Über den Wechselstromwiderstand von kurzen Spulen aus Litze.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

I. Formel für lange Spulen aus Litze. Im III. Bande des Archivs S. 264 habe ich gezeigt, wie man den Wechselstromwiderstand langer Spulen aus Litze berechnen kann. Ich wies daselbst nach, daß man für das Widerstandsverhältnis $\left(\frac{\text{Wechselstromwiderstand}}{\text{Gleichstromwiderstand}} \right)$ der einlagigen Spule¹⁾ zu schreiben hat:

$$k = \varphi(\xi) + \frac{z-1}{3} \psi(\xi). \quad 1)$$

z ist die Zahl der Einzeldrähte der Litzenader. Ist der Durchmesser des Einzeldrahtes d , so ist

$$\xi = 0,89 \alpha d;$$

$$\text{wo } \alpha = \frac{1}{50} \sqrt{n L \sqrt{z} \cdot 0,89 \frac{d}{g}},$$

n = Frequenz, L = Leitfähigkeit (für handwarmes Kupfer $L = 50$), g = Ganghöhe.

$\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ sind 2 Funktionen der „reduzierten“ Drahtstärke ξ .

Für kleine Werte ($\xi < 0,75$) kann man setzen:

$$\varphi(\xi) = 1 + 0,09 \xi^4,$$

$$\psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}.$$

Für große Werte ($\xi > 2$) gilt:

$$\varphi(\xi) = \xi,$$

$$\psi(\xi) = 2(\xi).$$

Für mittlere Werte kann man den Wert der Funktionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ entweder den genauen Formeln oder der Tabelle Archiv, II. Bd., S. 96, 98, oder den Figuren 1 und 2 der vorliegenden Arbeit entnehmen.

Nicht die lange, sondern die kurze Spule ist in der drahtlosen Telegraphie der normale Fall. Es ist vorauszusehen, daß sich die genaue Formel für das Widerstandsverhältnis beliebig langer Spulen aus dem Ausdruck 1 als dem Hauptbestandteile zusammensetzen muß und aus Zusatzgliedern, die die Spulenlänge l enthalten und für großen Wert von l verschwinden. Sind nun bei normalen Abmessungen die Zusatzglieder von Bedeutung? Oder bedeuten sie eine so kleine Verbesserung der Formel 1, daß sie vom Praktiker im allgemeinen vernachlässigt werden können?

¹⁾ Für mehrlagige Spulen aus Litze lautet die Formel:

$$k = \varphi(\xi_1) + \frac{\lambda^2 z - 1}{3} \psi(\xi); \quad \lambda = \text{Lagenzahl.}$$

Da trifft es sich gut, daß Herr Dr. Alexander Meißner im Jahre 1909 Widerstandsmessungen an kurzen Spulen mitgeteilt hat (Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie 1909, S. 57).

Ich habe die Formel an diesen Messungen geprüft und gefunden, daß sie mit ihnen im allgemeinen in gutem Einklange steht, und daß man im allgemeinen von einer Verbesserung der Formel 1 für normale Spulen absehen kann. Über diesen Vergleich will ich kurz berichten.

2. Prüfung der Formel 1 bei kurzen Spulen. Die 3 von Meißner untersuchten Spulen waren aus Emaillelitze gewickelt. Die Dimensionsverhältnisse gehen aus den Figuren 3 bis 5 hervor. Der Augenschein lehrt, daß es sich um ziemlich kurze Spulen handelt.

Fig. 1. Die Funktion $\varphi(\xi)$.

Fig. 2. Die Funktion $\psi(\xi)$.

Fig. 3.
Spule I.

Fig. 4.
Spule II.

Fig. 5.
Spule III.

In den folgenden Tabellen sind die von Herrn Meißner angegebenen Werte eingerahmt. Die Messungen des Herrn Meißner geben, wie er selbst ausdrücklich hervorhebt, den Wechselstromwiderstand zu hoch an. Die Kondensator-dämpfung, die Dämpfung durch ein bei der Messung benutztes Hitzdrahtinstrument sind dem gemess-

senen Wechselstromwiderstände zur Last gelegt (vgl. S. 66 a. a. O.). Außerdem treten noch Fehler durch Schwankungen der primären Funkenstrecke hinzu, die Herr Meißner zu 5 % schätzt. Um diese Fehlerquellen auszumerzen, habe ich in den Figuren 6—8 die von

Fig. 6. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei Spule I.

Fig. 7. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei Spule II.

