stellung der Rollen variabel; es war also nicht angingig, in derselben einfachen Weise, wie bei den Biegungen zu verfahren, sondern es musste das complicirtere, früher²⁾ beschriebene Verfahren zur Elimination angewandt werden, darin bestehend, dass die Stellung während der Belastung durch das Mittel aus zwei Einstellungen bestimmt wurde, die ein Mal von grösseren, das andere Mal um ebenso viel von kleineren Belastungen her erreicht wurden. Die Stellung im entlasteten Zustande wurde durch die Ablesung nur bis auf einen constanten Fehler, die hier, als am selben Ort und bei derselben Belastung, constante Reibung, bestimmt und dieser

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 185. 1875.

2) W. Voigt, l. c. p. 189.

unbekannte Fehler durch die Combination mehrerer Beobachtungen mit verschiedenen Belastungen eliminirt. Als kleinste Belastung wurde die je nach Umständen passend beschwerte Wagschale benutzt; ihr Gewicht G ist gleichfalls als unbekannt beibehalten, da es bei der Elimination des genannten Fehlers von selbst herausfällt. Die einer Belastung P entsprechende Drehung, gemessen durch die Differenz der Bewegungen der um L voneinander entfernt auf dem Stäbchen befestigten Spiegel ist nach angebrachter Reduction von der Tangente auf den Bogen unter σ_P angegeben; ϱ ist die an dem beweglichen Spiegel beobachtete Grösse der Reibung, d. h. die Differenz der von oben und von unten erhaltenen Einstellung. Die Scala befand sich in zwei Perioden um $A=5163$, resp. 5176 mm von den Spiegeln entfernt; ihre Angaben mussten corrigirt werden, da die Vergleichung mit dem Normalmeter die Scala als beim Aufkleben zwar gleichmässig, aber bedeutend gedehnt erwies. $1''$ der Scala fand sich um:

0,00374 mm zu lang.

Die mittlere Länge des Hebelarmes, an welchem die drillende Kraft wirkte, betrug:

36,79 mm.

Bei allen Beobachtungen hat mir Hr. Dr. Hennig vielfache Hülfe geleistet.

I. Beryll.

1. Formeln für das hexagonale System.

Was die Berechnung der Elasticitätsconstanten aus den Beobachtungen betrifft, so definiren wir dieselben für das hexagonale System unter der Voraussetzung, dass die Z -Coordinatenaxe in die krystallographische Hauptaxe, die X -in eine Nebenaxe fällt, durch die Formeln:

$$(5) \quad \begin{cases} -X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z, & -Y_z = c_{44}y_z, \\ -Y_y = c_{12}x_x + c_{11}y_y + c_{13}z_z, & -Z_x = c_{44}z_x, \\ -Z_z = c_{13}x_x + c_{13}y_y + c_{33}z_z, & -X_y = \frac{c_{11}-c_{12}}{2}x_y. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit:

$$(6) \quad S = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems Coëfficienten c_{hk} und mit S_{hk} den Coëfficienten des h . Elementes der k . Reihe dieser Determinante (oder umgekehrt), so gelten die Relationen:

$$S_{11} = S_{22}, \quad S_{13} = S_{23}, \quad S_{44} = S_{55}, \quad S_{66} = 2(S_{11} - S_{12});$$

sämmtliche S_{hk} für die $h \leq k$ und $h + k \geq 5$ verschwinden mit Ausnahme von S_{23} .

In diesen Grössen gibt sich der Coëfficient der linearen Dilatation E in einer durch die Richtungscosinus α, β, γ gegen dies Coordinatensystem gegebenen Richtung durch die Formel:

$$(7) \quad SE = S_{11}(1 - \gamma^2)^2 + S_{33}\gamma^4 + (S_{44} + 2S_{13})\gamma^2(1 - \gamma^2);$$

derselbe ist also rings um die krystallographische Hauptaxe constant.

Von dem reciproken Werthe $1/E = E$, den man gewöhnlich den Elasticitätscoëfficienten nennt, hängt dann die Biegung eines rechtwinkligen Prismas von der Länge L , Breite B , Dicke D nach der Formel ab:

$$(8) \quad \eta = \frac{PL^3}{4ED^3B} = E \frac{PL^3}{4D^3B}.$$

Ist das Stäbchen nach den Gesetzen (1) und (3) von der prismatischen Form abweichend, so sind hier die Werthe (D) und (B) nach (2) und (4) einzusetzen.

Die Drillung eines rechteckigen Prismas hängt nicht durch einen einzigen Coëfficienten mit den Elasticitätsconstanten zusammen. Dieselben üben ihren grössten Einfluss auf jene indessen durch einen constanten Factor, den man als Coëfficienten der Drillung T bezeichnen kann, welcher wieder durch die Relation $1/T = T$ mit dem gewöhnlichen Torsionscoëfficienten zusammenhängt.

Dieser Coëfficient der Drillung ist in den obigen Grössen bestimmt durch die Relation:

(9) $ST = S_{44} + (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44})\gamma_2^2 + 4(S_{11} + S_{33} - S_{44} - 2S_{13})\gamma^2\gamma_1^2$,
 worin γ , γ_1 , γ_2 , resp. die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Drillungsaxe, die grössere und die kleinere Querdimension mit der krystallographischen Hauptaxe bilden; T ist also wie E rings um die Hauptaxe constant.

Sind diese sämmtlichen drei Richtungen krystallographische Symmetriemaxen, d. h. Normale zu Symmetrieebenen, so bestimmt sich der Drillungswinkel τ , der bei der Wirkung eines Drehungsmomentes N auftritt, aus der Formel:

$$(10) \quad \tau = \frac{3LN}{TD^3B \left(1 - \frac{3}{16}\lambda \frac{D}{B} \sqrt{\frac{T}{T'}}\right)}.$$

Hierin ist T' der Werth, welcher aus T wird durch Vertauschung von γ_1 und γ_2 , λ eine complicirte Function des Argumentes $D/B \cdot \sqrt{T/T'}$, welche indess für Werthe desselben, die $1/3$ nicht übersteigen, merklich constant gleich 3,361 ist.

Ist der gedrillte Körper nicht streng prismatisch, so hat man an Stelle von D und B in der vorstehenden Formel (10) einfach das arithmetische Mittel der Dicken und Breiten auf dem beobachteten Längsstück einzuführen.

Die im Folgenden beobachteten Stäbchen sind folgender massen gegen die Krystallaxen orientirt.

Die mit (0°) bezeichnete Gattung fällt mit der Längsrichtung in die krystallographische Hauptaxe. Die Lage der Querrichtungen ist hier ohne Einfluss. Es entspricht dieser Gattung der Werth:

$$(11) \quad SE_0 = S_{33}, \quad ST_0 = S_{44}.$$

Die mit (45°) bezeichnete Gattung liegt mit der Längsrichtung um 45° gegen die Hauptaxe geneigt, die kleinere Querdimension fällt in den Hauptschnitt. Demgemäss ist:

$$(12) \quad SE_{45} = \frac{1}{4}(S_{11} + S_{33} + S_{44} + 2S_{13}).$$

Die mit (90°) bezeichneten Stäbchen liegen mit der Längsrichtung normal zur Hauptaxe; je nachdem die Bezeichnung A oder B zugefügt ist, liegt die kleinere oder die grössere Querdimension parallel der Hauptaxe. Es gilt dann für A und B :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & SE_{90} = S_{11}, \\ \text{für } A: & ST_{90} = 2(S_{11} - S_{12}), \\ & \text{für } B: \quad ST'_{90} = S_{44}. \end{array} \right.$$

Die Beobachtung der Drilling an der Gattung (90°) *B* gibt also keinen anderen Coëfficienten, als die der Gattung (0°), indessen genügen auch die anderen fünf Bestimmungen zur Berechnung aller Constanten c_{hk} , deren Anzahl ja höchstens fünf ist und sich, wenn die Voraussetzung zutrifft, dass die Molecüle nach allen Richtungen hin in gleicher Weise aufeinander einwirken, gar auf drei reducirt.

