15.

Ueber einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen.

(Von Hrn. Dr. E. Heine zu Berlin.)

Die Aufgabe, den Zustand des Gleichgewichtes der Wärme in einem Ellipsoid, welches an der Oberfläche in einer willkürlich gegebenen, von der Zeit unabhängigen Temperatur erhalten wird, für einen beliebigen Punct desselben anzugeben, ist bekanntlich von *Lamé* auf eine höchst scharfsinnige Art gelöst worden, und dadurch ein bedeutender Fortschritt, nicht allein in der Theorie der Wärme, sondern auch in der der Anziehung gemacht *). Stellt man sich nämlich den unendlichen Raum mit Masse erfüllt vor, und daraus ein Ellipsoid geschnitten, so besteht die von *Lamé* behandelte Aufgabe in nichts Anderem, als: das Potential des unendlichen Körpers, oder seiner mit Masse belegten Oberfläche, für alle Puncte des innern hohlen Raumes anzugeben, wenn es für die der Oberfläche bekannt ist. Dieser Aufgabe, in ihrer doppelten Gestalt, entspricht ein zweifacher Ausspruch einer andern, die wir im Gegensatz zu der eben angeführten des *innern Punctes*, die des *äußern Punctes* nennen wollen, nemlich: man soll, wenn das Potential eines mit Masse erfüllten Ellipsoides, oder seiner mit Masse belegten Oberfläche, für alle Puncte dieser Oberfläche gegeben ist, dasselbe für einen beliebigen äußern Punct angeben. Außerdem gehört hierher noch eine dritte Aufgabe über ein durch zwei Ellipsoiden mit gleichen Brennpuncten gebildetes Körperstück.

Die erste der beiden oben erwähnten *Laméschen* Abhandlungen scheint einer Erweiterung, in der Art, daß sie sämmtliche drei Aufgaben umfaßt, nicht fähig zu sein, während die zweite, welche die Rotations-Ellipsoiden behandelt, eine solche Verallgemeinerung gestattet. Dadurch nämlich, daß bei den Körpern dieser Art die Entwicklungen eine einfachere Gestalt annehmen, als in dem allgemeineren Falle, wird es möglich, zwei

*) Journal de mathématiques par J. Liouville, Tome IV, 1839. pag. 126 — 163 und 351 — 385.

verschiedene, d. h. nicht in constantem Verhältniß zu einander stehende Auflösungen der Differentialgleichung ersten Grades zweiter Ordnung zu finden, welche angiebt, wie ein gewisser Radiusvector als veränderliche Gröfse in den zu untersuchenden Wärmezustand, oder in den Ausdruck des Potentials eingeht. Bei der ersten Aufgabe ist das eine auch von *Lamé* angewandte particuläre Integral zu benutzen, bei der zweiten das andere; bei der dritten sind sie beide gehörig zu verbinden. Einfacher werden aber die Entwicklungen bei der Frage über die Rotations-Ellipsoïden, als bei der allgemeinen, indem man damit ausreicht, wenn man statt des Ellipsoïdes und der zwei Hyperboloïden, welche mit dem gegebenen gleiche Brennpuncte haben, deren Durchschnitt bei dieser jeden Punct bestimmt, bei jener mit einem Rotations-Ellipsoïd, einem Rotationshyperboloïd und einem der Länge entsprechenden Winkel ausreicht; die beiden Umdrehungskörper sind hinsichtlich ihrer grofsen Achsen veränderlich, ihre Brennpuncte aber fallen mit denen des gegebenen Ellipsoïdes zusammen. Noch einfacher gestaltet sich Alles, wenn man ein Rotations-Ellipsoïd mit denselben Brennpuncten, welche das gegebene hat, aber veränderlicher grofser Achse, und zwei veränderliche Winkel einführt, von denen der eine der Länge auf der Erde, der andere der Breite entspricht. Dadurch dafs man jeden Punct mittelst dieser Polarcoordinaten festlegt, gelingt es, indem man die bekannten, auch von *Lamé* gebrauchten Sätze *unmittelbar* anwenden kann, die drei Aufgaben für abgeplattete und verlängerte Rotations-Ellipsoïden zugleich durch Betrachtungen zu lösen, die fast die Einfachheit der bei denselben Untersuchungen für die Kugel angewandten erreichen. Die Entwicklung der hier angedeuteten Methode findet sich im Folgenden. Von den drei zu lösenden Aufgaben habe ich die erste und die dritte als der Wärmetheorie angehörig behandelt, da sie, so aufgefafst, ein gröfseres Interesse darbieten, als wenn man auch sie, wie es bei der zweiten geschehen ist, auf das Gebiet der Theorie der Anziehung überträgt.

§. 1.

Indem wir uns zu der Behandlung der Aufgaben wenden, bemerken wir, dafs die drei Fälle bis zu einem gewissen Puncte dieselben Formeln liefern; weshalb wir sie bis dahin gemeinsam führen könnten; jedoch ist es wegen der Kürze und Bestimmtheit im Ausdruck vorzuziehen, die dritte Aufgabe noch unberücksichtigt zu lassen. In §. 3., wo dieselbe aufgelöst wird, läfst sich das dazu Nöthige leicht nachholen. Man sieht leicht, dafs

die Trennung erst da nothwendig sein wird, wo die Bedingungen für die Oberfläche in Betracht kommen. Solche Bedingungen sind eben das Characteristische für die verschiedenen Körper, indem immer, wenn nach dem Gleichgewicht der Temperatur oder nach dem Potential gefragt wird, die Integration derselben Differentialgleichung

$$1. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

gefordert wird. Ist die Gleichung gehörig integrirt, so giebt die abhängige Veränderliche u für den Punct, dessen Coordinaten x, y, z sind, den verlangten Wärmezustand oder das Potential an. Die Bedingung, so wie sie gegeben ist, erscheint in so complicirter Gestalt, daß sie sich nach dem jetzigen Standpunct der Analysis nicht unmittelbar mit der Differentialgleichung verbinden läßt; denn es wird verlangt, daß ein Werth u gefunden werde, der nicht nur, in (1.) gesetzt, die linke Seite gleich 0 macht, sondern auch, wenn x, y, z durch die Gleichung

$$2. \quad \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{r_0^2 - e^2} = 1$$

verbunden sind, in eine willkürlich gegebene Function von x, y, z übergeht. In (2.) bezeichnet nämlich r_0 die Gröfse jeder der beiden gleichen Achsen des gegebenen Ellipsoides, e seine Excentricität, sie mag reell oder imaginär sein, d. h. das Ellipsoid sei ein (an den Polen) *abgeplattetes*, oder ein *verlängertes*.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, stellen wir uns, und zwar um die eben ausgesprochene Bedingung vereinfachen zu können, den ganzen Raum mit Ellipsoiden erfüllt vor, die mit dem gegebenen gleiche Brennpuncte haben. Bezeichnet man die Hälfte der Länge der einen von den beiden gleichen Achsen irgend eines von ihnen mit r , so ist die Gleichung der Oberfläche desselben:

$$2.* \quad \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2 - e^2} = 1.$$

Für den gegebenen Körper ist $r = r_0$ zu setzen. Offenbar läßt sich die Gleichung (2.*) durch folgende drei andern ersetzen:

$$3. \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \sqrt{r^2 - e^2} \cos \theta,$$

wo bei der ersten Aufgabe r für ein reelles e zwischen e und r_0 liegt, für ein imaginäres zwischen 0 und r_0 ; bei der zweiten zwischen r_0 und ∞ , θ zwischen 0 und π ; φ zwischen 0 und 2π . In allen Fällen reicht man

aus, wenn man r positive Werthe giebt. Die Aufgabe besteht nun darin, die Gleichung (1.), in welcher x, y, z durch (3.) verbunden sind, so zu integrieren, daß u für $r=r_0$ in eine gegebene endliche Function von θ und φ übergeht, z. B. in $f(\theta, \varphi)$. Eliminirt man aus (1.) durch (3.) die Werthe x, y, z auf die gewöhnliche Art, so hat man als zu integrierende Differentialgleichung:

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot (r^2 - e^2) + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{(2r^2 - e^2)}{r} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

und als Bedingung: $u = f(\theta, \varphi)$ für $r = r_0$.

Wird $e = 0$, so gehen r, θ, φ in die gewöhnlichen Coordinaten für die Kugel über; es verschwindet der in e multiplicirte Theil aus (4.) und man erhält

$$r \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} = 0;$$

d. h. die Differentialgleichung, welche bei der Kugel (4.) entspricht. Ueberhaupt werden auch die folgenden Formeln sich leicht auf eine endliche Gestalt bringen lassen, wenn $e = 0$ ist.

§. 2.

Die Herleitung der Formel (1.), so wie die von (4.), setzt voraus, daß sowohl u , als auch die ersten beiden Differentialquotienten von u , für die hierher gehörigen Werthe von x, y, z oder r, θ, φ , continuirlich bleiben. Es läßt sich also nach bekannten Sätzen u , insofern es eine Function der beiden Veränderlichen θ und φ ist, in eine Reihe von der Form $u = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ entwickeln, wo X_n eine rationale ganze Function n ten Grades von $\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi$ und $\sin \theta \sin \varphi$ bedeutet, die die Differentialgleichung

$$5. \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial X_n}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) X_n = 0$$

erfüllt *). Daß eine solche Entwicklung nur auf eine Art geschehen kann, ist gleichfalls bewiesen. Man kann sogar die einzelnen X_n in eine Summe von Producten zerlegen, von denen jedes aus drei Factoren besteht, nämlich erst-

*) Der ganze Beweis für die Möglichkeit einer solchen Entwicklung findet sich in gegenw. Journal f. d. Math. Bd. XVII., in: *Lejeune Dirichlet*, „sur les series dont le terme général dépend de deux angles etc.“

lich einem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen des Winkels φ (daß dieses Vielfache das n fache nicht übersteigen wird, ist klar, indem X_n natürlich auch eine rationale ganze Function n ten Grades von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ ist); zweitens einer rationalen ganzen Function von $\sin \theta$ und $\cos \theta$, und endlich einer Constanten, d. h. einem von θ und φ unabhängigen Werth. In unserem Falle wird diese Constante einen Parameter, r nämlich, enthalten, also nicht absolut unveränderlich sein, indem wir u als Function von θ und φ entwickelt haben, dieses u aber, wie man schon voraussieht, im Allgemeinen mit r veränderlich sein wird. Es ist demnach die allgemeine Form von X_n :

$$6. \quad X_n = \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m} (g_{n,m} \cos m \varphi + h_{n,m} \sin m \varphi)),$$

wo $g_{n,m}$ und $h_{n,m}$ die beschriebenen Constanten bezeichnen, $P_{n,m}$ aber die Function von $\sin \theta$ und $\cos \theta$ vorstellt. Letztere läßt sich in folgender geschlossenen Reihe darstellen:

$$6.* \quad P_{n,m} = \sin^m \theta \left(\cos^{n-m} \theta - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2 \cdot (2n-1)} \cos^{n-m-2} \theta \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} \theta - \dots \right) *).$$

Setzt man zunächst $u = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ in (4.) und ferner für das Differential der Summe der X_n die Summe der Differentiale dieser Function, so hat man:

$$7. \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2} \cdot (r^2 - e^2) + \frac{\partial X_n}{\partial r} \cdot \frac{(2r^2 - e^2)}{r} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial X_n}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} - \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} \right) = 0.$$

Die Summe des dritten und vierten Gliedes in dem unter dem Σ befindlichen Ausdruck ist nach (5.) gleich $-n(n+1)X_n$ zu setzen. Macht man ihn dann für den Augenblick $= Y_n$, so wird Y_n zur Classe der X_n gehören, d. h. in (5.) für X_n gesetzt, die linke Seite gleich Null machen. In der That gehören sowohl $-n(n+1)X_n$, als $\frac{\partial X_n}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2}$ und $\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2}$ zur Classe der X_n . Die Behauptung wegen der Differentiale von X_n wird sogleich gerechtfertigt, wenn man (5.) einmal nach r oder resp. zweimal nach r , oder endlich zweimal nach φ differentiirt. Erwägt man, daß $(r^2 - e^2)$ und $\frac{(2r^2 - e^2)}{r} - \frac{e^2}{r^2}$, unabhängig von θ und φ sind, so ist sogleich klar, daß wirklich Y_n zur Classe der X_n gehört.

