17.

Beweis eines Ausdruckes, von welchem die Binomial-Formel ein einzelner Fall ist.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

Der Ausdruck ist folgender:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha.\,(x+\beta)^{n-1} + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2}\,\ldots\ldots$$
$$+ \frac{n.n-1\,\ldots\ldots\,(n-\mu+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$$
$$+ \frac{n}{1}\alpha\big(\alpha-(n-1)\beta\big)^{n-2}\big(x+(n-1)\beta\big) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}.$$

x, α und β sind beliebige Gröfsen, n ist eine ganze positive Zahl.

Wenn $n=0$: so giebt der Ausdruck

$$(x+\alpha)^0 = x^0;$$

wie gehörig, Nun kann man, wie folgt, beweisen, dafs der Ausdruck, wenn er für $n=m$ Statt findet, auch für $n=m+1$, also allgemein, gilt.

Es sei

$$(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m.m-1}{1\,.\,2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}\,\ldots\ldots$$
$$+ \frac{m}{1}\alpha\big(\alpha-(m+1)\beta\big)^{m-2}\big(x+(m-1)\beta\big) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

Man multiplicire mit $(m+1)dx$ und integrire, so findet man:

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{m+1}{2}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta) + C,$$

wo C die willkürliche Constante ist. Um ihren Werth zu finden, sei

$$x = (m+1)\beta,$$

so geben die beiden letzten Gleichungen:

$$\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^m=(-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m-m^m\alpha\beta^{m-1}+\frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}$$
$$-\frac{m\,.\,m-1}{2\,.\,3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(m-2)^{m-2}\beta^{m-3}\,\ldots\ldots\ldots\Big],$$

$$\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^{m+1}=(-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1}-(m+1)m^m\alpha\beta^m$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}\,\ldots\ldots\ldots\Big]+C.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $(m+1)\beta$, und thut das Product zur zweiten, so findet man:

$$C=\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^{m+1}+(m+1)\beta\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^m, \text{ oder}$$
$$C=\alpha\left(\alpha-(m+1)\beta\right)^m.$$

Daraus folgt, dafs der zu beweisende Ausdruck auch für $n=m+1$ Statt findet. Er gilt aber für $n=0$; also gilt er auch für $n=0, 1, 2, 3$ etc., das heifst: für jeden beliebigen ganzzahligen und positiven Werth von n.

Setzt man $\beta=0$, so bekommt man die Binominal-Formel.

Setzt man $\alpha=-x$, so findet man:

$$0=x^n-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n\,.\,n-1}{2}x(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}x(x+3\beta)^{n-1}\,\ldots\ldots\ldots,$$

oder, wenn man mit x dividirt,

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n\,.\,n-1}{2}(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}(x+3\beta)^{n-1}\,\ldots\ldots\ldots,$$

wie auch sonst schon bekannt ist; denn das zweite Glied dieser Gleichung ist nichts anderes, als

$$(-1)^{n-1}\Delta^n\left(x^{n-1}\right),$$

wenn man die constante Differenz gleich β setzt.

18.