In dem letzteren Falle gelten nämlich nach Poisson's Rechnung¹⁾ die Relationen:

$$(14) \quad c_{13} = c_{44}, \quad c_{12} = \frac{c_{11} - c_{13}}{2} \text{ d. h. } c_{11} = 3c_{12}.$$

Zur Berechnung der allgemeinsten fünf Elasticitätsconstanten c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} aus den fünf Determinantenverhältnissen:

$$\frac{S_{11}}{S} = s_{11}, \quad \frac{S_{12}}{S} = s_{12}, \quad \frac{S_{13}}{S} = s_{13}, \quad \frac{S_{33}}{S} = s_{33}, \quad \frac{S_{44}}{S} = s_{44}$$

hat man die folgenden fünf Gleichungen:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } c_{11}s_{11} + c_{12}s_{12} + c_{13}s_{13} = 1, \\ \text{b) } c_{12}s_{11} + c_{11}s_{12} + c_{13}s_{13} = 0, \\ \text{c) } 2c_{13}s_{13} + c_{33}s_{33} = 1, \\ \text{d) } c_{12}(s_{11} + s_{12}) + c_{33}s_{13} = 0, \\ \text{e) } c_{44}s_{44} = 1. \end{array} \right.$$

Aus Gleichung c) und d) folgt:

1) Ich bin früher der Meinung gewesen und habe mich in meiner ersten Arbeit über Krystallelasticität demgemäss ausgesprochen (Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 3. 1875), dass diese und ähnliche Relationen Folgen der allgemeinsten Theorie seien, welche Poisson für die Elasticität von Krystallen gegeben hat. Auch die von Hrn. O. E. Meyer besorgte Ausgabe der Vorlesungen des Hrn. Geh. Rath F. E. Neumann über Elasticität begünstigt diese Auffassung — wie ich erfahren habe, gegen die Absicht des Herausgebers. Indessen hat Poisson in seiner letzten, unvollendeten Arbeit (Mém. de l'Ac. 18. p. 3. 1842) von der Hypothese ausgehend, dass die Molecüle nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Stärke wirken, allgemeinere Formeln, wenschon nicht für alle Krystallsysteme, entwickelt, welche jene Relationen zwischen den Elasticitätsconstanten nicht ergeben.

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \left\{ \begin{aligned} c_{13} &= \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, & c_{33} &= \frac{s_{11} + s_{12}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, \\ & \text{das erstere in a) und b) gesetzt, gestattet zu be-} \\ & \text{stimmen:} \\ c_{11} &= \frac{s_{11}s_{33} - s_{13}^2}{(s_{11} - s_{12})(s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2)}, \\ c_{12} &= \frac{s_{13}^2 - s_{12}s_{33}}{(s_{11} - s_{12})(s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2)}, \\ & \text{endlich gibt c) direct:} \\ c_{44} &= \frac{1}{s_{44}}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dabei ist nach Obigem:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} s_{11} &= E_{90}, & s_{12} &= E_{90} - \frac{1}{2}T_{90}, & s_{13} &= 2E_{45} - \frac{1}{2}(E_{90} + E_0 + T_0), \\ & s_{33} &= E_0, & s_{44} &= T_0. \end{aligned} \right.$$

Diese Determinantenverhältnisse s_{hk} bestimmen nicht nur Dehnung und Drillung, sondern auch andere elastische Deformation in viel einfacherer Weise als die eigentlichen Elasticitätsconstanten.

Setzt man ein beliebiges Stück eines hexagonalen Krystalles einem allseitig gleichen Drucke p aus, so nehmen die Dilatationen parallel den Hauptaxen x_x, y_y, z_z und die Aenderungen der Winkel zwischen den Axen y_z, z_x, x_y die folgenden Werthe an:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} x_x &= -p(s_{11} + s_{12} + s_{13}) = y_y, \\ z_z &= -p(2s_{13} + s_{33}), \\ y_z = z_x = x_y &= 0. \end{aligned} \right.$$

Die Coëfficienten von p in den Formeln für x_x, y_y und z_z wird man als Compressionscoëfficienten bei allseitigem Druck normal und parallel zur Hauptaxe besonders bezeichnen können; wir setzen:

$$(19) \quad A_{90} = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \quad A_0 = 2s_{13} + s_{33}.$$

Der Coëfficient der cubischen Compression ist dann:

$$(20) \quad M = A_0 + 2A_{90} = s_{33} + 2(s_{11} + s_{12}) + 4s_{13}.$$

Zwei Ebenen, deren Normalen die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gegen die Hauptaxen haben und miteinander den Winkel χ einschliessen, erleiden bei allseitig

gleichem Drucke p eine Aenderung dieses Winkels $\delta\chi$, die gegeben ist durch:

$$(21) \quad \delta\chi \cdot \sin\chi = -p(s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{12})(2\gamma_1\gamma_2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\cos\chi).$$

Sie hängt also nur von dem einen Coëfficienten:

$$B = s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{12} \quad \text{ab.}$$

War der Winkel χ ein rechter, so folgt einfacher:

$$(22) \quad \delta\chi = -p2B\gamma_1\gamma_2.$$

$\delta\chi$ ist dann also $= 0$, wenn eine der beiden Normalen senkrecht zur Hauptaxe liegt, ein Maximum findet statt, wenn beide 45° mit der Hauptaxe einschliessen; dies Maximum ist $= -pB$.

Lässt man auf einen mit seiner Axe der Hauptaxe des Krystalls parallel gelegten Cylinder von beliebigem Querschnitt auf die Grundflächen den normalen Druck p_0 , auf die Mantelfläche den normalen (constanten) Druck p_1 wirken, so erhält man:

$$(23) \quad \begin{cases} x_x = -(p_1(s_{11} + s_{12}) + p_0s_{13}) = y_y, \\ z_z = -(p_12s_{13} + p_0s_{33}), \\ y_y = z_x = x_y = 0. \end{cases}$$

Erwärmt man einen hexagonalen Krystall gleichförmig um ϑ Grade, so gilt:

$$(24) \quad \begin{cases} x_x = +\vartheta(q_1(s_{11} + s_{12}) + q_0s_{13}) = y_y, \\ z_z = +\vartheta(q_12s_{13} + q_0s_{33}), \\ y_y = z_x = x_y = 0. \end{cases}$$

Hierin geben die q_0 und q_1 das Maass der Wärmeabstossung parallel und senkrecht der Hauptaxe. Kennt man die Grösse der thermischen lineären Dilatation parallel und senkrecht zur Hauptaxe α_0 und α_1 , und sind die s_{hk} durch Elasticitätsbeobachtungen bestimmt, so folgen aus:

$$(25) \quad \alpha_0 = q_12s_{13} + q_0s_{33}, \quad \alpha_1 = q_1(s_{11} + s_{12}) + q_0s_{13}$$

die Werthe q_0 und q_1 für die betreffende Substanz. Fänden sich dieselben einander gleich, so würde die Wärmeabstossung nach allen Richtungen die gleiche und die durch eine gleichförmige Abkühlung hervorgebrachte Deformation der durch einen allseitig gleichen Druck erzeugten vollständig gleich sein.

2. Beobachtungen am Beryll.

Das Beobachtungsmaterial lieferte ein prachtvolles säulenförmiges Fragment eines grossen Krystalles aus dem Ural, welches parallel der Hauptaxe circa 50 mm, parallel den Nebenaxen circa 20 mm mass. Ich verdanke dasselbe meinem verehrten Collegen Prof. C. Klein und benutze die Gelegenheit, um ihm für die grossartige Liberalität, mit welcher er dies dem Mineralogen höchst werthvolle Stück der physikalischen Untersuchung geopfert hat, den allerwärmsten Dank auszusprechen.