*) Laplace, Mécanique céleste. Tome II. page 42.

Soll nun $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n = 0$ sein, so kann dieses wegen der so eben entwickelten Eigenschaft der Y_n nicht auf andere Art geschehen, als wenn jedes einzelne Glied gleich 0 ist. Man kann also das Summationszeichen der Gleichung (7.) weglassen und hat alsdann:

$$8. \quad \frac{\partial^2 X_n}{\partial r^2} \cdot (r^2 - e^2) + \frac{\partial X_n}{\partial r} \cdot \frac{(2r^2 - e^2)}{r} - n(n+1)X_n - \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Aus (8.), verbunden mit (6.), wird sich ohne Mühe zeigen lassen, wie $g_{n,m}$ und $h_{n,m}$ von r abhängen, so dafs dann nur noch die rein numerischen Gröfsen zu bestimmen bleiben, die aus der Bedingung an der Oberfläche entstehen. Setzt man dazu in (8.) für X_n seinen Werth aus (6.), so wird:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[P_{n,m} \left(\frac{\partial^2 g_{n,m}}{\partial r^2} (r^2 - e^2) + \frac{\partial g_{n,m}}{\partial r} \cdot \frac{2r^2 - e^2}{r} + g_{n,m} \left(\frac{e^2 m^2}{r^2} - n(n+1) \right) \right) \cos m\varphi + P_{n,m} \left(\frac{\partial^2 h_{n,m}}{\partial r^2} (r^2 - e^2) + \frac{\partial h_{n,m}}{\partial r} \cdot \frac{2r^2 - e^2}{r} + h_{n,m} \left(\frac{e^2 m^2}{r^2} - n(n+1) \right) \right) \sin m\varphi \right] = 0.$$

Soll nun eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels φ fortschreitende Reihe für alle Werthe von φ verschwinden, so mufs bekanntlich der Factor jedes einzelnen Cosinus oder Sinus der Reihe gleich Null sein. Man kann demnach wiederum das Summationszeichen weglassen und das in $\cos m\varphi$ und das in $\sin m\varphi$ Multiplicirte einzeln gleich 0 setzen. Da ferner die vorstehende Gleichung für jedes θ bestehen mufs, und nur für besondere Werthe dieser unabhängigen Veränderlichen $P_{n,m} = 0$ sein kann, so ist es erlaubt, auch den Factor von $P_{n,m} \cos m\varphi$ und $P_{n,m} \sin m\varphi$ gleich 0 zu setzen. Macht man nun $\frac{r}{e} = \varrho$, so hat man die beiden Gleichungen

$$9. \quad \frac{\partial^2 g_{n,m}}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho^2) + \frac{\partial g_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{(1 - 2\varrho^2)}{\varrho} + g_{n,m} \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) = 0,$$

$$9. * \quad \frac{\partial^2 h_{n,m}}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho^2) + \frac{\partial h_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{(1 - 2\varrho^2)}{\varrho} + h_{n,m} \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) = 0.$$

Für $r = r_0$ mag das entsprechende ϱ mit ϱ_0 bezeichnet werden. Ausserdem ist zu bemerken, dafs in der ersten Aufgabe für das abgeplattete Ellipsoid ϱ zwischen 1 und ϱ_0 liegt; für das verlängerte zwischen 0 und ϱ_0 ; bei der zweiten zwischen ϱ_0 und ∞ . e kann man, wenn es reell ist, positiv nehmen, so dafs dann ϱ positiv und reell ist: ist e imaginär, so wird ϱ imaginär. In letzterem Falle mag e , welchem man ein beliebiges Vorzeichen geben kann, so genommen werden, dafs ϱ gleich dem positiven

(reellen) Zahlwerth dieser Gröfse multiplicirt in i ist; i mag aber eine *bestimmte* Wurzel aus -1 bedeuten, die ich die positive nennen will. Ist dieses festgesetzt, so ist keine Zweideutigkeit möglich.

Es wird jetzt darauf ankommen, (9.) und (9.*) zu integriren. Eine partielle Lösung dieser Gleichungen läfst sich ohne Mühe finden, indem (9.), wenn man darin ϱ für den Augenblick gleich einem Sinus setzt, z. B. $= \sin \theta$, in

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial g_{n,m}}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) g_{n,m} = 0$$

übergeht; die Auflösung dieser Gleichung ist bekanntlich $P_{n,m}$. Man sieht leicht ein, dafs, wenn man ϱ für $\sin \theta$ wieder herstellt, die Form der endlichen Reihe (6.*) nur insofern verändert wird, dafs für $\sin \theta$ und $\cos \theta$ in dieser ϱ und resp. $\sqrt{1-\varrho^2}$ zu setzen ist, so dafs eine Auflösung der Gleichungen (9.) und (9.*) die folgende endliche Reihe sein wird:

$$10. \quad \varrho^m \left(\sqrt{1-\varrho^2}^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2 \cdot (2n-1)} \sqrt{1-\varrho^2}^{n-m-2} \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \sqrt{1-\varrho^2}^{n-m-4} \right).$$

Diese setzen wir zur Abkürzung $= P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$, so dafs das frühere $P_{n,m}$ jetzt gleich $P_{n,m}[\cos \theta]$ ist. Eine Zweideutigkeit ist hier nicht möglich, da für ein gegebenes θ der $\sin \theta$ und $\cos \theta$ nur *einen* Werth annehmen. Anders verhält es sich mit $P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$. Wie auch die Wurzel genommen wird, hat man ein particulaires Integral der Gleichungen (9.) und (9.*). Um einen eindeutigen Ausdruck zu haben, reicht es hin, festzusetzen, dafs für ein imaginäres ϱ die positive Wurzel der (reellen) Gröfse $1-\varrho^2$ zu nehmen sei: für ein reelles ϱ dagegen, für welches (s. oben) ϱ zugleich nicht kleiner als 1 sei, $\sqrt{1-\varrho^2}$ gleich der positiven Wurzel aus ϱ^2-1 multiplicirt in i sei. Wie man die P mit verschiedenen m , aber demselben n durch Differentialquotienten derselben Gröfse darstellen könne, findet man in *Anmerkung 1.* entwickelt; als bestimmte Integrale sind diese Functionen in *Anmerkung 2.* dargestellt.

Was die *zweite* Auflösung der Gleichungen (9.) und (9.*) betrifft, so scheint sie sich nicht eben so einfach wie die erste darstellen zu lassen, wenn man gleich alle Q (insofern man den Buchstaben Q , entsprechend dem P , für dieses particuläre Integral anwendet) mit demselben n , aber ver-

schiedenem m , auch hier durch Differentialquotienten derselben Gröfse darstellen kann (*Anmerkung 1.*). Jedenfalls kann man sich (*Anmerkung 3.*) für $Q_{n,m}$ einer der beiden Reihen bedienen:

$$11. \begin{cases} Q_{n,m} = \varrho^{-(n+1)} F(\tfrac{1}{2}(n+1-m), \tfrac{1}{2}(n+1+m), \tfrac{1}{2}(2n+3), \varrho^{-2}), \\ Q_{n,m} = \varrho^{-m} (\sqrt{1-\varrho^2})^{-(n-m+1)} F(\tfrac{1}{2}(n-m+1), \tfrac{1}{2}(n-m+2), \tfrac{1}{2}(2n+3), \frac{1}{1-\varrho^2}), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung die gewöhnliche Bezeichnung der hypergeometrischen Reihe angewandt, d. h. das Zeichen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ gesetzt ist. Wenn wir die obere Reihe (11.) bei den abgeplatteten Ellipsoïden gebrauchen, wo ϱ reell und nicht kleiner als 1 ist, die andere bei den verlängerten, wo $1-\varrho^2$ zwischen 1 und ∞ liegt, so werden wir convergirende Ausdrücke haben, indem $\alpha + \beta - \gamma$ nicht positiv ist *). Jedenfalls wird für $\varrho = 0$, ein Fall der nur bei dem verlängerten Ellipsoid eintreten kann, $Q_{n,m} = \infty$; selbst wenn $m = 0$ ist. Man hat nämlich in dem letzteren Falle ($\varrho = 0, m = 0$) aus der zweiten Gleichung in (11.):

$$Q_{n,m} = F(\tfrac{1}{2}(n+1), \tfrac{1}{2}(n+2), \tfrac{1}{2}(2n+3), 1);$$

welches unendlich ist, indem $\alpha + \beta - \gamma = 0$. In der *Anmerkung 4.* ist gezeigt, wie man aus vorhergehenden $Q_{n,m}$ und $P_{n,m}$ die nachfolgenden leicht berechnen kann.

Sollte es nöthig sein, auch den Q das Argument ϱ hinzuzufügen, so kann dies, wie bei den P , dadurch geschehen, dafs in (11.) für $Q_{n,m}$, $Q_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ gesetzt wird, und zwar der Gleichförmigkeit halber in beiden Formeln. Wird die Wurzel so bestimmt, wie es oben geschehen ist, und bemerkt man, dafs ϱ positiv genommen wird, so ist keine Zweideutigkeit möglich.

§. 3.

Setzt man für $g_{n,m}$ und $h_{n,m}$ ihre so eben gefundenen Werthe, nämlich die Summe der beiden particulären Integrale $P_{n,m}$ und $Q_{n,m}$, jedes in einen noch willkürlichen Zahlwerth multiplicirt, so geht (6.) in die folgende Gleichung über:

$$12. \quad X_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} (P_{n,m}[\cos \theta] \cdot P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}](k_{n,m} \cos m\varphi + l_{n,m} \sin m\varphi)) \\ + \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m}[\cos \theta] \cdot Q_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}](k'_{n,m} \cos m\varphi + l'_{n,m} \sin m\varphi)).$$

*) Comment. Gotting. Disquisitiones gen. circa ser. infin. etc. auct. Gauss pag. 19.

Wie auch k, l, k' und l' bestimmt sein mögen: immer wird X_n der Gleichung (4.) und (5.) genügen. Es wird sich zeigen, daß im Allgemeinen bei der ersten Aufgabe $k_{n,m}$ und $l_{n,m}$ von Null verschieden sein werden und daß dagegen $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ verschwinden müssen; bei der zweiten Frage verhält es sich grade umgekehrt; bei der dritten endlich werden alle k, l, k' und l' einen von Null verschiedenen Werth haben. Am leichtesten ist die Behandlung der zweiten Aufgabe; weshalb wir uns zunächst mit derselben beschäftigen wollen.