Herrn Meißner gemessenen Widerstände in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen (stark ausgezogene Kurve). Dem Gefühl nach habe ich die beobachtete Kurve bis zur Frequenz Null verlängert. Hierzu gibt die berechnete und in den Figuren gestrichelt eingetragene Kurve genügend Anhalt. Die Verlängerung der beobachteten Kurve sollte auf der Ordinate den Gleichstromwiderstand abschneiden, der sich aus den Spulenangaben des Herrn Meißner berechnen ließ. Sie tut dies infolge der Fehlerquellen nicht, und man braucht nun nur durch den Gleichstrompunkt als Anfang eine Parallelkurve zur beobachteten Kurve zu legen, um die korrigierte Kurve zu erhalten. Als Leitfähigkeit L des Kupfers habe ich bei meinen Rechnungen den Wert 60 eingesetzt. Alle weiteren Einzelheiten des Vergleichs können nun den Tabellen I bis III entnommen werden.

Herr Meißner hat seine Angaben über die Spulenabmessungen mehr zur Charakterisierung der Spulen gemacht, als um eine Grundlage für einen Vergleich von Messung und Rechnung zu geben. In Anbetracht dieses Umstandes und der immerhin unsicheren Verbesserung seiner Meßwerte muß die erzielte Übereinstimmung von berechneten und beobachteten Werten als befriedigend bezeichnet werden. Es ist sicher kein Zufall, daß Messung und Rechnung sich am nächsten bei der längsten Spule kommen und bei der kürzesten Spule am weitesten auseinandergehen.

Bei zwei weiteren, ebenfalls von Herrn Meißner untersuchten Spulen, bei denen die Einzeldrähte der Litze einen Durchmesser von nur 0,007 cm hatten, war die Übereinstimmung schlechter. Dies zeigen die Figuren 9 und 10, in denen gemessene, korrigierte und berechnete Punkte eingetragen sind. In der Kurve 9 würden sich berechnete und korrigierte Werte bereits zur Zufriedenheit decken, wenn man annimmt, daß der

Fig. 8. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei Spule III.

Tabelle I. Spule I.

$z = 27$; $d = 0,012$ cm; Höhe $h = 38$ mm; Durchmesser $D = 49$ mm; Windungszahl $w = 28$;

$g = 0,141$ cm; Drahtlänge = 4,34 m; Kupferquerschnitt = 0,305 qmm;
Gleichstromwiderstand = 0,237 Ohm.

$$\alpha = \frac{1}{50} \sqrt{n \cdot 60 \sqrt{27 \cdot 0,89 \cdot \frac{0,012}{0,141}}} = 30,6 \sqrt{\frac{n}{10^5}}; \quad \xi = \alpha \cdot 0,89 \cdot 0,012 = 0,327 \sqrt{\frac{n}{10^5}}$$

Wellenlänge in m	Wechselstromwiderstand in Ohm, gemessen	Wechselstromwiderstand in Ohm, korrigiert	Frequenz in Perioden in der Sekunde	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	$\frac{z-1}{3} \psi(\xi)$	k	Wechselstromwiderstand, berechnet in Ohm	Fehler in Ohm	Fehler in %
370	0,98	0,87	8,11 · 10 ⁵	0,93	1,065	0,241	2,09	3,15	0,75	- 0,12	- 15
433	0,83	0,70	6,92 · „	0,86	1,047	0,180	1,56	2,60	0,62	- 0,08	- 11
510	0,76	0,57	5,88 · „	0,79	1,033	0,127	1,10	2,13	0,51	- 0,06	- 10
585	0,61	0,48	5,14 · „	0,74	1,025	0,0985	0,85	1,87	0,44	- 0,04	- 8
665	0,55	0,42	4,52 · „	0,695	1,019	0,0780	0,68	1,70	0,40	- 0,02	- 4
820	0,51	0,38	3,66 · „	0,625	1,013	0,0515	0,45	1,46	0,35	- 0,03	- 6

Im Durchschnitt 9%.

Tabelle II. Spule II.

$z = 2 \cdot 27$; $d = 0,012$ cm; Höhe $h = 52$ mm; Durchmesser $D = 49$ mm; Windungszahl $w = 32$;

$g = 0,168$ cm; Drahtlänge 4,95 m; Kupferquerschnitt: $2 \cdot 0,305$ qmm;
Gleichstromwiderstand = 0,136 Ohm;

$$\alpha = \frac{1}{50} \sqrt{n \cdot 60 \sqrt{2 \cdot 27 \cdot 0,89 \cdot \frac{0,012}{0,168}}} = 33,4 \sqrt{\frac{n}{10^5}}; \quad \xi = \alpha \cdot 0,89 \cdot 0,012 = 0,357 \sqrt{\frac{n}{10^5}}$$