Der Beryll ist ein so besonders günstiges, ja unvergleichliches Object für Elasticitätsbeobachtungen, weil er nur in holoëdrischen Formen und nie verzwillingt beobachtet ist, also mit Sicherheit als Repräsentant des einfachen hexagonalen Systems hingestellt werden kann.

Das schöne Krystallfragment, welches ich benutzen durfte, war von fast regelmässig sechsseitigem Querschnitt, auf den Flächen wie gewöhnlich parallel der Hauptaxe gestreift. Dieser Streifung entsprachen im Innern zahlreiche röhrenartige mehr oder weniger feine Längsspalten, welche bei der Zerlegung des Krystalles in Stäbchen sorgfältig vermieden werden mussten. Um dies leichter zu können, wurden soviel als möglich die Breitseiten der Stäbchen parallel der Hauptaxe gelegt; offenbar war dadurch die Möglichkeit vergrössert, störungsfreie Präparate zu erzielen. Wie aus dem Vorstehenden sich ergibt, war indessen zur Bestimmung aller Constanten die Beobachtung der Drillung von Stäben, deren Längs- und Breitenrichtungen senkrecht zur Hauptaxe lagen (Gattung $90^\circ A$), nicht zu umgehen; diese Gattung zeigte demgemäss die zahlreichsten kleinen, die Stäbchen ganz durchsetzenden Sprünge, und eine ziemliche Anzahl ist bei der Herstellung, bei der Einspannung und schliesslich noch bei der Drillung bei mässigen Belastungen zerbrochen. Die erst bei den Beobachtungen gesprungenen ergaben unverhältnissmässig kleine Werthe der Torsionsconstanten T (d. h. geringen Widerstand gegen die Torsion) und durften, da offenbar eben jene Sprünge die Ursache der Abweichung waren, von der Schlussberech-

nung ausgeschlossen werden. Bei dieser unangenehmen Eigenschaft jener Gattung Stäbchen mussten schliesslich alle sprungfreien kurzen Stückchen ausgenutzt werden, und durch einige Vorsicht sind noch bei Längen von nur etwa 10 mm gute und sichere Resultate erreicht worden, wenn gleich natürlich den ungünstigeren Umständen entsprechend der wahrscheinliche Fehler der Endresultate hier grösser ist, als bei den übrigen Gattungen.

Da die klar ausgeprägte Krystallform des Berylls die Bestimmung der Orientirung der Stäbchen noch weiter durchzuführen gestattete, als nach ihrem optischen Verhalten allein möglich gewesen wäre, so habe ich die günstige Gelegenheit benutzt, um ausser der Bestimmung der Constanten auch noch eine andere Aufgabe zu lösen.

Die Theorie ergibt, wie ich schon früher gezeigt habe¹⁾, das Resultat, dass bei holoëdrischen hexagonalen Krystallen Richtungen, die durch Drehung um die Hauptaxe zur Deckung gebracht werden können, elastisch gleichwerthig sind. Dieses mit dem mineralogischen Verhalten des Systems in so eigenenthümlichem Widerspruch stehende Resultat konnte am Beryll geprüft werden. Die zunächst für die Biegungsbeobachtungen bestimmten Stäbchen normal zur Hauptaxe, welche, wie oben ausgeführt, ihre Breitenseiten parallel der Hauptaxe hatten, sind zum Theil so geschnitten, dass die Längsrichtung in eine krystallographische Nebenaxe (Gattung 90° B I) fällt, zum Theil so, dass sie den Winkel zwischen zweien halbirt (Gattung 90° B II). Die hiermit angestellten Beobachtungen sind unten mitgetheilt.

Ferner ergibt die Theorie das Resultat, dass die Torsionscoëfficienten der beiden Gattungen 90° B I und II nicht nur untereinander, sondern auch mit dem an der Gattung 0° erhaltenen übereinstimmen sollen; auch dieser Punkt liess sich durch die Beobachtung prüfen.

Im Folgenden sind nur die letzten Beobachtungsergebnisse mitgetheilt; hinsichtlich des Details der Messungen muss auf die Originalbeobachtungstabellen verwiesen werden. Die Be-

1) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 408, 421 u. 427. 1882.

zeichnung ist im wesentlichen in der Einleitung erklärt; hier sei nur wiederholt, dass L , B , D die in Formel (8) und (10) einzusetzende Länge, Breite und Dicke des Stäbchens bezeichnen. Die Einheiten von L sind Millimeter, die von B und D $1/992,7$ mm, von η 0,000 249 mm. P ist die Belastung in Grammen, ϑ die Beobachtungstemperatur in Celsius-Graden; A bezeichnet bei den Drillungsbeobachtungen den Abstand zwischen Spiegeln und Beobachtungsscala; E ist der Dehnungscoefficient nach Formel (7). T der Drillungscoefficient nach (9); $E = 1/\epsilon$ und $T = 1/T$; die Einheiten sind Gramm und Millimeter.

Biegungen.

0° Nr. 1.	$L = 34,4$	$B = 4036$	$D = 516,0$	$P = 60$	$\vartheta = 16,5$	$\eta' = 3,0$	$E = 21\,670\,000$
			$\eta = 201,2$				
Nr. 2.	$L = 34,4$	$B = 4026,5$	$D = 516,8$	$P = 60$	$\vartheta = 17$	$\eta' = 3,0$	$E = 21\,710\,000$
			$\eta = 200,4$				
Nr. 3.	$L = 34,4$	$B = 4033$	$D = 511,6$	$P = 60$	$\vartheta = 16,1$	$\eta' = 3,0$	$E = 21\,820\,000$
			$\eta = 205,1$				
Nr. 4.	$L = 34,03$	$B = 3910$	$D = 526,3$	$P = 60$	$\vartheta = 18$	$\eta' = 2,4$	$E = 21\,580\,000$
			$\eta = 189,4$				
Nr. 5.	$L = 34,03$	$B = 3960$	$D = 513,4$	$P = 60$	$\vartheta = 19$	$\eta' = 2,4$	$E = 21\,470\,000$
			$\eta = 202,3$				
Gesamtmittel				$E_0 = 21\,650\,000$	$E_0 = 4,619 \cdot 10^{-8}$		
Wahrscheinlicher Fehler				± 40000	$\pm 0,0085$		
45° Nr. 1.	$L = 30,4$	$B = 3912$	$D = 536,2$	$P = 60$	$\vartheta = 16,5$	$\eta' = 3,0$	$E = 17\,700\,000$
			$\eta = 153,3$				
Nr. 2.	$L = 30,4$	$B = 3920$	$D = 524,5$	$P = 60$	$\vartheta = 18$	$\eta' = 3,0$	$E = 18\,020\,000$
			$\eta = 160,3$				
Nr. 3.	$L = 30,4$	$B = 3926,4$	$D = 511,5$	$P = 60$	$\vartheta = 18$	$\eta' = 3,0$	$E = 18\,130\,000$
			$\eta = 171,4$				
Nr. 4.	$L = 30,03$	$B = 3958$	$D = 525,1$	$P = 60$	$\vartheta = 18$	$\eta' = 2,4$	$E = 18\,010\,000$
			$\eta = 153,6$				
Gesamtmittel				$E_{45} = 17\,960\,000$	$E_{45} = 5,568 \cdot 10^{-8}$		
Wahrscheinlicher Fehler				± 62000	$\pm 0,019$		
90° B.I. Nr. 1.	$L = 22,35$	$B = 4067,7$	$D = 462,0$	$P = 60$	$\vartheta = 19$	$\eta' = 3,0$	$E = 23\,300\,000$
			$\eta = 72,9$				
Nr. 2.	$L = 18,4$	$B = 4076$	$D = 457,1$	$P = 70$	$\vartheta = 17,2$	$\eta' = 3,4$	$E = 22\,850\,000$
			$\eta = 52,2$				

Wegen der Belastung mit 70 g ist η' um 0,4 vergrößert.