1. Es handelt sich hier darum, das Potential u eines mit Masse erfüllten Ellipsoids oder seiner mit Masse belegten Oberfläche für alle Punkte des äußern Raumes zu finden, wenn dasselbe für die auf der Oberfläche befindlichen als eine Function von θ und φ , z. B. $f(\theta, \varphi)$ gegeben ist. Offenbar verschwindet dieses für einen unendlich entfernten Punkt, d. h. man hat $u=0$ für $\varrho=\infty$; oder da $u=\sum_{n=0}^{\infty} X_n$, auch $X_n=0$ für $\varrho=\infty$. Macht man nun in (12.) $\varrho=\infty$, so wird $P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]=\infty$; dagegen $Q_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]=0$; es kann also X_n nicht für jedes φ gleich Null sein, wenn nicht $k_{n,m}=l_{n,m}=0$ ist. Läßt man in (12.) alle Constanten $k_{n,m}$ und $l_{n,m}$ verschwinden, so geht dies über in

$$12. \quad X_n = \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m}[\cos \theta] Q_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}] (k'_{n,m} \cos m\varphi + l'_{n,m} \sin m\varphi)).$$

Der Werth, den X_n für $\varrho=\varrho_0$ annimmt, ist durch die Bestimmung gegeben, daß für die Oberfläche u sich in $f(\theta, \varphi)$ verwandeln muß, welches bekanntlich nur geschehen kann, wenn man, für $\varrho=\varrho_0$,

$$13. \quad X_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} P_n f(\theta_1, \varphi_1) \partial \varphi_1$$

hat, wo P_n , oder, wie wir es auch mit Beifügung des Arguments nennen wollen, $P_n[\cos \gamma]$, den Coëfficienten der n ten Potenz von α bedeutet, wenn man $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha \cos \gamma + \alpha^2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von α entwickelt, und wo ferner zur Abkürzung $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$ gesetzt ist. Führt man die Reihen-Entwicklung der Wurzelgröße wirklich aus, so ist, wie man weiß,

$$P_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left(\cos^n \gamma - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \gamma + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} \gamma - \dots \right),$$

wodurch man auf der Stelle

$$P_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n} P_{n,0} [\cos \gamma] = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} P_{n,0} [\cos \gamma]$$

erhält.

Die Kenntniss des Werthes von X'_n für $\varphi = \varphi_0$ führt unmittelbar zur Bestimmung der Zahlwerthe $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$. Macht man nämlich für den Augenblick $\varphi = \varphi_0$ in (12.*), und das entstandene X_n gleich dem in (13.), so entsteht:

$$\begin{aligned} & \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} P_n f(\theta_1, \varphi_1) \partial \varphi_1 \\ &= \sum_{m=0}^{m=n} (P_{n,m} [\cos \theta] Q_{n,m} [\sqrt{1-\varphi_0^2}] (k'_{n,m} \cos m \varphi + l'_{n,m} \sin m \varphi)). \end{aligned}$$

Vermittelst eines Satzes, den *Laplace* an dem schon oben angeführten Orte bewiesen hat, läßt sich die linke Seite der vorstehenden Gleichung ebenfalls nach Sinus und Cosinus der Vielfachen des Winkels φ entwickeln, so daß wir jedem mit $\cos m \varphi$ oder $\sin m \varphi$ multiplicirten Gliede der rechten Seite ein Glied mit demselben Factor auf der linken Seite gleichsetzen können. In der That hat man

$$P_n [\cos \gamma] = \sum_{m=0}^{m=n} (a_{n,m} \cos m(\varphi - \varphi_1) P_{n,m} [\cos \theta] P_{n,m} [\cos \theta_1]),$$

wo zur Abkürzung $a_{n,m} = 2 \frac{(1.3.5\dots(2n-1))^2}{(n-m)!(n+m)!}$ gesetzt ist, $a_{n,0}$ aber $= \left(\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{(n)!} \right)^2$ ist. Schreibt man nun für $\cos m(\varphi - \varphi_1)$ seine Entwicklung $\cos m \varphi \cos m \varphi_1 + \sin m \varphi \sin m \varphi_1$, so hat man, vermöge der oben angedeuteten Operation,

$$k'_{n,m} = \frac{2n+1}{4\pi} \cdot a_{n,m} \cdot \frac{1}{Q_{n,m} [\sqrt{1-\varphi_0^2}]} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 P_{n,m} [\cos \theta_1] \int_0^\pi f(\theta_1, \varphi_1) \cos m \varphi_1 \partial \varphi_1,$$

$$l'_{n,m} = \frac{2n+1}{4\pi} \cdot a_{n,m} \cdot \frac{1}{Q_{n,m} [\sqrt{1-\varphi_0^2}]} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 P_{n,m} [\cos \theta_1] \int_0^\pi f(\theta_1, \varphi_1) \sin m \varphi_1 \partial \varphi_1.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (12.*) erlangen wir für das unserem Falle entsprechende u die Schlußformel

$$\begin{aligned} 14. \quad u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \sum_{m=0}^{m=n} (a_{n,m} P_{n,m} [\cos \theta] \frac{Q_{n,m} [\sqrt{1-\varphi^2}]}{Q_{n,m} [\sqrt{1-\varphi_0^2}]} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 P_{n,m} [\cos \theta_1] \right. \\ \left. \times \int_0^\pi f(\theta_1, \varphi_1) \cos m(\varphi - \varphi_1) \partial \varphi_1 \right). \end{aligned}$$

2. Wir gehen jetzt zu der Aufgabe über, den Zustand des Gleichgewichts der Wärme in einem Ellipsoid zu finden, an dessen Oberfläche

die durch $f(\theta, \varphi)$ ausgedrückte Temperatur erhalten wird. Man sieht leicht ein, daß man für das *verlängerte* Ellipsoid eine Endformel erhält, die aus der im vorhergehenden Falle entwickelten dadurch entsteht, daß für Q in (14.) der Buchstabe P gesetzt wird. Macht man nämlich in (12.) nicht mehr $\varphi = \infty$ (ein Werth den φ wohl bei der vorigen Frage, nicht aber bei dieser erlangen kann), sondern $\varphi = 0$, so wird $Q_{n,m}[\sqrt{(1-\varphi^2)}] = \infty$ (§ 2.): also wird, da $P_{n,m}[\sqrt{(1-\varphi^2)}]$ endlich bleibt, X_n nicht für alle θ und φ einen endlichen Werth einnehmen können, wenn nicht $k'_{n,m} = l'_{n,m} = 0$ wird. Von hier an giebt ein, dem in No. 1. angewandten ganz ähnliches Verfahren,

$$15. \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4\pi} \sum_{m=0}^{m=n} (a_{n,m} P_{n,m}[\cos\theta] \frac{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varphi^2)}]}{P_{n,m}[\sqrt{(1-\varphi_0^2)}]} \int_0^\pi \partial\theta_1 \sin\theta_1 P_{n,m}[\cos\theta_1] \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) \cos m(\varphi - \varphi_1) \partial\varphi_1 \right).$$

Ist das Ellipsoid ein *abgeplattetes*, so wird dieselbe Formel (15.) den fraglichen Wärmezustand angeben; jedoch muß ein Beweis dieser Behauptung hinzugefügt werden, indem die Herleitung von (15.) verlangte, daß es erlaubt sei, $\varphi = 0$ zu setzen. Daß (15.) auch in dem Falle des abgeplatteten Ellipsoides (4.) genügt, ist klar, da sie nur ein specieller Werth von (12.) ist. Daß (15.) ferner für die Oberfläche ($\varphi = \varphi_0$) in $f(\theta, \varphi)$ übergeht, folgt sogleich aus bekannten Resultaten: daß (15.) aber bei den abgeplatteten Ellipsoiden noch convergirt, bedarf eines Beweises, der in No. 1., so wie für die verlängerten Ellipsoiden in dieser Nummer unnöthig ist. Denn es ist klar, daß den Annahmen in diesen Fällen ein und nur ein Wärmezustand oder Potential entspricht; wenn ihnen aber überhaupt ein Wärmezustand (Potential) entspricht, so kann es kein anderer (anderes) als der (des) in (15.) (resp. 14.) sein, indem zunächst u sich immer, und immer nur auf eine Art in eine Reihe von X_n entwickeln läßt, und zwar dieses wiederum nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von φ , indem endlich ein u , oder vielmehr das u nothwendig durch (12.) dargestellt werden muß. Indem wir $\varphi = \infty$ oder $\varphi = 0$ machten, folgte wiederum mit Nothwendigkeit, daß je zwei Gruppen von Constanten Null sein müssen; und dann ergeben sich für die übrig bleibenden Gruppen Werthe, die (14.) und (15.) hervorbringen. Sind $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ gleich Null gesetzt, so erhält man (15.). Die *Natur* des Problems verlangte eine solche Bestimmung für die verlängerten Ellipsoiden: für die abgeplatteten liegt in ihr die Willkürlichkeit, die das Bedürfnis eines Beweises für diese Körper hervorruft,

der, wie oben auseinander gesetzt ist, darin besteht, daß man zeigen muß, daß die Formel (15.) auch für abgeplattete Ellipsoïden eine convergente Reihe bildet. Ist $\varrho = \varrho_0$, so ist dieses bewiesen: ist aber $\varrho < \varrho_0$, so kann eine Divergenz wegen des Vorzeichens der einzelnen Glieder stattfinden. Hätte man die früheren Aufgaben als rein mathematische, nicht als physikalische betrachtet, so müßte auch für diese ein Convergenzbeweis geliefert werden, welcher dann dem ganz ähnlich geführt werden könnte, welcher sich in der Anmerkung 5. findet.

3. Bei der dritten Aufgabe, in welcher nach dem von der Zeit unabhängigen Wärmezustand in einem von zwei ellipsoïdischen Oberflächen mit gleichen Brennpuncten begrenzten Körper gefragt wird, werden außer der Gleichung (1.) noch zwei Bedingungen zu berücksichtigen sein. Es muß nämlich nicht nur $u = f(\theta, \varphi)$ für $\varrho = \varrho_0$ sein, sondern auch an der andern Grenzfläche, für die $\varrho = \varrho_1$ sein mag, muß u in eine willkürlich gegebene Function von θ und φ z. B. $\psi(\theta, \varphi)$ übergehen. Setzt man wieder $u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$, so wird (12.) die allgemeine Formel von X_n darstellen. In dieser Gleichung wird der besondere Werth ϱ_0 von ϱ ein gewisses X_n hervorbringen, welches mit X_n^0 bezeichnet werden mag; ϱ_1 mag X_n^1 entsprechen; es wird dann möglich sein, die vier Gruppen von Constanten $k_{n,m}$, $l_{n,m}$, $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ zu bestimmen, indem X_n^0 gleich dem durch (13.) gegebenen X_n sein muß; ferner X_n^1 gleich einem Ausdruck, der aus (13.) durch Vertauschung des φ mit ψ entsteht. Setzt man für P_n die schon oben angewandte, nach Cosinus und Sinus der Vielfachen des Winkels φ fortschreitende Reihe, und beobachtet wieder, daß die Coëfficienten von $\cos m\varphi$ und resp. $\sin m\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen müssen, so hat man vier ähnlich gebildete Formeln, von welchen die eine

$$\begin{aligned} & k_{n,m} P_{n,m} [\sqrt{1-\varrho_0^2}] + k'_{n,m} Q_{n,m} [\sqrt{1-\varrho_0^2}] \\ &= \frac{2n+1}{4\pi} Q_{n,m} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 P_{n,m} [\cos \theta_1] \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) \cos m\varphi_1 \partial \varphi_1 \end{aligned}$$

ist. Vertauscht man rechts ψ mit f , so hat man links ϱ_1 für ϱ_0 zu setzen; schreibt man rechts $\sin m(\varphi - \varphi_1)$ für $\cos m(\varphi - \varphi_1)$, so ist links $k_{n,m}$ und $k'_{n,m}$ in $l_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ zu verändern. Aus den so entstandenen vier Gleichungen lassen sich auf die gewöhnliche Weise $k_{n,m}$, $l_{n,m}$, $k'_{n,m}$ und $l'_{n,m}$ eliminiren; setzt man dann die Werthe dieser Constanten in (12.) ein, so hat man als Endformel:

$$16. \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_{n,m} P_{n,m} [\cos \theta] \cdot \frac{1}{P_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}] Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_1^2)}] - P_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_1^2)}] Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} \right. \right. \\ \left. \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 P_{n,m} [\cos \theta_1] \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) (Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_1^2)}] P_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}] - Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}] P_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_1^2)}]) \right. \\ \left. \left. + \psi(\theta_1, \varphi_1) (Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}] P_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}] - P_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}] Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]) \cos m(\varphi - \varphi_1) \partial \varphi_1 \right) \right\}.$$

§. 4.