Wellenlänge in m	Wechselstromwiderstand in Ohm, gemessen	Wechselstromwiderstand in Ohm, korrigiert	Frequenz in Perioden in der Sekunde	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	$\frac{z-1}{3} \psi(\xi)$	k	Wechselstromwiderstand, berechnet in Ohm	Fehler in Ohm	Fehler in %
370	1,00	0,94	8,11 · 10 ⁵	1,01	1,088	0,326	5,75	6,84	0,93	- 0,01	- 1
433	0,83	0,77	6,92 · „	0,935	1,065	0,242	4,26	5,32	0,72	- 0,05	6
510	0,68	0,63	5,88 · „	0,86	1,047	0,180	3,18	4,23	0,57	- 0,06	9
585	0,58	0,52	5,14 · „	0,805	1,035	0,137	2,42	3,45	0,46	- 0,06	9
665	0,48	0,43	4,52 · „	0,755	1,027	0,105	1,85	2,88	0,39	- 0,04	9
820	0,41	0,33	3,66 · „	0,68	1,018	0,072	1,27	2,29	0,31	- 0,02	6

Im Durchschnitt 7%.

Tabelle III. Spule III.

$z = 3 \cdot 27$; $d = 0,012$ cm; Höhe $h = 62$ mm; Durchmesser $D = 49$ mm; Windungszahl $w = 34$;

$g = 0,188$ cm; Drahtlänge = 5,25 m; Kupferquerschnitt: $3 \cdot 0,305$ qmm;
Gleichstromwiderstand = 0,096 Ohm;

$$\alpha = \frac{1}{50} \sqrt{n \cdot 60 \sqrt{3 \cdot 27 \cdot 0,89 \cdot \frac{0,012}{0,188}}} = 34,8 \sqrt{\frac{n}{10^5}}; \quad \xi = \alpha \cdot 0,89 \cdot 0,012 = 0,373 \sqrt{\frac{n}{10^5}}$$

Wellenlänge in m	Wechselstromwiderstand in Ohm, gemessen	Wechselstromwiderstand in Ohm, korrigiert	Frequenz in Perioden in der Sekunde	ξ	$\varphi(\xi)$	$\psi(\xi)$	$\frac{z-1}{3} \psi(\xi)$	k	Wechselstromwiderstand, in Ohm berechnet	Fehler in Ohm	Fehler in %
370	1,15	1,12	8,11 · 10 ⁵	1,062	1,17	0,412	11,0	12,12	1,16	+ 0,04	+ 4
433	0,9	0,87	6,92 · „	0,982	1,08	0,301	8,01	9,09	0,87	+ 0	0
510	0,7	0,67	5,88 · „	0,904	1,057	0,215	5,72	6,77	0,65	- 0,02	- 3
585	0,6	0,57	5,14 · „	0,845	1,043	0,168	4,5	5,54	0,53	- 0,04	- 7
665	0,5	0,47	4,52 · „	0,795	1,034	0,130	3,46	4,49	0,43	- 0,04	- 8
820	0,39	0,36	3,66 · „	0,715	1,022	0,085	2,26	3,28	0,33	- 0,03	-

Im Durchschnitt 3,5 %

Drahtdurchmesser d um 5% größer als angegeben ist¹⁾. Mit solchen Unsicherheiten muß man bei diesen Litzen rechnen. Die schlechte Übereinstimmung in Fig. 7 kann ich nicht erklären.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Fehler unserer Formel selbst bei Spulen

Fig. 9. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei einer Spule aus Litze von 81 Drähten mit dem Durchmesser von je 0,07 mm; $h = 32$ mm; $D = 49$ mm.

Fig. 10. Gemessene, korrigierte und berechnete Werte bei einer Spule aus Litze von 54 (?) Drähten mit dem Durchmesser von je 0,07 mm; $h = 32$ mm; $D = 49$ mm.

mit dem Dimensionsverhältnis $h = 0,78$ (Fig. 3) so klein ist, daß sie für den Praktiker auch für kurze Spulen brauchbar sein dürfte.

3. Das Widerstandsminimum. Herr Meißner hat die für die Wellenlänge von 370 m gefundenen Widerstandswerte bei der Spule I und III miteinander verglichen. Trotzdem der Kupferquerschnitt bei der Spule III dreimal so groß ist als bei der Spule I, ist der Widerstand bei der Spule III um 15% größer als bei der Spule I. Herr Meißner schließt hieraus: „Man kann bei gegebener Drahtstärke und Wellenlänge einen günstigen Litzenquerschnitt (bzw. günstige Drahtzahl) finden, bei der eine Spule gegebener Form eine geringste Dämpfung erhält.“ Dies ist ein sehr wichtiges experimentelles Ergebnis.

Herr Meißner hat hier an einem Sonderfalle nachgewiesen, daß der Wechselstromwiderstand ein Minimum haben kann. Sein Resultat wird durch meine allgemein gehaltenen Betrachtungen über das Widerstandsminimum bestätigt.