90° B II. Nr. 1. $L = 22,4$, $B = 3897$, $D = 450,5$, $P = 60$, $\vartheta = 21,5$, $\eta' = 3,0$.
 $\eta = 87,3$ ($E = 21\,890\,000$.)

Nr. 2. $L = 22,4$, $B = 3901$, $D = 460,4$, $P = 60$, $\vartheta = 21,5$, $\eta' = 3,0$.
 $\eta = 77,4$ $E = 23\,210\,000$.

Nr. 3. $L = 20,4$, $B = 3895$, $D = 458,7$, $P = 60$, $\vartheta = 21,8$, $\eta' = 3,0$.
 $\eta = 60,2$ $E = 23\,100\,000$.

Das Stäbchen 90° B Nr. 1 war von der Seite her eingespungen; man bemerkt, wie dadurch der Werth von E herabgedrückt ist. Die bezügliche Beobachtung ist demgemäss von der Berechnung auszuschliessen.

Die übrigen Resultate zeigen die vollständigste Uebereinstimmung der Dehnungscoëfficienten E für die Gattungen 90° B I und II. Entsinnt man sich dessen, dass die erste parallel einer krystallographischen Nebenaxe, die letztere normal dazu (also in der Halbirungslinie des Winkels zweier Nebenaxen) liegt, so erweisen die vorstehenden Beobachtungen die Unterschiedslosigkeit dieser Richtungen in elastischer Hinsicht und bestätigen das bezügliche oben ausgesprochene Resultat der Theorie.

Man erhält für alle Stäbchen der Gattung 90° B die Werthe:

Gesamtmittel $E_{90} = 23\,120\,000$, $E_{90} = 4,325 \cdot 10^{-8}$.
 Wahrscheinlicher Fehler ± 66000 $\pm 0,012$.

Nach diesem Zahlenwerth besitzt Beryll in der Richtung normal zur Hauptaxe den grössten bisher beobachteten Elasticitätscoëfficienten, übertrifft darin nicht unerheblich den Stahl, welcher bisher mit $E = 21\,000\,000$ in erster Linie stand.

Drillungen.

0° Nr. 1. $L = 24,32$, $B = 4044,3$, $D = 516,2$, $A = 5163$, $\vartheta = 18,5$.
 $\sigma_{10} = 78,6$ $T = 6\,671\,000$.

0° Nr. 2. $L = 27,53$, $B = 4040$, $D = 517,0$, $A = 5163$, $\vartheta = 16,5$.
 $\sigma_{10} = 88,3$ $T = 6\,707\,000$.

0° Nr. 3. $L = 28,0$, $B = 4044$, $D = 518,4$, $A = 5163$, $\vartheta = 17,7$.
 $\sigma_{10} = 91,55$ $T = 6\,710\,000$.

0° Nr. 4. $L = 30,08$, $B = 3910$, $D = 527,0$, $A = 5163$, $\vartheta = 18,0$.
 $\sigma_{10} = 91,55$ $T = 6\,608\,000$.

$$0^{\circ} \text{ Nr. 5. } L = 29,80, \quad B = 3960, \quad D = 514,3, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 17,8.$$

$$\sigma_{10} = 100,35$$

$$T = 6\,632\,000.$$

$$\text{Gesamtmittel } T_0 = 6\,666\,000, \quad T_0 = 15,000 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler } \pm 14000 \quad \pm 0,036.$$

$$90^{\circ} \text{ A. Nr. 1. } L = 16,94, \quad B = 3907, \quad D = 680,8, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 19.$$

$$\sigma_{10} = 19,32$$

$$T = 8\,950\,000.$$

Da dieses Stäbchen das beste dieser gefährlichen Gattung war, ist es noch einmal mit anderer Belastung und in anderer Länge beobachtet worden.

$$L = 16,30, \quad \vartheta = 18,5.$$

$$\sigma_{18} = 27,85$$

$$T_{90} = 8\,980\,000.$$

Die vollkommene Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem vorhergehenden weist darauf hin, dass die Unsicherheit der Resultate nicht in den elastischen Beobachtungen, sondern in den Dimensionenbestimmungen und der Ungleichheit des Materials begründet ist.

$$90^{\circ} \text{ A. Nr. 2. } L = 12,54, \quad B = 3950, \quad D = 675,2, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 18,5.$$

$$\sigma_{10} = 14,92$$

$$T = 8\,700\,000.$$

$$90^{\circ} \text{ A. Nr. 3. } L = 16,16, \quad B = 3954, \quad D = 679,8, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 18.$$

$$\sigma_{10} = 19,50 \text{ (zerbrochen!) } (T = 8\,400\,000)^1).$$

$$90^{\circ} \text{ A. Nr. 4. } L = 10,36, \quad B = 3917, \quad D = 695,0, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 18.$$

$$\sigma_{18} = 16,98$$

$$T = 8\,810\,000.$$

$$90^{\circ} \text{ A. Nr. 5. } L = 14,0, \quad B = 3908, \quad D = 678,8, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 19.$$

$$\sigma_{10} = 17,45 \text{ (zerbrochen!) } (T = 8\,280\,000)^1).$$

$$90^{\circ} \text{ A. Nr. 6. } L = 11,20, \quad B = 3902, \quad D = 687,4, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 18.$$

$$\sigma_{18} = 19,25$$

$$T = 8\,710\,000.$$

$$\text{Gesamtmittel } T = 8\,830\,000, \quad T_{90} = 11,325 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler } \pm 40000, \quad \pm 0,052.$$

$$90^{\circ} \text{ B I. Nr. 2. } L = 14,9, \quad B = 4077, \quad D = 457,2, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 17,5.$$

$$\sigma_8 = 40,30.$$

$$T_{90}' = 6\,705\,000.$$

$$90^{\circ} \text{ B II. Nr. 4. } L = 10,85, \quad B = 3898, \quad D = 473,4, \quad A = 5163, \quad \vartheta = 18.$$

$$\sigma_{10} = 45,7$$

$$T_{90}' = 6\,770\,000.$$

Wie oben erwähnt, soll die Gattung B I und II den gleichen Torsionscoefficienten ergeben, wie die Gattung 0°. Die Beobachtung bestätigt dies auf das Vollkommenste. Man könnte also mit Stäbchen senkrecht zur Axe allein diese

1) Von der Berechnung aus dem oben erörterten Grunde ausgeschlossen.

zwei Torsionscoefficienten bestimmen. Vorstehende letzte Beobachtungen sind bei der folgenden Berechnung nicht berücksichtigt, sie würden den Mittelwerth T_0 nur um einige Tausendtheile vergrößern, also die Resultate nur unmerklich alteriren.

3. Resultate.

Aus den oben gefundenen Werthen:

$$\begin{aligned} E_0 &= 4,619 \cdot 10^{-8} (\pm 0,009), & T_0 &= 15,000 \cdot 10^{-8} (\pm 0,036), \\ E_{45} &= 5,568 \cdot 10^{-8} (\pm 0,019), & T_{90} &= 11,325 \cdot 10^{-8} (\pm 0,052), \\ E_{90} &= 4,325 \cdot 10^{-8} (\pm 0,012) \end{aligned}$$

folgen nach den Formeln (17) p. 483 sogleich die Determinantenverhältnisse $S_{hk}/S = s_{hk}$, nämlich:

$$\begin{aligned} s_{11} &= 4,325 \cdot 10^{-8}, & s_{12} &= -1,338 \cdot 10^{-8}, & s_{13} &= -0,836 \cdot 10^{-8}, \\ &(\pm 0,012) &(\pm 0,029) &(\pm 0,043) \\ s_{33} &= 4,619 \cdot 10^{-8}, & s_{44} &= 15,000 \cdot 10^{-8}. \\ &(\pm 0,009) &(\pm 0,036) \end{aligned}$$

Dabei ist der wahrscheinliche Fehler jeder Zahl gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate der wahrscheinlichen Fehler ihrer Theile nach den Formeln (17) gesetzt.