Die Gleichungen (14.), (15.), (16.) gelten auch noch, wenn $e = 0$ ist oder wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht. So wird z. B. in (14.) für $e = 0$ zwar $\varrho = \infty$ und $\varrho_0 = \infty$, aber das Verhältniß $\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{er_0}{er}$ nimmt den im Allgemeinen endlichen Werth $\frac{r_0}{r}$ an. Aus den Formeln (11.) sieht man ferner, daß $Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}]$ sich mit wachsendem ϱ der Grenze $\frac{1}{\varrho^{n+1}}$ nähert, wenn man einen von ϱ unabhängigen Factor unberücksichtigt läßt, der sich also forthebt, wenn man den Quotienten zweier Q mit gleichen m und n bildet. Es ist demnach $\frac{Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,m} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{n+1} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+2}$, also unabhängig von m , so daß man die Summation nach m ausführen kann, indem der schon oben angewandte, von *Laplace* abgeleitete Satz

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_{n,m} P_{n,m} [\cos \theta] P_{n,m} [\cos \theta_1] \cos m(\varphi - \varphi_1)) = P_n [\cos \gamma],$$

$P_n [\cos \gamma]$, oder schlechtweg gleich P_n giebt. Für die Kugel geht also das u aus (14.) in

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} \int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) P_n \partial \varphi_1 \right)$$

über; welches auch mit der auf gewöhnlichem Wege abgeleiteten Formel für die Aufgabe, um die es sich hier handelt, übereinstimmt.

Unter den speciellen Werthen der gegebenen Function $f(\theta, \varphi)$ verdienen zwei Beachtung: zuerst der wenn die Function von φ , dann aber der wenn sie zugleich von θ und φ unabhängig ist. Im ersten Falle mag $f(\theta, \varphi) = \chi(\theta)$ sein, so wird

$$\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) \cos m(\varphi - \varphi_1) \partial \varphi_1 = \chi(\theta) \int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi_1) \partial \varphi_1$$

gleich 0 oder 2π , je nachdem $m > 0$ oder $m = 0$ ist. In den vollständigen Ausdrücken für u reducirt sich demnach jede Summe nach m auf ihr erstes Glied, so daß man z. B. für das u in (14.) erhält:

$$17. \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \cdot a_{n,0} \cdot \frac{Q_{n,0} [\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{Q_{n,0} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} \cdot P_{n,0} [\cos \theta] \int_0^\pi \partial \theta \sin \theta P_{n,0} [\cos \theta] \chi(\theta) \right).$$

Berücksichtigt man den Zahlwerth von $a_{n,0}$ und den Zusammenhang der Function $P_n[\cos \theta]$ mit $P_{n,0}[\cos \theta]$, so geht (17.) in die einfachere Gestalt

$$17.* \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{Q_{n,0}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{Q_{n,0}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]} \cdot P_n[\cos \theta] \int_0^\pi \partial \theta \sin \theta P_n[\cos \theta] \chi(\theta) \right)$$

über. Hätte man auch in (15.) $f(\theta, \varphi) = \chi(\theta)$ gesetzt, so wäre eine Formel entstanden, die aus (17.*) hervorgeht, wenn man darin $\frac{Q_{n,0}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{Q_{n,0}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]}$ mit $\frac{P_{n,0}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{Q_{n,0}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]}$ vertauscht.

Ist $\chi(\theta)$ nun auch von θ unabhängig, d. h. gleich einer Constanten k , so ist $\int_0^\pi \partial \theta \sin \theta P_{n,0}[\cos \theta]$, also auch $\int_0^\pi \partial \theta \sin \theta P_n[\cos \theta]$ gleich 0, so lange n von 0 verschieden ist; für $n = 0$ wird dagegen $\int_0^\pi \partial \theta \sin \theta P_n[\cos \theta] = 2$ (Anmerkung 6.), so daß sich unter der letzten Annahme (17.*) in

$$17.** \quad u = K \cdot \frac{Q_{0,0}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{Q_{0,0}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]}$$

verwandelt. Aus (15.) hätte man erhalten

$$u = K \cdot \frac{P_{0,0}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{0,0}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]} = K.$$

Es läßt sich übrigens (17.***) in eine übersichtlichere Form bringen, wenn man für $Q_{0,0}$ seinen Werth aus Anmerkung 3. setzt, wodurch man für abgeplattete Ellipsoiden

$$u = k \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{\varrho_0}\right)}$$

erhält; wo der Arcus so zu nehmen ist, daß er für $\varrho = \infty$ verschwindet, für $\varrho = 1$ aber $= \frac{1}{2}\pi$ wird. Für verlängerte Ellipsoiden hat man

$$u = k \cdot \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1-\varrho^2}+1}{\sqrt{1-\varrho^2}-1}\right)}{\log\left(\frac{\sqrt{1-\varrho_0^2}+1}{\sqrt{1-\varrho_0^2}-1}\right)}.$$

Aus dem Obigen übersieht man leicht, wie die Formel (16.) sich verändern wird, wenn man in ihr nicht nur $f(\theta, \varphi) = k$, sondern auch $\psi(\theta, \varphi)$ constant $= k'$ setzt. Für abgeplattete Ellipsoiden geht nämlich (16.) in

$$18. \quad u = \frac{k\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varrho_1}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + k'\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\varrho_0}\right)\right)}{\arcsin\left(\frac{1}{\varrho_1}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\varrho_0}\right)}$$

über, wo der Arcus wie oben zu verstehen ist; für verlängerte dagegen in

$$19. \quad u = \frac{\log \left(\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho_1^2)+1}}{\sqrt{(1-\varrho_1^2)-1}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\varrho^2)-1}}{\sqrt{(1-\varrho^2)+1}} \right)^k \cdot \left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)+1}}{\sqrt{(1-\varrho^2)-1}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\varrho_0^2)-1}}{\sqrt{(1-\varrho_0^2)+1}} \right)^{k'} \right)}{\log \left(\frac{\sqrt{(1-\varrho_1^2)+1}}{\sqrt{(1-\varrho_1^2)-1}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\varrho_0^2)-1}}{\sqrt{(1-\varrho_0^2)+1}} \right)}.$$

Man sieht hieraus, daß die verschiedenen Ellipsoïden mit gleichen Brennpuncten, deren große oder resp. kleine Halb-Achsen ϱ sind, isotherme Flächen vorstellen; die Temperatur eines jeden von ihnen, die eben nach dem Begriffe der isothermen Fläche auf der ganzen Ausdehnung eines bestimmten Ellipsoïds unveränderlich ist, wird durch (18.) oder (19.) gegeben, deren allgemeine Form:

$$18.* \quad u = a \cdot \arcsin \left(\sin = \frac{1}{\varrho} \right) + b,$$

$$19.* \quad u = \mathfrak{A} \cdot \operatorname{tang} \left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)+1}}{\sqrt{(1-\varrho^2)-1}} \right) + \mathfrak{B}$$

ist, wo a , b , $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von ϱ unabhängige Größen bedeuten. In dieser Gestalt stimmen unsere Formeln mit denen überein, welche *Lamé* als spezielle Fälle in einer Abhandlung über isotherme Flächen hergeleitet hat*),

[indem (18.*) sich auch in

$$u = \alpha \cdot \arccos \left(\cos = \frac{1}{\varrho} \right) + \beta$$

verändern läßt, (19.*) in

$$u = \alpha' \log \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)-1}}{\sqrt{(1-\varrho^2)+1}} \right) + \beta'};$$

wo er untersucht, wie ein Körper beschaffen sein muß, damit er, wenn seine innere und äußere Grenzfläche in constanten Temperaturen erhalten werden, Ellipsoïden zu isothermen Flächen hat.

Von den drei Fragen, deren Auflösungen durch (14.), (15.), (16.) gegeben werden, hat *Lamé* nur die eine, welche (15.) beantwortet, behandelt. Daß sein Resultat mit (15.) übereinstimmt, ist in der *Anmerkung 7.* gezeigt, indem die E bei *Lamé* den P , die bestimmten Integrale im Nenner bei ihm den $a_{n,m}$ entsprechen.

*) *Liouville*, Journal de mathématiques. Tome II. pag. 147. Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.

Anmerkung 1.

Die Differentialgleichung (9.) oder (9.*), nemlich

$$\frac{\partial^2 z_{n,m}}{\partial \varrho^2} (1 - \varrho^2) + \frac{\partial z_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{(1 - 2\varrho^2)}{\varrho} + z_{n,m} \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) = 0,$$

von welcher wir zwei particuläre Integrale mit $P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ und $Q_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ bezeichnet haben, geht, wenn man $x = \sqrt{1-\varrho^2}$ setzt, die Wurzel so verstanden wie oben, in die Form

$$20. \quad (1-x^2)^2 \cdot \frac{\partial^2 z_{n,m}}{\partial x^2} - 2x(1-x^2) \frac{\partial z_{n,m}}{\partial x} + z_{n,m} (n(n+1) - m^2 - n(n+1)x^2) = 0$$

über. Macht man $z_{n,m} = \varrho^{-m} \cdot v_{n,m} = (\sqrt{1-x^2})^{-m} v_{n,m}$, so muß $v_{n,m}$ der Differentialgleichung

$$21. \quad (1-x^2) \cdot \frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} + 2(m-1)x \cdot \frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} + (n(n+1) - m(m-1)) v_{n,m} = 0$$

genügen. Diese verwandelt sich durch Differentiation nach x in

$$(1-x^2) \cdot \frac{\partial^3 v_{n,m}}{\partial x^3} + 2(m-2)x \cdot \frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} + (n(n+1) - (m-1)(m-2)) \cdot \frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = 0.$$

Durch Vergleichung mit (21.), wenn man dort $m-1$ für m setzt, ergibt sich sogleich, daß $v_{n,m-1} = \frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}$ ist, wenn man die vorkommende Constante unberücksichtigt läßt. Ebenso ist auch $\frac{\partial v_{n,m-1}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} = v_{n,m-2}$ etc., und allgemein, wenn p eine ganze positive Zahl bedeutet, die m nicht übertrifft,

$$\frac{\partial^p v_{n,m}}{\partial x^p} = v_{n,m-p}.$$

Setzt man $m=n$, so lassen sich folglich aus *einem* v , nämlich $v_{n,n}$, alle übrigen mit gleichen n bestimmen, indem

$$\frac{\partial^p v_{n,n}}{\partial x^p} = v_{n,n-p}, \quad \frac{\partial^{n-m} v_{n,n}}{\partial x^{n-m}} = v_{n,m}.$$