Während ich bei der Berechnung des Widerstandsminimums die Drahtzahl z als konstant ansah und den günstigsten Drahtdurchmesser d berechnete, sieht Herr Meißner umgekehrt den Drahtdurchmesser d als gegeben an und fragt nach der günstigsten Drahtzahl z . Auch hierüber kann unsere Formel Auskunft geben und die bei Herrn Meißner noch unbeantwortet gebliebenen Fragen nach der Abhängigkeit der günstigsten Drahtzahl von Frequenz, Leitfähigkeit, Drahtdurchmesser und Ganghöhe beantworten. Bei der Drahtlänge l ist der Gleichstromwiderstand

$$r_g = \frac{l}{L d^2 \frac{\pi}{4} \cdot z}$$

und der Wechselstromwiderstand

$$r_w = \frac{l}{L d^2 \frac{\pi}{4}} \left\{ \varphi(\xi) + \frac{z-1}{3} \psi(\xi) \right\}.$$

¹⁾ Wie mir Herr Meißner mitteilt, machte anfangs die Herstellung dieser dünnen Litzen Schwierigkeiten, so daß bei ihnen mit größeren Ungenauigkeiten der Drahtstärke zu rechnen ist.

Wir schreiben $\xi = \beta \sqrt[4]{z}$, wo $\beta = 0,89 \cdot d \cdot \frac{1}{50} \cdot \sqrt{nL \cdot 0,89 \frac{d}{g}}$, benutzen die Annäherungsformeln für kleines Argument ξ und erhalten:

$$r_w = \text{konst} \left\{ \frac{1}{z} + 0,09 \beta^4 + z \cdot \frac{\beta^4}{9} - \frac{\beta^4}{9} \right\}.$$

Ist z veränderlich, so hat der Wechselstromwiderstand ein Minimum, wenn $z = \frac{3}{\beta^2}$

ist, oder wenn $z = \frac{10600 \cdot g}{d^3 \cdot nL}$ ist. Für die Spule I ergibt sich bei der Frequenz von $8,11 \cdot 10^5$

(Wellenlänge = 370 m) die günstigste Drahtzahl von $\frac{10600 \cdot 0,141}{0,012^3 \cdot 8,11 \cdot 10^5 \cdot 60} = 18$.

Aus den Versuchen des Herrn Meißner geht hervor, daß sie kleiner als 27 sein muß. Also auch hier kein Widerspruch zwischen Rechnung und Messung.

Liegt das Widerstandsverhältnis oberhalb 1,33 — und dies ist bei allen Spulen des Herrn Meißner der Fall —, so ist die Spule (bei konstanter Drahtzahl) mit Litze von zu großem Drahtdurchmesser d ausgeführt. Dies habe ich im Archiv III, S. 271, bewiesen. Die Meißnerschen Spulen hätten daher im untersuchten Frequenzbereiche kleinere Dämpfungen gehabt, wenn sie aus dünnerem Drahte hergestellt worden wären.

Bemerkungen zur Theorie der Eisenverluste in Spulenkernen.

Von

H. Lorenz, Danzig.

1. Vorbemerkung. In der elektrotechnischen Literatur begnügt man sich meist mit der Annahme räumlich konstanter magnetischer Feldstärken im Innern langer Spulen, wodurch die Verfolgung der auftretenden Wirbelströme ausgeschlossen wird. Diese werden vielmehr gewöhnlich für sich abgeschätzt und dem Hysteresisverlust, der sich mit der genannten Voraussetzung unter Zuhilfenahme empirisch gegebener Hysteresisschleifen leicht ermitteln läßt, nachträglich hinzugefügt. Im Folgenden soll versucht werden, dieses wenig befriedigende Verfahren durch ein exakteres zu ersetzen, welches beide Verluste nebeneinander ergibt. Wenn dadurch auch die Bestimmung der Hysteresisverluste praktisch keine Änderung erfährt, so wird doch für die Behandlung der Wirbelströme eine Analogie mit den Torsionsspannungen sich insofern nützlich erweisen, als sie die Übertragung bekannter Methoden und Lösungen aus der Elastizitätstheorie auf unsern Fall ermöglicht.

2. Die Grundgleichungen des Feldes einer Spule. Wir nehmen zunächst an, daß die ins Auge gefaßte Spule so lang sei, daß die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern überall der Spulenchse parallel verläuft und in ihrer Richtung sich nicht ändert. Mithin kann diese Feldstärke nur noch mit den Koordinaten x, y eines Querschnittspunktes und mit der Zeit t variieren. Die Änderung der Feldstärke hat nun an jeder Stelle des Querschnitts F der Spule eine Änderung der Kraftlinienzahl N zur Folge, so zwar, daß mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$

$$N = \int \mathfrak{B} dF$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} dF = \int \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dF$$