Durch Einsetzung dieser Werthe ergibt sich der allgemeine Werth des Dehnungs- oder Biegungscoefficienten in einer Richtung, die den Winkel φ gegen die Hauptaxe macht, nach Formel (9):

$$E_{\varphi} = 4,325 \cdot \sin^4 \varphi + 4,619 \cdot \cos^4 \varphi + 13,328 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi.$$

Ein Maximum oder Minimum hat dieser Coefficient für Richtungen $\bar{\varphi}$, die erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\varphi}}{d\varphi} = 0 &= 2 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} (8,650 \sin^2 \bar{\varphi} - 9,238 \cos^2 \bar{\varphi} \\ &\quad + 13,328 (\cos^2 \bar{\varphi} - \sin^2 \bar{\varphi})), \end{aligned}$$

d. h. für $\bar{\varphi} = 0$, $\bar{\varphi} = 90^\circ$ und ein $\bar{\varphi}$, für welches gilt:

$$\operatorname{tg}^2 \bar{\varphi} = \frac{4,090}{4,678}, \quad \text{d. h. für } \bar{\varphi} = 43^\circ 5' \text{ ca.}$$

Die zugehörigen Werthe sind:

$$E_0 = 4,619, \quad E_{45} = 5,573, \quad E_{90} = 4,325.$$

Die für E_{φ} aufgestellte Formel gestattet auch, zu beurtheilen, wie gross der Einfluss einer nicht vollständig rich-

tigen Orientirung auf den Werth des beobachteten E ist. Man erkennt, dass für die Gattungen (0°) und (90°) der Einfluss mit aller Strenge nur zweiter Ordnung wird (also bei Fehlern, welche innerhalb 2° bleiben, etwa $1/1000$ beträgt) bei der Gattung (45°) aber äusserst nahe zu, da diese Richtung fast genau mit derjenigen des Maximums für E übereinstimmt. Hr. Hennig hat an einer grösseren Zahl von Beryllstäbchen die Orientirung aus der Schwingungsebene des durch die Schmal- und Breitseiten hindurchgegangenen Lichtes bestimmt und die Abweichungen von der geforderten Richtung stets kleiner als 2° , meist unter $\frac{1}{2}^\circ$ liegend gefunden:

Die als Coëfficient der Drillung bezeichnete Function lautet für Beryll:

$$T_\varphi = 15,000 - 3,675 \cos^2 \varphi_2 - 17,536 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi_1.$$

Hierin bezeichnen φ , φ_1 , φ_2 die Winkel der Längs-, Breiten- und Dickenrichtung gegen die Hauptaxe. Dieser Coëfficient bestimmt ganz allein die Abhängigkeit der Drillung von der Orientirung, wenn die Dicke des Prismas sehr klein gegen seine Breite ist. Insofern ist seine Discussion ebenfalls von Interesse.

Lässt man die Breitseite des Stäbchens im Hauptschnitt liegen, so ist $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$ zu setzen $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi + \varphi$, also:

$$T_{(\varphi_2 = \frac{\pi}{2})} = 15,00 - 17,536 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Man erhält dann ein Minimum $T=10,616$ für $\varphi=45^\circ$. Liegt die Schmalseite im Hauptschnitt, so ist: $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi + \varphi$, $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, also:

$$T_{(\varphi_1 = \frac{\pi}{2})} = 15,00 - 3,675 \sin^2 \varphi.$$

Hier liegt das Minimum $T = 11,325$ bei $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Auch der Fehler des Drillungscoëfficienten, der durch fehlerhafte Orientirung der Stäbchen entsteht, ist hiernach zweiter Ordnung.

Die obigen Werthe der Determinantenverhältnisse s_{hk} bestimmen nach dem früher Gesagten die Grössen jeder Art

von elastischer Deformation bei gegebenen Kräften auf sehr einfache Weise.

Bei allseitig gleichem Druck p findet eine Compression parallel der Hauptaxe statt, welche nach Formel (18) gegeben ist durch:

$$z_z = -p A_0, \quad A_0 = 2s_{13} + s_{33},$$

normal dazu:

$$x_x = y_y = -p A_{90}, \quad A_{90} = s_{11} + s_{12} + s_{13};$$

dazu eine cubische Compression:

$$\delta = -p(A_0 + 2A_{90}) = -pM.$$

Nach den obigen Werthen ist:

$$A_0 = 2,947 \cdot 10^{-8}, \quad A_{90} = 2,154 \cdot 10^{-8}, \quad M = 7,255 \cdot 10^{-8}.$$

M ist das Maass der cubischen Compressibilität; für Wasser findet sich dasselbe in unseren Einheiten (Gramm und Quadratmillimeter) rund $5 \cdot 10^{-6}$; der Werth für Beryll ist hiervon nur der 70. Theil.

Die Winkeländerung, die zwei Ebenen innerhalb des Krystalles durch allseitig gleichen Druck erleiden, ist nach (21) gemessen durch die Constante:

$$B = s_{33} + s_{13} - s_{11} - s_{12};$$

ihr Werth ist für Beryll $B = 0,796 \cdot 10^{-8}$. Misst man den Druck in Atmosphären, so wird $(B) = 8,22 \cdot 10^{-8}$. Bildeten die Ebenen ursprünglich einen rechten Winkel, so ist die bei einem Drucke von 100 Atmosphären unter günstigen Umständen eintretende Winkeländerung $8,22 \cdot 10^{-6}$, d. h. immer noch nicht zwei Bogensecunden. Es ergibt sich hieraus, dass Beobachtungen dieser Winkeländerung, um eine Gleichung für die Elasticitätsconstanten zu erhalten, bei Beryll fast unmöglich wären und somit auch bei anderen Substanzen desselben Systems nicht sehr aussichtsvoll sind.

Die thermischen lineären Ausdehnungscoefficienten (pro 1°C.) des Berylls (Smaragd) sind nach Fizeau:

$$\alpha_0 = -1,06 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_1 = +1,37 \cdot 10^{-8}.$$

Setzt man diese Werthe mit denen der s_{hk} in die Gleichungen (25) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} -1,06 &= -q_1 \cdot 0,0167 + q_0 \cdot 0,0462, \\ +1,37 &= q_1 \cdot 0,0299 - q_0 \cdot 0,00836, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$q_0 = -7,10, \quad q_1 = +43,9.$$

Dies Resultat, welches parallel der Axe keine Wärmeabstossung, sondern eine Wärmeanziehung ergibt, ist im hohen Grade überraschend und folgt keineswegs mit Nothwendigkeit aus der parallel der Axe stattfindenden Zusammenziehung bei einer Erwärmung, denn bei anderen Werthen der Elasticitätsconstanten würde das Entgegengesetzte eintreten können.

Schliesslich sind noch nach den Formeln (16) die Elasticitätsconstanten des Berylls wirklich zu berechnen; die Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0,2746 \cdot 10^{+8}, & c_{12} &= 0,0980 \cdot 10^{+8}, & c_{13} &= 0,0674 \cdot 10^{+8}, \\ c_{33} &= 0,2409 \cdot 10^{+8}, & c_{44} &= 0,0666 \cdot 10^{+8}. \end{aligned}$$

Diese Werthe zeigen, dass diejenigen Relationen, welche aus der Poisson'schen Theorie sich unter der Voraussetzung ergeben, dass die Molecularwirkung nach allen Richtungen die gleiche ist, für Beryll nahezu erfüllt sind. Es ist c_{13} so genau $= c_{44}$, dass man eine strenge Gleichheit annehmen kann; statt $c_{11} = 3 \cdot c_{12}$ findet sich $c_{11} = 2,8 \cdot c_{12}$, also immerhin eine bemerkenswerthe Annäherung an das theoretische Verhältniss. Man darf demnach den Schluss ziehen, dass bei Beryll die Polarität der Molecüle nur schwach ist, und man eine bedeutende Annäherung an die Wirklichkeit erhält, wenn man sie völlig ignorirt.