Die Definition von $v_{n,n}$ ist durch die Gleichung

$$21.* \quad (1-x^2) \cdot \frac{\partial^2 v_{n,n}}{\partial x^2} + 2(n-1)x \cdot \frac{\partial v_{n,n}}{\partial x} + 2n v_{n,n} = 0$$

gegeben, deren eine Auflösung $(x^2-1)^n$ ist, während die andere sich z. B. in Form einer Reihe aufstellen läßt, die nach Potenzen von x aufsteigt oder absteigt, je nachdem x , wenn es reell ist, oder der reelle Theil von x , wenn es imaginär ist, positiv genommen, die positive Einheit übertrifft, oder nicht übertrifft. Bezeichnen wir diese zweite particuläre Auflösung mit q_n , so ist

$$v_{n,n} = c_{n,0} \cdot (x^2 - 1)^n + c'_{n,0} q_n,$$

$$v_{n,m} = c_{n,m} \cdot \frac{\partial^{n-m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-m}} + c'_{n,m} \cdot \frac{\partial^{n-m} q_n}{\partial x^{n-m}};$$

endlich

$$22. \quad z_{n,m} = c_{n,m} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\partial^{n-m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-m}} + c'_{n,m} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\partial^{n-m} q_n}{\partial x^{n-m}}.$$

Es ist zu bemerken, daß der mit $c_{n,m}$ multiplicirte Theil von (22.) zu dem Ausdruck, welcher entsteht, wenn man darin $-m$ mit m vertauscht, in einem constanten Verhältniß steht, so daß auch

$$23. \quad z_{n,m} = k_{n,m} \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n+m}} + c'_{n,m} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\partial^{n-m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-m}}$$

ist. Gerechtfertigt wird diese Behauptung durch die von *Jacobi* bewiesene Gleichung

$$24. \quad \frac{1}{(n-m)!} \cdot \frac{\partial^{n-m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-m}} = \frac{(x^2 - 1)^m}{(n+m)!} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n+m}} *).$$

Der in $k_{n,m}$ multiplicirte Theil von (23.) unterscheidet sich nur durch eine Constante von $P_{n,m}[\sqrt{1-\varphi^2}]$ oder $P_{n,m}[x]$, so daß der in $c'_{n,m}$ multiplicirte Theil derselben Gleichung von $Q_{n,m}[x]$ gleichfalls nur durch eine Constante unterschieden sein kann; womit bewiesen ist, wie §. 2. verlangt wurde, daß sich alle P mit gleichem n aber verschiedenem m durch Differentialquotienten derselben GröÙe darstellen lassen; und dasselbe für die Q . Um den in $k_{n,m}$ multiplicirten Theil auf die Form der Reihe (10.) zu bringen, kann man $(x^2 - 1)^n$ z. B. p mal nach x differentiiren, welches die Gleichung

$$\frac{\partial^p(x^2 - 1)^n}{\partial x^p} = (2n)(2n-1)(2n-2) \dots (2n-p+1) \left(x^{2n-p} - \frac{(2n-p)(2n-p-1)}{2 \cdot (2n-1)} x^{2n-p-2} \right. \\ \left. + \frac{(2n-p)(2n-p-1)(2n-p-2)(2n-p-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{2n-p-4} - \dots \right)$$

gibt. Macht man darauf $p=n+m$ und multiplicirt auf beiden Seiten mit $(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}$, so hat man auf der linken Seite $(1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-m}}$, rechts aber $(2n)(2n-1)(2n-2) \dots (n-m+1)$, multiplicirt in $P_{n,m}[x]$. Es ist also

$$25. \quad P_{n,m}[x] = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}m}}{(n-m+1)(n-m+2) \dots (2n)} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n+m}},$$

oder auch, mit Anwendung von (24.),

$$25.* \quad P_{n,m}[x] = \frac{(-1)^m \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}m}}{(n+m+1)(n+m+2) \dots (2n)} \cdot \frac{\partial^{n-m}(x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-m}}.$$

*) Gegenw. Journal Bd. II. pag. 225.

Es sei noch bemerkt, daß wenn man $z_{n,m} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}m} \cdot u_{n,m}$ gemacht hätte, Resultate für $u_{n,m}$ entstanden wären, ganz ähnlich denen, welche für $v_{n,m}$ im Vorhergehenden entwickelt worden sind. Der Zusammenhang zwischen $u_{n,m}$ und $v_{n,m}$, welcher aus der ersten und der eben angegebenen Substitution folgt, würde dann von selbst das hier entlehnte Resultat, welches durch (24.) ausgedrückt wird, gegeben haben.

Anmerkung 2.

Bekanntlich ist

$$26. \quad ((x+h)^2-1)^n = (x^2-1)^n + \frac{h}{1} \cdot \frac{\partial (x^2-1)^n}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 (x^2-1)^n}{\partial x^2} + \dots \\ \dots + \frac{h^{2n}}{1.2.3 \dots (2n)} \cdot \frac{\partial^{2n} (x^2-1)^n}{\partial x^{2n}}.$$

Multipliziert man (26.) auf beiden Seiten mit $\frac{1}{h^n}$, macht darauf $h = i\gamma\varphi$, wo $i = \sqrt{-1}$ und $\varphi = \sqrt{1-x^2}$ gesetzt ist, die Wurzelzeichen so verstanden, wie sie schon oben erklärt wurden, und ordnet dann nach Potenzen von γ , so werden nach (24.) die Coefficienten von $(\varphi i\gamma)^{-n+m}$ und $(\varphi i)^{-n+m} \cdot \gamma^{n-m}$ einander gleich. Es sind diese nämlich

$$\frac{1}{(m)!} \cdot \frac{\partial^m (x^2-1)^n}{\partial x^m} \quad \text{und} \quad \frac{(-\varphi^2)^{n-m}}{(2n-m)!} \cdot \frac{\partial^{2n-m} (x^2-1)^n}{\partial x^{2n-m}}.$$

Man hat demnach:

$$27. \quad (\gamma i\varphi)^{-n} ((x+h)^2-1)^n = (i\varphi)^{-n} \cdot \sum_{m=0}^{n=n} \left(\frac{(i\varphi)^m}{(m)!} \cdot (\gamma^{n-m} + \gamma^{-n+m}) \cdot \frac{\partial^m (x^2-1)^n}{\partial x^m} \right),$$

wo unter $(0)!$ die Einheit zu verstehen ist und unter $\frac{\partial^0 (x^2-1)^n}{\partial x^0}$ die Function $(x^2-1)^n$ selbst; wo endlich für $m=n$ die Hälfte des auf der rechten Seite entstehenden Werthes genommen werden muß, indem nur ein Glied mit jeder Potenz von γ multiplicirt ist, hier aber γ^{n-m} mit γ^{-n+m} zusammenfällt. Macht man daher $\gamma = e^{i\varphi}$, so entsteht (da $\gamma^{n-m} + \gamma^{-n+m} = 2 \cos(n-m)\varphi$):

$$28. \quad 2^n (x + \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^n \\ = \frac{1}{(n)!} \cdot \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{\partial x^n} + 2 \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}m}}{(n-m)!} \cdot \frac{\partial^{n-m} (x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} \cdot \cos m\varphi \right) *).$$

Es ist zu bemerken, daß in (28.), in Folge der Gleichung (24.), m mit $-m$ unter dem Summenzeichen vertauscht werden kann. Setzt man für die

*) Dadurch, daß man $(1+x \cos \varphi)^n$ nach Cosinus der Vielfachen des Winkels φ entwickelt (Institut. calc. integr. Vol. I. cap. VI) geht das einfache Bildungsgesetz der Coefficienten, welches sich bei der Entwicklung eines Ausdrucks von der Form $(x + \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^n$ herausstellt, verloren.

Differentialquotienten von $(x^2-1)^n$ ihre Werthe aus Anmerkung 1., so wird

$$29. \quad (x + \cos \varphi \sqrt{(x^2-1)})^n$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n \cdot (n)!} \cdot P_{n,0}[x] + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{m=1}^{n-1} \left(i^m \cdot \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(2n)}{(n+m)!} \cdot P_{n,m}[x] \cos m\varphi \right),$$

$$30. \quad P_{n,m}[x] = \frac{2^n}{\pi} \cdot \frac{i^{-m}}{(2n)!} \cdot (n-m)! (n+m)! \int_0^\pi (x + \cos \varphi \sqrt{(x^2-1)})^n \cos m\varphi \, d\varphi;$$

den Fall $m=0$ nicht ausgeschlossen.

Aus der Betrachtung des bestimmten Integrals in (30.) lassen sich durch Differentiiren unter dem Integral die $P_{n,m}[x]$ durch Differentialquotienten der Function $(x^2-1)^n$ ebenso ausdrücken, wie es in der vorigen Anmerkung geschehen ist. Das dabei anzuwendende Verfahren ist dem ganz ähnlich, welches bei der Auflösung der Differentialgleichung auseinander-gesetzt ist. Dabei ergibt sich von selbst die Fundamentalgleichung (24.).

Anmerkung 3.

Hier soll die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z_{n,m}}{\partial \varrho^2} \cdot (1-\varrho^2) + \frac{\partial z_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{(1-2\varrho^2)}{\varrho} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) z_{n,m} = 0$$

noch einmal betrachtet werden, um daraus bequeme Formeln für $Q_{n,m}[x]$ zu finden. Bei dieser Gelegenheit wird man wieder die Auflösung $P_{n,m}[x]$ finden, die dann so einzurichten ist, d. h. deren Constante so zu wählen ist, daß sie mit dem, was sie in den frühern Anmerkungen bedeutete, übereinstimmt.

Es mag ϱ nicht kleiner als 1 sein: eine Bedingung, die zufolge unserer Aufgabe erfüllt wird, so oft e reell ist; bei imaginärem ϱ mag dieses so verstanden werden, daß der positive reelle Zahlwerth von ϱ nicht kleiner als 1 ist. Versucht man dann, die vorliegende Gleichung durch Reihen zu integriren, welche nach Potenzen von ϱ absteigen, so erhält man:

$$31. \quad z_{n,m} = c_{n,m} \cdot \varrho^n \left(1 - \frac{n^2 - m^2}{n(n+1) - (n-1)(n-2)} \cdot \varrho^{-2} \right. \\ \left. + \frac{(n^2 - m^2)((n-2)^2 - m^2)}{(n(n+1) - (n-1)(n-2))(n(n+1) - (n-3)(n-4))} \cdot \varrho^{-4} + \dots \right) \\ + k_{n,m} \varrho^{-(n+1)} \left(1 + \frac{(n+1)^2 - m^2}{(n+2)(n+3) - n(n+1)} \cdot \varrho^{-2} \right. \\ \left. + \frac{((n+1)^2 - m^2)((n+3)^2 - m^2)}{((n+2)(n+3) - n(n+1))((n+4)(n+5) - n(n+1))} \cdot \varrho^{-4} + \dots \right).$$

Wie solche Integrationen auszuführen sind, ist hinlänglich bekannt; man erhält den obigen Ausdruck sogleich aus den von *Euler* *) angegebenen Formeln, die für eine Differentialgleichung entwickelt sind, von der die unsrige ein specieller Fall ist. Durch Anwendung der identischen Formel

$$z(z+1) - n(n+1) = (z-n)(z+n+1)$$

läßt sich sowohl der mit $c_{n,m}$ als auch der mit $k_{n,m}$ multiplicirte Theil von (31.) auf die Gestalt einer hypergeometrischen Reihe bringen; und zwar hat man, mit Benutzung der schon früher gebrauchten gewöhnlichen Bezeichnungsart:

$$z_{n,m} = c_{n,m} \varrho^n F\left(-\frac{1}{2}(n+m), -\frac{1}{2}(n-m), \frac{1}{2}(2n-1), \varrho^{-2}\right) \\ + k_{n,m} \varrho^{-(n+1)} F\left(\frac{1}{2}(n+1-m), \frac{1}{2}(n+1+m), \frac{1}{2}(2n+3), \varrho^{-2}\right).$$