Es ist von Interesse, zu untersuchen, wie sich die Werthe der Constanten ergeben, wenn man diese Poisson'sche Relationen als streng gültig ansieht. Die demgemäss geänderten Werthe s und c seien durch den oberen Index ' unterschieden. Die Bedingungen:

$$c_{11}' = 3 \cdot c_{12}', \quad c_{13}' = c_{44}'$$

drücken sich in den Grössen s_{hk}' aus:

$$\begin{aligned} 0 &= s_{33}'(s_{11}' + s_{12}') + s_{13}'(s_{44}' - 2s_{13}'), \\ 0 &= 4s_{13}'^2 - (s_{11}' + 3s_{12}')s_{33}', \end{aligned}$$

oder auch, indem man aus beiden durch Elimination von s_{11}' eine neue bildet:

$$(26) \quad s_{44}' = \frac{2s_{12}'s_{33}'}{s_{13}} - 2s_{13}', \quad s_{11}' = \frac{4s_{13}'^2}{s_{33}} - 3s_{12}'.$$

Bezeichnet man dann die direct durch die Beobachtung bestimmten Werthe wie bisher mit s_{hk} , so erhält man zur Bestimmung der drei Unbekannten s_{12}' , s_{13}' , s_{33}' die fünf Gleichungen:

$$s_{11} = \frac{4s_{13}'^2}{s_{33}} - 3s_{12}', \quad s_{12} = s_{12}', \quad s_{13} = s_{13}', \quad s_{33} = s_{33}',$$

$$s_{44} = \frac{2s_{12}'s_{33}'}{s_{13}} - 2s_{13}'.$$

Dieselben sind durch Einführung der Näherungswerthe:

$$s_{12}' = s_{12} + \delta_{12}, \quad s_{13}' = s_{13} + \delta_{13}, \quad s_{33}' = s_{33} + \delta_{33}$$

linear zu machen und lauten dann:

$$s_{11} - 4\frac{s_{13}^2}{s_{33}} + 3s_{12} = -3\delta_{12} + 8\frac{s_{13}}{s_{33}}\delta_{13} - 4\frac{s_{13}^2}{s_{33}^2}\delta_{33},$$

$$s_{44} - 2\frac{s_{12}s_{33}}{s_{13}} + 2s_{13} = 2\frac{s_{33}}{s_{13}}\delta_{13} - 2\left(1 + \frac{s_{12}s_{33}}{s_{13}^2}\right)\delta_{13} + 2\frac{s_{12}}{s_{13}}\delta_{33},$$

$$0 = \delta_{12}, \quad 0 = \delta_{13}, \quad 0 = \delta_{33}.$$

Die Auflösung ergibt nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\delta_{12} = +0,092, \quad \delta_{13} = -0,025, \quad \delta_{33} = -0,017,$$

und hiernach, sowie nach den Formeln (26), die folgenden Werthe der s_{hk}' :

$$s_{11}' = 4,382, \quad s_{12}' = -1,246, \quad s_{13}' = -0,861,$$

$$s_{33}' = +4,602, \quad s_{44}' = +15,042.$$

Stellt man hierzu die direct beobachteten Werthe, ferner ihre wahrscheinlichen Fehler Δ_{hk} und die Abweichungen $s_{hk}' - s_{hk} = \delta_{hk}$, so erhält man das System:

$$s_{11} = 4,325, \quad s_{12} = -1,338, \quad s_{13} = +0,836,$$

$$s_{33} = +4,619, \quad s_{44} = +15,00;$$

$$\Delta_{11} = \pm 0,012, \quad \Delta_{12} = \pm 0,029, \quad \Delta_{13} = \pm 0,043,$$

$$\Delta_{33} = \pm 0,009, \quad \Delta_{44} = \pm 0,036;$$

$$\delta_{11} = +0,057, \quad \delta_{12} = +0,092, \quad \delta_{13} = -0,025,$$

$$\delta_{33} = -0,017, \quad \delta_{44} = +0,042.$$

Dasselbe zeigt, dass die Abweichungen δ zweimal erheblich den wahrscheinlichen Fehler überschreiten, namentlich ist δ_{12} sehr bedeutend. Daher ist es als unwahrscheinlich zu bezeichnen, dass die Beryllmoleculé streng keine Polarität besitzen; — ein Resultat, das ja an sich plausibel ist, da ohne Polarität der Process des Aufbaues eines Krystalles nicht wohl zu erklären ist.

Immerhin ist die nahe Uebereinstimmung mit den theoretischen Resultaten dieser Annahme so merkwürdig, dass es lohnt, auch die Werthe der Constanten c_{hk}' zu bestimmen, wie sie sich aus diesen s_{hk}' nach (16) ergeben. Man erhält:

$$c_{11}' = 0,2666 \cdot 10^{+8}, \quad c_{33}' = 0,2422 \cdot 10^{+8}, \quad c_{44}' = 0,0665 \cdot 10^{+8},$$

$$c_{12}' = \frac{1}{3} c_{11}' = 0,0889 \cdot 10^{+8}, \quad c_{13}' = c_{44}' = 0,06651 \cdot 10^{+8}.$$

Dagegen fanden sich ohne Voraussetzung der Poisson'schen Resultate die Werthe:

$$c_{11} = 0,2746 \cdot 10^{+8}, \quad c_{33} = 0,2409 \cdot 10^{+8}, \quad c_{44} = 0,0666 \cdot 10^{+8},$$

$$c_{12} = 0,0980 \cdot 10^{+8}, \quad c_{13} = 0,0674 \cdot 10^{+8}.$$

Diese Zusammenstellung zeigt die grosse Empfindlichkeit der Constanten c_{hk} gegenüber den Aenderungen der Grössen s_{hk} , welche ihre Bestimmung aus Beobachtungen überhaupt unsicher macht. Indess ist dies für die Anwendungen ohne Belang, da für diese stets die genauer zu bestimmenden s_{hk} benutzt werden, auch beurtheilt sich die Gültigkeit der Relationen (14) ebenso gut an diesen, wie an den eigentlichen Elasticitätsconstanten.

II. Bergkrystall.

1. Formeln für das rhomboëdrische System.

Wir definiren die Elasticitätsconstanten c_{hk} für das rhomboëdrische System durch die folgenden Formeln, bei welchen vorausgesetzt ist, dass die Z -Axe die krystallographische Hauptaxe, die YZ -Ebene die krystallographische Symmetrieebene der Form ist; die $+Y$ -Axe trete aus einer der Rhomboëderflächen $+R$ aus, welche um die $+Z$ -Axe herum liegen:

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} -X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z, \quad -Y_z = c_{14}(x_x - y_y) + c_{44}y_z, \\ -Y_y = c_{12}x_x + c_{11}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z, \quad -Z_x = c_{44}z_x + c_{14}x_y, \\ -Z = c_{13}x_x + c_{13}y_y + c_{33}z_z, \quad -X_y = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}x_y + c_{14}z_x. \end{array} \right.$$

Dabei sei wieder gesetzt die Determinante dieser Coefficienten:

$$(28) \quad S = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} - c_{14} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} - c_{14} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{vmatrix}$$

und hierin der Coefficient des h . Elementes der k . Columnne (oder umgekehrt) gleich S_{hk} .