Man bemerkt sogleich, daß der Factor von $k_{n,m}$ das ist, was wir (11.) mit $Q_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ für das abgeplattete Ellipsoid bezeichnet haben, so daß nur noch die zweite Form dieses particulären Integrals zu entwickeln bleibt, welche sich auf das verlängerte Ellipsoid bezieht. Der Weg, welcher uns zu dieser führen wird, mag jedoch nur als ein heuristischer betrachtet werden, da einige Uebergänge durch divergirende Reihen geschehen. Nichtsdestoweniger wird das Resultat brauchbar: denn wie man durch wirkliche Differentiation leicht einsieht, genügt dasselbe der Differentialgleichung, ist aber zugleich für die vorkommenden Werthe von ϱ eine convergente Reihe (§. 2.). Die Relationen, welche *Kummer* **) zwischen hypergeometrischen Reihen mit verschiedenen Elementen angegeben hat, werden uns ohne Mühe die verlangte Formel verschaffen. Von den vielen, in seiner Abhandlung angegebenen Gleichungen benutzen wir die folgenden:

$$(\text{No. 49.}) \quad F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, x) = F(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-x})),$$

$$(\text{No. 55.}) \quad F(\alpha, \beta, \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1), x) \\ = (1-2x)^{-\alpha} F\left(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}(\alpha+1), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1), \frac{4x^2-4x}{4x^2-4x+1}\right).$$

Durch die erste Gleichung geht der mit $k_{n,m}$ multiplicirte Theil in

$$\varrho^{-(n+1)} F\left(n+1-m, n+1+m, \frac{1}{2}(2n+3), \frac{\varrho - \sqrt{\varrho^2-1}}{2\varrho}\right)$$

über, und dieses wiederum durch (No. 55.) in

$$\left(\frac{\sqrt{\varrho^2-1}}{\varrho}\right)^{-(n+1-m)} \cdot \varrho^{-(n+1)} \cdot F\left(\frac{1}{2}(n+1-m), \frac{1}{2}(n+2-m), \frac{1}{2}(2n+3), \frac{1}{1-\varrho^2}\right)$$

*) Instit. calc. integr. Vol. II. Sect. I. Cap. VIII.

**) Gegenw. Journal Bd. XV. pag. 77 u. 78.

oder

$$= i^{-(n+1-m)} \cdot \varrho^{-m} \cdot (\sqrt[3]{1-\varrho^2})^{-(n+1-m)} \cdot F\left(\frac{1}{2}(n+1-m), \frac{1}{2}(n+2-m), \frac{1}{2}(2n+3), \frac{1}{1-\varrho^2}\right).$$

Macht man also $k_{n,m} = i^{n+1-m}$, so hat man die zweite Formel in (11.).

Der mit $c_{n,m}$ multiplicirte Theil nimmt durch (No. 49.) die Gestalt

$$\varrho^n F\left(-\frac{1}{2}(n+m), -\frac{1}{2}(n-m), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{\varrho - \sqrt[3]{\varrho^2-1}}{2\varrho}\right)$$

an; dann durch (No. 55.) die doppelte Form (da $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x)$)

$$32. \quad \varrho^{-m} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(n+m)} \cdot (\sqrt[3]{1-\varrho^2})^{n+m} \cdot F\left(-\frac{1}{2}(n+m), -\frac{1}{2}(n+m-1), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{1}{1-\varrho^2}\right),$$

oder

$$33. \quad \varrho^m \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(n-m)} \cdot (\sqrt[3]{1-\varrho^2})^{n-m} \cdot F\left(-\frac{1}{2}(n-m), -\frac{1}{2}(n-m-1), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{1}{1-\varrho^2}\right).$$

Den letzten Theil, dividirt durch $(-1)^{\frac{1}{2}(n-m)}$, haben wir $P_{n,m}[\sqrt[3]{1-\varrho^2}]$ genannt, so daß der in $c_{n,m}$ multiplicirte Theil von (31.) zu $P_{n,m}[\sqrt[3]{1-\varrho^2}]$ das Verhältniß $(-1)^{\frac{1}{2}(n-m)}:1$ hat: ein Resultat, welches hier wegen der letzten Anmerkung angeführt werden muß. Wenn es sich gleich schon durch bedeutend einfachere Schlüsse herleiten läßt, so schien doch die *Zurückführung* des einen Polynoms auf das andere wünschenswerth. Endlich sei noch bemerkt, daß durch Gleichsetzung von (32.) und (33.) folgender andere Ausdruck von (24.) erhalten wird:

$$34. \quad \varrho^{2m} F\left(-\frac{1}{2}(n-m), -\frac{1}{2}(n-m-1), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{1}{1-\varrho^2}\right) \\ = (\varrho^2-1) F\left(-\frac{1}{2}(n+m), -\frac{1}{2}(n+m-1), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{1}{1-\varrho^2}\right).$$

Hiermit ist die Möglichkeit gegeben, für jedes ϱ das dazu gehörige $Q_{n,m}[\sqrt[3]{1-\varrho^2}]$ zu finden. Für *einen* besondern Werth von m und n vereinfachen sich die mit F bezeichneten Reihen so, daß man sie aus den gebräuchlichen Tafeln berechnen kann, ohne erst die einzelnen Glieder bis zu einem hinlänglich entfernten zu summiren. Setzt man nämlich $m=n=0$, so giebt sowohl die Differentialgleichung (9.) unmittelbar, als auch unsere Reihe für Q bei verlängerten Ellipsoiden:

$$35. \quad Q_{0,0}[\sqrt[3]{1-\varrho^2}] = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\varrho^2}} \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{1-\varrho^2}\right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt[3]{1-\varrho^2}+1}{\sqrt[3]{1-\varrho^2}-1} \right);$$

dagegen bei abgeplatteten:

$$35.* \quad Q_{0,0}[\sqrt[3]{1-\varrho^2}] = \frac{1}{\varrho} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\varrho^2}\right) = \arcsin \left(\sin = \frac{1}{\varrho} \right);$$

wo natürlich mit unendlichem ϱ der Bogen verschwinden muß, also zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

Für die hier gebrauchten speciellen Werthe der Function F sind übrigens die Ausdrücke durch Logarithmus und Arcus in der *Gauß'schen* Abhandlung über die hypergeometrische Reihe angegeben. *)

Anmerkung 4.

Das Geschäft, aus vorhergehenden $P_{n,m}$ oder $Q_{n,m}$ die nachfolgenden durch recurrirende Reihen zu berechnen, wird darin bestehen, zuerst, wenn zwei P (oder Q) mit gleichem n , aber verschiedenem m gegeben sind, die ganze Reihe der P (oder Q) mit demselben n und einem m , welches zwischen 0 und n liegt, zu finden; dann aber *aus dieser* (nun bekannten) Reihe zwei Glieder mit einem n , welches das vorige um eine Einheit übertrifft, herzuleiten; oder auch, was bei den P möglich sein wird, diese *unabhängig* zu berechnen. Die Betrachtungen der Anmerkung 1. werden uns ohne Mühe die verlangten Formeln verschaffen. Wie es dort geschehen ist, setzen wir auch hier $x = \sqrt{1-\varrho^2}$, und zwar soll, wie oben, x die positive Wurzel vorstellen, wenn $1-\varrho^2$ positiv ist, die positive imaginäre Wurzel aber, wenn $1-\varrho^2$ negativ ist. Unter der positiven imaginären Wurzel werde ich nämlich dann die positive Wurzel aus ϱ^2-1 verstehen, wenn man sie in i multiplicirt (§. 2.).

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir den ersten Theil unserer Aufgabe lösen, der wieder in drei Unterabtheilungen zerfällt. Deshalb untersuchen wir

I. *Die Relationen zwischen den P mit gleichem n , aber verschiedenem m .* Es war $\varrho^m \cdot P_{n,m}[x]$ ein particuläres Integral der Gleichung (21.). Nun ist

$$v_{n,m} = \varrho^m \cdot P_{n,m}[x] = (-1)^m \cdot x^{n+m} \cdot F\left(-\frac{1}{2}(n+m), -\frac{1}{2}(n+m-1), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = (-1)^m \cdot (n+m) x^{n+m-1} \cdot F\left(-\frac{1}{2}(n+m-1), -\frac{1}{2}(n+m-2), -\frac{1}{2}(2n-1), \frac{1}{x}\right),$$

$$= -(n+m) v_{n,m-1},$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} = (n+m)(n+m-1) v_{n,m-2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (21.) hat man

*) Disquisitiones generales circa ser. infin. etc. pag. 5.

$$(n+m)(n+m-1)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)(n+m)xv_{n,m-1} \\ + (n(n+1) - m(m-1))v_{n,m} = 0,$$

oder, durch Division mit $n+m$:

$$(n+m-1)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)xv_{n,m-1} + (n-m+1)v_{n,m} = 0.$$

Setzt man wieder für $v_{n,m}$ seinen Werth $\varrho^m \cdot P_{n,m}[x]$, so ist

$$36. \quad (n+m-1)P_{n,m-2}[x] - 2(m-1) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot P_{n,m-1}[x] + (n-m+1)P_{n,m}[x] = 0.$$

II. Die Relationen zwischen den Q mit gleichem n , aber verschiedenem m , bei verlängerten Ellipsoiden. Für diese Körper muß

$\varrho^m \cdot Q_{n,m}[x] = x^{-(n-m+1)} F\left(\frac{1}{2}(n-m+1), \frac{1}{2}(n-m+2), \frac{1}{2}(2n+3), \frac{1}{1-\varrho^2}\right)$ ein particuläres Integral der Gleichung (21.) sein. Setzt man diesen Ausdruck also $= v_{n,m}$, so ist $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = -(n-m+1)v_{n,m-1}$, folglich $\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} = (n-m+1)(n-m+2)v_{n,m-2}$. Durch diese Beziehungen nimmt (21.) die Form

$$(n-m+1)(n-m+2)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)(n-m+1)xv_{n,m-1} \\ + (n+m)(n-m+1)v_{n,m} = 0$$

an; endlich durch Division mit $(n-m+1)\varrho^m$ die Form

$$37. \quad (n-m+2)Q_{n,m-2}[x] - 2(m-1) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot Q_{n,m-1}[x] + (n+m)Q_{n,m}[x] = 0.$$

III. Die Relationen zwischen den Q mit gleichem n , aber verschiedenem m , bei abgeplatteten Ellipsoiden. Ein particuläres Integral der Gleichung (21.) wird in diesem Falle

$v_{n,m} = \varrho^m Q_{n,m}[x] = \varrho^{-(n+1-m)} F\left(\frac{1}{2}(n+1-m), \frac{1}{2}(n+1+m), \frac{1}{2}(2n+3), \varrho^{-2}\right)$ sein, so daß man auch hier den Satz der Anmerkung 1. anwenden kann, daß $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x}$ sich nur durch eine Constante $c_{n,m}$ von $v_{n,m-1}$ unterscheidet, da diese Beziehung, unabhängig von jeder Reihen-Entwicklung, in der besondern Beschaffenheit der Differentialgleichung (21.) begründet ist.