Es gelten dann die Relationen:

$$S_{11} = S_{22}, \quad S_{13} = S_{23}, \quad S_{44} = S_{55}, \quad S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}), \\ S_{14} = -S_{24} = \frac{1}{2} S_{66};$$

ausser den hierin enthaltenen S_{hk} ist nur noch S_{33} von Null verschieden; wir behalten als voneinander unabhängig bei:

$$S_{11}, \quad S_{12}, \quad S_{13}, \quad S_{14}, \quad S_{33}, \quad S_{44}.$$

In diesen Grössen gibt sich der Coefficient der lineären Dilatation E in einer durch die Richtungscosinus α, β, γ gegen die Coordinatenachsen bestimmten Richtung durch:

$$(29) \quad \begin{cases} SE = S_{11}(1 - \gamma^2)^2 + S_{33}\gamma^4 + (S_{44} + 2S_{13})\gamma^2(1 - \gamma^2) \\ \quad + 2S_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2). \end{cases}$$

Durch dies E oder das reciproke $E = 1/E$ bestimmt sich die Biegung eines rechteckigen Prismas von den Dimensionen L, B, D durch die Wirkung einer in der Mitte angreifenden Belastung P nach der bekannten Formel:

$$(30) \quad \eta = \frac{PL^3}{4EBD^3} = E \frac{PL^3}{4BD^3}.$$

Hinsichtlich der Drillung liegen beim rhomboëdrischen System die Verhältnisse complicirter, als bei dem hexagonalen, weil es hier keinerlei Orientirungen der Prismen gibt, bei welchen alle drei Kanten in die Richtungen von krystallographischen Symmetrieachsen fallen. Es kommen also hier die allgemeinen Formeln zur Anwendung, die ich für die Drillung eines rechteckigen Prismas aus beliebiger krystallinischer Substanz entwickelt habe.¹⁾

Nach denselben gibt sich der Drillungswinkel τ eines

1) W. Voigt, Wied. Ann. 29. p. 604. 1886.

Prismas von der Länge L , der grösseren Querdimension B , der kleineren D , durch ein Drehungsmoment N durch die Formel:

$$(31) \quad \tau = \frac{3 N L T \left[1 + \frac{\Theta'^2}{E T} \left(\frac{D^2}{B^2} + \frac{D^3 f}{B^3} \right) + \frac{\Theta''^2}{E T} \frac{D f}{B} \right]}{D^3 B \left(1 + \frac{D}{B} f \right)}.$$

Hierin ist T der Drillungs-, E der Dehnungscoefficient, welcher schon durch Formel (29) definirt ist; Θ' und Θ'' sind zwei ähnliche Functionen der Richtungscosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, welche die Lagen von L, B und D gegen die Krystallaxen bestimmen. Es gilt nämlich:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} S T = S_{44} + (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44}) \gamma_2^2 \\ \quad + 4(S_{11} + S_{33} - S_{44} - 2 S_{13}) \gamma^2 \gamma_1^2 \\ \quad + 4 S_{14} [(\gamma \beta_1 + \beta \gamma_1)(3 \alpha \alpha_1 - \beta \beta_1) - \beta_2 \gamma_2], \\ S \Theta' = (S_{44} + 2(S_{13} - S_{11})) \gamma \gamma_1 \\ \quad + 2(S_{11} + S_{33} - S_{44} - 2 S_{13}) \gamma^3 \gamma_1 \\ \quad + S_{14} [(\beta_1 \gamma + \gamma_1 \beta)(3 \alpha^2 - \beta^2) + 2 \beta \gamma (3 \alpha_1 \alpha - \beta_1 \beta)], \\ S \Theta'' = (S_{44} + 2(S_{13} - S_{11})) \gamma \gamma_2 \\ \quad + 2(S_{11} + S_{33} - S_{44} - 2 S_{13}) \gamma^3 \gamma_2 \\ \quad + S_{14} [(\beta_2 \gamma + \gamma_2 \beta)(3 \alpha^2 - \beta^2) + 2 \beta \gamma (3 \alpha_2 \alpha - \beta_2 \beta)]. \end{array} \right.$$

Die Grösse f ist eine Function des Verhältnisses B/D , welche bei Werthen desselben, welche 3 übersteigen, als merklich constant angesehen und demnach durch Combination von Beobachtungen eliminirt werden kann.

Die Orientirungen der Prismen, für welche $\Theta' = \Theta'' = 0$ ist sind für die Beobachtung am geeignetsten, einmal weil sie nach der Theorie eine Drillung ohne Biegung gestatten, was in technischer Hinsicht erwünscht ist, andererseits, weil für sie die obige Formel sich sehr einfach auf:

$$(33) \quad \tau = \frac{3 N L T}{D^3 B \left(1 + \frac{D}{B} f \right)} \text{ reducirt.}$$

Diese ganz allgemeinen Formeln (29) und (33) sollen nun für die speciellen Orientirungen der verschiedenen für die Beobachtung geeigneten Prismen angewandt werden.

Fällt die Längsrichtung in die krystallographische Haupt-

axe — Gattung (0°) — so wird $\gamma = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha = \beta = 0$ sein, daher:

$$(34) \quad SE_0 = S_{33}, \quad ST_0 = S_{44}, \quad S\Theta'_0 = 0, \quad S\Theta''_0 = 0.$$

Es gilt also für die Torsion die einfachere Formel (33); die sie enthaltende (nahe constante) Function f muss durch die Beobachtung bestimmt werden. Die Lage der Querdimensionen kann einzig auf ihren Werth influiren, im übrigen ist sie gleichgültig.

Liegt die Längsrichtung in der Symmetrieebene YZ im ersten oder dritten Quadranten, und schliesst sie mit der Hauptaxe den Winkel 45° ein, und fällt die grössere Querdimension (B) in die X -(Symmetrie-)Axe, so soll die Gattung Prismen mit $(+45^\circ)$ bezeichnet werden. Hier ist $\gamma = \beta = 1/\sqrt{2}$, $\pm \gamma_2 = \mp \beta_2 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha = \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, also:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} SE_{+45} = \frac{1}{4}(S_{11} + S_{33} + S_{44} + 2(S_{13} - S_{14})), \\ \quad \quad \quad S\Theta' = 0, \quad S\Theta'' = \pm(S_{33} - S_{11} + S_{14}), \\ ST_{+45} = \frac{1}{2}(S_{44} + 2(S_{11} - S_{12}) + 4S_{14}). \end{array} \right.$$

Dass Θ'' von Null verschieden ist, lässt die Formel für die Torsion unbequem complicirt sein; man wird diese Gattung Prismen daher nicht gern zu Drillingsbeobachtungen benutzen.

Die Gattung (-45°) unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch, dass die Längsrichtung im zweiten Quadrant liegt, $\gamma = -\beta = 1/\sqrt{2}$ ist. Hier gilt:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} SE_{-45} = \frac{1}{4}(S_{11} + S_{33} + S_{44} + 2(S_{13} + S_{14})), \\ \quad \quad \quad ST_{-45} = \frac{1}{2}(S_{44} + 2(S_{11} - S_{12}) - 4S_{14}). \end{array} \right.$$

Liegt die Längsrichtung des Prismas normal zur Hauptaxe, d. h. in der Ebene der Nebenaxen, so hat man $\gamma = 0$, also für die Gattung (90°):

$$(37) \quad SE_{90} = S_{11},$$

wie auch immer die Orientirung im übrigen sei. Dies Resultat ist analog dem bei hexagonalen Krystallen gefundenen. Ferner ist unter der gleichen Voraussetzung:

$$\begin{aligned} ST_{90} &= S_{44} + (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44})\gamma_2^2 + 4S_{14}[\beta\gamma_1(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2], \\ S\Theta_{90} &= S_{14}\gamma_1\beta(3\alpha^2 - \beta^2), \quad S\Theta_{90}'' = S_{14}\gamma_2\beta(3\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned}$$

Unterscheiden wir wie beim Beryll zwei Gattungen ($90^\circ A$)

und (90° B) jenachdem die kleinere oder grössere Querdimension in die Hauptaxe fällt, d. h. γ_2 oder $\gamma_1 = 1$ ist, so erhält man für die Gattung (90° A):

$$(38) \quad ST_{90A} = 2(S_{11} - S_{12}), \quad S\Theta'_{90A} = 0, \quad S\Theta''_{90A} = S_{14}\beta(3\alpha^2 - \beta^2)$$

hingegen für die Gattung (90° B):

$$(39) \quad ST_{90B} = S_{44}, \quad S\Theta'_{90B} = S_{14}\beta(3\alpha^2 - \beta^2), \quad S\Theta''_{90B} = 0.$$

Es sind hiernach für die beiden Gattungen die Torsionscoefficienten rings um die Hauptaxe her constant, nicht aber die gleichen Bedingungen entsprechenden Torsionswinkel, denn in Formel (31) variiren die Θ' und Θ'' mit α und β , auch ist f wechselnd. Da aber diese Ausdrücke in Gleichung (31) sämmtlich in Potenzen von D/B multiplicirt auftreten, so ist eine starke Abhängigkeit der Torsion von der Lage der Prismenaxe in der Ebene der Nebenaxen nicht zu erwarten; besonders findet dies statt bei der Gattung (90° A), da für diese $\Theta' = 0$ ist, welches nach Formel (31) in das grösste variable Glied multiplicirt ist.

Die Orientirung der Prismenaxe normal zu der krystallographischen Symmetrieebene hat die besondere Wichtigkeit, dass für sie die bisher als unbekannt benutzte Function f sich theoretisch bestimmen lässt.

Wir haben als die Gattung (90° A) oben diejenige bezeichnet, für welche die Längsrichtung und die Breitenrichtung normal zur Hauptaxe steht; wir wollen die Benennung (90° AI) speciell für Stäbchen normal zur Symmetrieebene einführen, wenn für sie:

$$\alpha = \beta_1 = \gamma_2 = 1, \quad \beta_2 = \gamma_1 = 0 \text{ ist.}$$

Für diese Gattung gibt die Theorie¹⁾ neben:

$$40) \quad \begin{cases} T_{90AI} = \frac{2(S_{11} - S_{12})}{S}, \\ f_{90AI} = -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2} S_{44} (S_{11} - S_{12}) - 4 S_{14}^2}{2(S_{11} - S_{12})} \left(1 + 0,510 \frac{S_{14}^2}{S_{44} \frac{(S_{11} - S_{12})}{2} - S_{14}^2} \right). \end{cases}$$

Die Gattung (90° BI) ist analog gegeben durch:

$$\alpha = \beta_2 = \gamma_1 = 1, \quad \beta_1 = \gamma_2 = 0;$$

1) l. c. p. 616. Dort ist in Formel (35) einzuführen:

$$S_{55}' = 2(S_{11} - S_{12}), \quad S_{44}' = S_{44}, \quad S_{45}' = 2S_{14}.$$

für sie gibt sich analog¹⁾:

$$(41) \quad \begin{cases} T_{90BI} = \frac{S_{44}}{S}, \\ f_{90BI} = -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2S_{44}(S_{11}-S_{12})-4S_{14}^2}}{S_{44}} \left(1 + 0,510 \frac{S_{14}^2}{S_{44} \frac{(S_{11}-S_{12})}{2} - S_{14}^2} \right) \end{cases}$$

Sind nun aus den Beobachtungen nach den vorstehen den Formeln die sechs unabhängigen Determinantenverhältnisse:

$$\begin{aligned} S_{11}/S &= s_{11}, & S_{12}/S &= s_{12}, & S_{13}/S &= s_{13}, \\ S_{14}/S &= s_{14}, & S_{33}/S &= s_{33}, & S_{44}/S &= s_{44} \end{aligned}$$

berechnet, so bestimmen sich aus ihnen die sechs Elastizitätsconstanten:

$$c_{11}, \quad c_{12}, \quad c_{13}, \quad c_{14}, \quad c_{33}, \quad c_{44}$$

durch die folgenden Gleichungen:

$$(42) \quad \begin{cases} a) & c_{11}s_{11} + c_{12}s_{12} + c_{13}s_{13} + c_{14}s_{14} = 1. \\ b) & c_{12}s_{11} + c_{11}s_{12} + c_{13}s_{13} - c_{14}s_{14} = 0. \\ c) & 2c_{13}s_{13} + c_{33}s_{33} = 1. \\ d) & c_{13}(s_{11} + s_{12}) + c_{33}s_{13} = 0. \\ e) & 2c_{14}s_{14} + c_{44}s_{44} = 1. \\ f) & c_{14}(s_{11} - s_{12}) + c_{44}s_{14} = 0. \end{cases}$$

Aus c) und d) folgt:

$$(43) \quad \begin{cases} c_{13} = \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, & c_{33} = \frac{s_{11} + s_{12}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, \\ \text{aus e) und f):} \\ c_{14} = \frac{-s_{14}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}, & c_{44} = \frac{s_{11} - s_{12}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}, \\ \text{aus a) und b):} \\ c_{11} + c_{12} = \frac{1 - 2c_{13}s_{13}}{s_{11} + s_{12}}, & c_{11} - c_{12} = \frac{1 - 2c_{14}s_{14}}{s_{11} - s_{12}}, \\ c_{11} + c_{12} = \frac{s_{33}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, & c_{11} - c_{12} = \frac{s_{44}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}. \end{cases}$$

Unter diesen Constanten bestehen nach der Poisson'schen Theorie, wenn vorausgesetzt wird, dass die Molecüle

1) ibid. In Formel (35) zu setzen:

$S_{55}' = S_{44}, \quad S_{44}' = 2(S_{11} - S_{12}), \quad S_{45}' = 2S_{14}.$

der Substanz keine Polarität besitzen, dieselben beiden Relationen, die für das hexagonale System gelten, nämlich:

$$(44) \quad c_{13} = c_{44}, \quad c_{11} = 3c_{12}.$$

Aus den Verhältnissen s_{hk} bestimmt sich wiederum die Deformation eines rhomboëdrischen Krystalles bei anderen als den oben vorausgesetzten Umständen.

Ist ein beliebig gestaltetes Stück einem allseitig gleichen Druck ausgesetzt, so folgt genau, wie für das hexagonale System gefunden:

$$(45) \quad \begin{cases} x_x = -p(s_{11} + s_{12} + s_{13}) = y_y, & z_z = -p(2s_{13} + s_{33}), \\ y_z = z_x = x_y = 0. \end{cases}$$

Die Compressionscoefficienten parallel und normal zur Hauptaxe werden daher auch:

$$(46) \quad \begin{cases} A_0 = 2s_{13} + s_{33}, & A_{90} = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \\ \text{der cubische Compressionscoefficient:} \\ M = s_{33} + 2(s_{11} + s_{12}) + 4s_{13}. \end{cases}$$

Ebenso folgt für die Aenderung des Winkels χ zwischen zwei Ebenen, deren Normale durch die Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gegen die Krystallaxen bestimmt sind, dieselbe Formel:

$$(47) \quad \delta\chi \sin\chi = -p(s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{12})(2\gamma_1\gamma_2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\cos\chi)$$

mit dem charakteristischen Coefficienten:

$$B = s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{12}.$$

Auch bei einseitigem Druck auf die Basis oder Mantelfläche verhält sich ein Cylinder aus einem rhomboëdrischen Krystall einem hexagonalen gleich, falls seine Axe in die krystallographische Hauptaxe fällt, nicht hingegen bei anderer Orientirung. Man kann daher für rhomboëdrische Krystalle aus den thermischen Ausdehnungscoefficienten α_0 und α_1 parallel und normal zur Hauptaxe ebenfalls die Grösse der Wärmeabstossung, gemessen durch q_0 und q_1 , bestimmen wie für hexagonale durch die Formeln:

$$(48) \quad \alpha_0 = q_1 2s_{13} + q_0 s_{33}, \quad \alpha_1 = q_1 (s_{11} + s_{12}) + q_0 s_{13}.$$

(Fortsetzung im nächsten Heft.)