Es ist nun $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = \frac{\partial v_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{\partial v_{n,m}}{\partial \varrho} \cdot \frac{\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho}$ oder
 $= (n-m+1) \frac{\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho} \cdot \varrho^{-(n+2-m)} \cdot F\left(\frac{1}{2}(n-m+3), \frac{1}{2}(n+m+1), \frac{1}{2}(2n+3), \varrho^{-2}\right),$
 und dieses muß gleich $c_{n,m} v_{n,m-1}$ sein, oder

$$= c_{n,m} \cdot \varrho^{-(n+2-m)} \cdot F\left(\frac{1}{2}(n+2-m), \frac{1}{2}(n+m), \frac{1}{2}(2n+3), \varrho^{-2}\right).$$

Um die Constante zu bestimmen setze ich $\varrho = \infty$, so wird $\frac{\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho} = i$,

also $\frac{\partial v_{n,m}}{\partial x} = (n-m+1) \cdot i \cdot v_{n,m-1}$, und ebenso

$$\frac{\partial^2 v_{n,m}}{\partial x^2} = -(n-m+1)(n-m+2)v_{n,m-2}.$$

Hierdurch erhält man:

$$-(n-m+1)(n-m+2)(1-x^2)v_{n,m-2} - 2(m-1)(n-m+1)\sqrt{(q^2-1)}v_{n,m-1} \\ + (n+m)(n-m+1)v_{n,m} = 0$$

oder, durch Division mit $(n-m+1)q^m$:

$$38. (n-m+2)Q_{n,m-2}[x] + 2(m-1) \cdot \frac{\sqrt{(q^2-1)}}{q} \cdot Q_{n,m-1}[x] - (n+m)Q_{n,m}[x] = 0.$$

Durch die Gleichungen (36.), (37.), (38.) ist der erste Theil unserer Aufgabe gelöst. Da man ferner für jedes n aus (10.)

$$P_{n,n}[\sqrt{(1-q^2)}] = q^n, \quad P_{n,n-1}[\sqrt{(1-q^2)}] = q^{n-1} \cdot \sqrt{(1-q^2)}$$

hat, so lassen sich alle P leicht berechnen. Um sämtliche Q ebenso bequem finden zu können, ist es nöthig, neue Formeln aufzustellen.

I. Bei verlängerten Ellipsoiden ist

$$Q_{n,m}[x] = q^{-m} \left(x^{-(n-m+1)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2 \cdot (2n+3)} x^{-(n-m+3)} \right. \\ \left. + \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n-m+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n-m-5)} + \dots \right),$$

woraus man sogleich erhält:

$$xq^m Q_{n,m}[x] - q^{m+1} Q_{n,m+1}[x] = \frac{(n-m+1)}{(2n+3)} x^{-(n-m+2)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{2 \cdot (2n+3)(2n+5)}$$

oder, wenn man für die Reihe auf der rechten Seite ihren Werth setzt:

$$39. \quad x Q_{n,m}[x] - q Q_{n,m+1}[x] = \frac{(n-m+1)}{(2n+3)} Q_{n+1,m}[x].$$

II. Bei abgeplatteten Ellipsoiden ist

$$q^{n+1} Q_{n,m}[x] = F\left(\frac{1}{2}(n+1-m), \frac{1}{2}(n+1+m), \frac{1}{2}(2n+3), q^{-2}\right).$$

In der schon oft erwähnten *Gauß'schen* Abhandlung findet sich die Gleichung

$$F(\alpha-1, \beta+1, \gamma, y) - F(\alpha, \beta, \gamma, y) = \frac{\alpha-\beta-1}{\gamma} y F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, y),$$

welche, auf unseren Fall angewandt, d. h. wenn man $\alpha = \frac{1}{2}(n+1-m)$, $\beta = \frac{1}{2}(n+m+1)$, $\gamma = \frac{1}{2}(2n+3)$, $y = q^{-2}$ setzt,

$$q^{n+1} Q_{n,m+2}[x] - q^{n+1} Q_{n,m}[x] = - \frac{2(m+1)}{(2n+3)} \cdot q^n Q_{n+1,m+1}[x],$$

oder, nach der Division durch q^n :

$$q Q_{n,m+2}[x] - q Q_{n,m}[x] + 2 \cdot \frac{(m+1)}{(2n+3)} \cdot Q_{n+1,m+1}[x] = 0$$

gibt. Um diese Gleichung der andern (39.) entsprechend zu machen, kann man in (38.) für m den Werth $m+2$ setzen, wodurch man

$$Q_{n,m}[x] = \frac{(n+m+2)}{(n-m)} Q_{n,m+2}[x] - \frac{2(m+1)}{(n-m)} \cdot \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot Q_{n,m+1}[x]$$

erhält, welche Formel, mit der vorhergehenden verbunden,

$$\varrho Q_{n,m+2}[x] \left(1 - \frac{(n+m+2)}{(n-m)}\right) + \frac{2(m+1)}{(n-m)} \cdot \sqrt{(\varrho^2-1)} \cdot Q_{n,m+1}[x] \\ + \frac{2(m+1)}{(2n+3)} \cdot Q_{n+1,m+1}[x] = 0$$

giebt; endlich

$$40. \quad \sqrt{(\varrho^2-1)} \cdot Q_{n,m}[x] - \varrho \cdot Q_{n,m+1}[x] + \frac{(n-m+1)}{(2n+3)} \cdot Q_{n+1,m}[x] = 0.$$

Ein Weiteres über den Gebrauch, welchen man von den hier entwickelten Formeln zu machen hat, hinzuzufügen, würde überflüssig sein.

Anmerkung 5.

Um zu beweisen, daß (15.) auf der rechten Seite noch convergirt, wenn ϱ reell, nicht kleiner als 1, und von ϱ_0 verschieden ist, wollen wir versuchen, für den Quotienten $\frac{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]}$ einen andern grössern zu setzen, der zugleich von so einfacher Gestalt ist, daß die Reihe (15.) sich mit bekannten Reihen vergleichen läßt, und man daraus Schlüsse über ihre Convergenz ziehen kann. Zunächst wird sich die Ungleichheit

$$41. \quad \frac{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]} < \frac{P_{n,m+2}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{n,m+2}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]}$$

beweisen lassen, wo sowohl der Bruch auf der linken als der auf der rechten Seite des Ungleichheits-Zeichens positiv ist, indem $\sqrt{1-\varrho^2}$ hier mit $\sqrt{1-\varrho_0^2}$ zugleich positiv und imaginär wird, wenn wir die Sprache der früheren Anmerkungen beibehalten. Wie man aus (10.) ersieht, werden die Zähler und Nenner der beiden Brüche im Allgemeinen nicht positiv und reell sein: ein Umstand, der die vorkommenden Operationen ziemlich verwickeln würde, wenn man nicht, da eben die rechte Seite sowohl als auch die linke positiv ist, durch Multiplication mit einer Potenz von i im Zähler und Nenner zugleich, diesen sowohl als jenen positiv und reell machen könnte. Ich wähle deshalb μ unter den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... so, daß $i^\mu \cdot P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ reell und positiv ist, welches, wenn z. B. $n-m$ durch 4 ohne Rest theilbar ist, dann geschehen wird, wenn man $\mu = 0$ setzt. Dann wird, in Folge unserer Feststellung über $\sqrt{1-\varrho^2}$, $i^\mu \cdot P_{n,m-1}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ positiv und imaginär, $i^\mu \cdot P_{n,m-2}[\sqrt{1-\varrho^2}]$ negativ und reell sein. Multiplicirt man nun (36.) mit i^μ und setzt es in die Form

$$42. \quad (n-m+1)i^\mu P_{n,m}[x] - 2i^{\mu+1} \cdot \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot (m-1) P_{n,m-1}[x] \\ = -i^\mu (n+m-1) P_{n,m-2}[x],$$

so ist jedes Glied mit seinem Zeichen positiv. Macht man $\frac{-i^\mu P_{n,m-2}[x]}{-i^{\mu+1} P_{n,m-1}[x]} = A_{m-1}$, und für $x=x_0$ gleich A_{m-1}° , ebenso auch $\frac{-i^{\mu+1} P_{n,m-1}[x]}{i^\mu P_{n,m}[x]} = A_m$, und für $x=x_0$ gleich A_m° (die Zähler und Nenner der verschiedenen A sind sämmtlich positiv und reell), so hat man aus (42.):

$$(n+m-1)A_{m-1} = \frac{(n-m+1)}{A_m} + 2(m-1) \cdot \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho};$$

woraus man wiederum folgende beide Gleichungen zieht:

$$43. \quad (n+m-1) \cdot \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot A_{m-1} = \frac{(n-m+1)}{\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A_m} + 2(m-1) \cdot \frac{\varrho^2-1}{\varrho^2} \quad \text{und}$$

$$44. \quad (n+m-1) \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A_{m-1} = \frac{(n-m+1)}{\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot A_m} + 2(m-1).$$

Kann man nun für *einen* Werth von m zeigen, daß *zugleich*

$$45. \quad \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A_m > \frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}} \cdot A_m^\circ \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot A_m < \frac{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}{\varrho_0} \cdot A_m^\circ$$

ist, so wird nach (43.) und (44.) auch

$$\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A_{m-1} > \frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}} \cdot A_{m-1}^\circ \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot A_{m-1} < \frac{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}{\varrho_0} \cdot A_{m-1}^\circ$$

sein, d. h. so werden die Ungleichheiten (45.) für jedes m gelten, welches kleiner als das ist, von welchem ausgegangen wurde. Nun ist $A_n = \frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho}$, also gewiß

$$\frac{\sqrt{(\varrho^2-1)}}{\varrho} \cdot A_n < \frac{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}}{\varrho_0} \cdot A_n^\circ,$$

während $\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A = \frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}} \cdot A_n^\circ$; dagegen ist schon

$$\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A_{n-1} > \frac{\varrho_0}{\sqrt{(\varrho_0^2-1)}} \cdot A_{n-1}^\circ,$$

da $A_{n-1} = \frac{\varrho^2-1 + \frac{1}{2n-1}}{\varrho \sqrt{(\varrho^2-1)}}$, also $\frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-1)}} \cdot A_{n-1} = 1 + \frac{1}{(2n-1)(\varrho^2-1)}$.

Schließt also das Zeichen $>$ in der ersten Ungleichheit aus (45.) den einzelnen Fall der Gleichheit nicht aus, so sind diese beiden Formeln streng richtig für jedes m .

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu der Gleichung (42.) zurück, welche, durch $-i^\mu \cdot P_{n,m-2}[x]$ dividirt, die Form

$$(n-m+1) \frac{i^\mu P_{n,m}[x]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x]} = (n+m-1) + \frac{2(m-1)\sqrt{\varrho^2-1}}{\varrho} \cdot \frac{i^{\mu+1} P_{n,m-1}[x]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x]}$$

oder gleich $(n+m-1) - 2(m-1) \frac{1}{\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-1}} \cdot A_{m-1}}$ annimmt. Die Differenz

auf der rechten Seite ist positiv, da die linke Seite reell und positiv ist.

Berücksichtigt man (45.), so wird $\frac{1}{\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-1}} \cdot A_{m-1}} < \frac{1}{\frac{\varrho_0}{\sqrt{\varrho_0^2-1}} \cdot A_{m-1}^0}$, also

$$\frac{i^\mu P_{n,m}[x]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x]} > \frac{i^\mu P_{n,m}[x_0]}{-i^\mu P_{n,m-2}[x_0]}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{P_{n,m}[x]}{P_{n,m}[x_0]} > \frac{P_{n,m-2}[x]}{P_{n,m-2}[x_0]},$$

womit die Formel (41.) bewiesen ist.

Es wird also $\frac{P_{n,m}[x]}{P_{n,m}[x_0]}$ kleiner als $\frac{P_{n,n-1}[x]}{P_{n,n-1}[x_0]}$ oder als $\frac{P_{n,n}[x]}{P_{n,n}[x_0]}$ sein, je nachdem $n-m$ ungerade oder gerade ist, oder auch, da

$$\frac{P_{n,n-1}[x]}{P_{n,n-1}[x_0]} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{n-1} \frac{\sqrt{1-\varrho^2}}{\sqrt{1-\varrho_0^2}} \quad \text{und} \quad \frac{P_{n,n}[x]}{P_{n,n}[x_0]} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n,$$

ganz allgemein

$$46. \quad \frac{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]} < \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n.$$

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen kehren wir weiter zu der Formel (15.) zurück, die scheinbar verwickelter gemacht wird, wenn man ein drittes Integral hinzufügt. Setzt man nämlich

$$\cos \gamma_2 = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

so wird nach §. (3.)

$$a_{n,m} P_{n,m}[\cos \theta] P_{n,m}[\cos \theta_1] \cos m(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_n[\cos \gamma_1] \cos m(\varphi - \varphi_2) \partial \varphi_2$$

(für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen), so daß zu untersuchen bleibt, ob die Reihe

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^\pi \partial \theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \partial \varphi_1 f(\theta, \varphi_1) \int_0^{2\pi} P_n[\cos \gamma_1] \frac{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{n,m}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]} \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos m(\varphi - \varphi_2) \partial \varphi_2 \right) \right),$$

(für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen), convergirt, d. h. ob der Ausdruck auf der rechten Seite ein endlicher ist. Offenbar ist das Integral nach $\partial \varphi_2$ kleiner als $\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n \int_0^{2\pi} \partial \varphi_2$ oder als $2\pi \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n$, folglich der unter

dem Summationszeichen nach m befindliche Theil kleiner als $E \cdot (2n+1) \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n$, wo E eine endliche Gröfse bezeichnet, folglich, da nur positive Glieder vorkommen:

$$u < e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^n;$$

wo e wiederum eine endliche Gröfse bezeichnet: also ist u selbst endlich, da sich auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens eine convergente Reihe befindet.

Anmerkung 6.

Um zu zeigen, dafs

$$I_n = \int_0^\pi P_{n,0} [\cos \theta] \sin \theta \, d\theta$$

verschwindet, wenn $n > 0$, setze man $\cos \theta = x$, wodurch man

$$I_n = \int_{-1}^{+1} P_{n,0} [x] \, dx$$

erhält, oder, nach der ersten Anmerkung:

$$I_n = \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n (x^2 - 1)^n}{\partial x^n} \, dx.$$

Integrirt man unbestimmt, so ist, $n > 0$ vorausgesetzt,

$$\int \frac{\partial^n (x^2 - 1)^n}{\partial x^n} \, dx = \frac{\partial^{n-1} (x^2 - 1)^n}{\partial x^{n-1}};$$

welches in Folge der Gleichung (24.) sich nur durch einen Zahlfactor von $(x^2 - 1) \frac{\partial^{n+1} (x^2 - 1)^n}{\partial x^{n+1}}$ unterscheidet, also für $x = \pm 1$ verschwindet, so dafs wirklich I_n gleich Null wird. Für $n = 0$ ist $P_{0,0} [x] = 1$, also $I_0 = 2$.

Anmerkung 7.

In dieser Anmerkung wollen wir die *Laméschen* Betrachtungen mit den hier angestellten vergleichen; nicht nur um zu zeigen, wie die Endresultate, sondern auch wie die Methoden sich zu einander verhalten. Zu einer solchen Vergleichung wäre es überflüssig, die *Lamésche* Abhandlung über die dreiachsigen Ellipsoiden im Auszuge mitzutheilen. Wir wollen uns bei der beabsichtigten Auseinandersetzung auf die Rotations-Ellipsoiden beschränken, indem das, was aus dem früheren Aufsätze dazu vorausgesetzt wird, hier leicht ergänzt werden kann. Die von *Lamé* an-

gewandten Buchstaben werde ich, so weit es möglich ist, in die im Vorhergehenden gewählten umändern.

Lamé setzt

$$ex = r\varrho_1 \cos \varphi, \quad ey = r\varrho_1 \sin \varphi, \quad cz = \sqrt{(r^2 - e^2)} \sqrt{(e^2 - \varrho_1^2)},$$

entsprechend den Gleichungen (3.), wo r dieselbe Gröfse wie in §. 1. bezeichnet, und ϱ_1 gleich unserem $e \sin \theta$ ist. Durch diese Werthe transformirt er die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ in eine andere, welcher er wiederum durch einige Substitutionen eine höchst elegante, nach r und ϱ_1 symmetrische Form giebt. Um nun den Werth von u wirklich zu finden, vergleicht *Lamé* die Aufgabe für das Ellipsoid mit der für die Kugel, oder, was dasselbe ist, er wendet die Functionen X_n an, wie sie durch (5.) bestimmt werden, kann aber (6.) nicht unmittelbar benutzen, sondern zieht nur den Schluss für den Werth von $u = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$:

$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left((a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) \sum_{n=m}^{n=\infty} B_{n,m} E_{n,m} \right).$$

Hier sind a_m und b_m Constanten, d. h. von r , ϱ_1 und φ unabhängige Zahlwerthe; $B_{n,m}$ ist eine Function von r , $E_{n,m}$ ein ganzes rationales Polynom n ten Grades von ϱ_1 und $\sqrt{(e^2 - \varrho_1^2)}$, dessen Form sich leicht erkennen läfst. Für $B_{n,m}$ und $E_{n,m}$ erhält man Differentialgleichungen, die aus (9.) entstehen, wenn man darin $n(n+1)$ mit A_n vertauscht, für φ aber erst $\frac{r}{e}$,

dann $\frac{\varrho_1}{e}$ setzt. Erwägt man nun, daß $E_{n,m}$ ein Polynom n ten Grades von ϱ_1 und $\sqrt{(e^2 - \varrho_1^2)}$ ist, so findet sich, daß in der That für A_n das Product $n(n+1)$ gesetzt werden kann, so daß $E_{n,m}$ und $B_{n,m}$ durch Gleichungen wie unsere $P_{n,m}$ bestimmt werden. *Lamé* löset diese Gleichungen durch Reihen auf, von denen (Anmerkung 3.) gezeigt ist, daß sie sich nur durch einen constanten Factor c von $P_{n,m}$ unterscheiden, so daß

$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=m}^{n=\infty} ((\alpha_{n,m} \cos m\varphi + \beta_{n,m} \sin m\varphi) P_{n,m} [\cos \theta] \cdot P_{n,m} [\sqrt{(1 - \varrho^2)}]).$$

Um $\alpha_{n,m}$ und $\beta_{n,m}$ zu bestimmen, bedient sich *Lamé* einer Methode, die der ähnlich ist, welche *Poisson* angewandt hat, um zu zeigen, daß gewisse transcendente Gleichungen, auf die man bei mehreren Fragen der Wärmetheorie kommt (z. B. bei den Untersuchungen über den von der Zeit abhängigen Wärmezustand eines Körpers, der mit einem Gas in Berührung ist), reelle Wurzeln haben. Ebenso einfach, wie es oben geschah, auf die Be-

dingung an der Oberfläche zurückzugehen, ist *Lamé* dadurch verhindert, daß er sogleich das ganze u , d. h. $\sum_{n=0}^{n=\infty} X_n$ betrachtet, nicht aber die einzelnen X_n , und gleich von Anfang an alle Glieder, die mit einem bestimmten Cosinus oder Sinus z. B. $\cos m\varphi$ multiplicirt sind, zusammenfaßt; zu welchem Aggregat jedes X_n , von X_m an, ein Glied beitragen wird.

Zur größeren Bequemlichkeit unterscheidet *Lamé* die zu bestimmenden constanten Coëfficienten $\alpha_{n,m}$ und $\beta_{n,m}$ nach acht verschiedenen Gruppen der Glieder, welche sie multipliciren, je nachdem in diesen *Cosinus* oder *Sinus* von *geraden* oder *ungeraden* Vielfachen von φ , ferner $\sqrt{(r^2 - e^2)} \sqrt{(e^2 - \varrho_1^2)}$ nur in *geraden* oder in *ungeraden* Potenzen vorkommt. Die hierdurch entstehenden acht partiellen Wärmeszustände bilden vereint den fraglichen. Einen derselben behandelt *Lamé* vollständig, nämlich den, bei welchem nur Cosinus der geraden Vielfachen von φ , und außerdem nur gerade Potenzen von $\sqrt{(r^2 - e^2)} \sqrt{(e^2 - \varrho_1^2)}$ vorkommen, und welchem eine Function $f(\varrho_1, \varphi)$ als Ausdruck der Temperatur an der Oberfläche entspricht, die nur von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ willkürlich ist, für die anderen Werthe aber, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$, von $\frac{1}{2}\pi$ bis π , von $-\pi$ bis $-\frac{1}{2}\pi$, sich periodisch wiederholt. Auf das Endresultat, welches für diesen partiellen Zustand gefunden wird, bezieht sich der Nachweis der Uebereinstimmung, der hier geführt werden soll, indem sich genau zeigen läßt, welchem Theile von (15.) die *Lamésche* Formel für das u dieses partiellen Zustandes (u_0) gleich ist.

Lamé findet (wenn wir das E sogleich mit dem bequemerem P vertauschen):

$$u_0 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left\{ \cos 2m\varphi \sum_{n=m}^{n=\infty} \left(\frac{P_{2n,2m} [\sqrt{(1-\varrho^2)}]}{P_{2n,2m} [\sqrt{(1-\varrho_0^2)}]} \cdot P_{2n,2m} [\cos \theta] \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\int_0^\pi P_{2n,2m} [\cos \theta] \sin \theta \, d\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\varrho_1, \varphi) \cos 2m\varphi \, d\varphi}{\int_0^\pi (P_{n,m} [\cos \theta])^2 \sin \theta \, d\theta} \right) \right\},$$

(für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen). Für $f(\varrho_1, \varphi)$ kann man $f(e \sin \theta, \varphi)$ setzen, oder auch $f(\theta, \varphi)$, wo jetzt f eine andere Function als früher bezeichnet. Ferner wird das Vierfache des Integrals zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ wegen der Symmetrie der Function $f(\theta, \varphi)$ nach φ , die auch bei der Umänderung, welche die Bedeutung des Buchstaben f erfahren hat, nicht verloren gegangen sein kann, zu dem Einfachen desselben Integrals, wenn man die Integration von 0 bis 2π ausdehnt. Kehrt man dann die Reihen-

folge der Summationen auf die bekannte Art um, so ist

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\cos 2m\varphi \frac{P_{2n,2m}[\sqrt{1-\varrho^2}]}{P_{2n,2m}[\sqrt{1-\varrho_0^2}]} \cdot P_{2n,2m}[\cos \theta] \right. \\ \left. \times \frac{\int_0^\pi P_{2n,2m}[\cos \theta] \sin \theta \partial \theta \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \cos 2m\varphi \partial \varphi}{\int_0^\pi (P_{2n,2m}[\cos \theta])^2 \sin \theta \partial \theta} \right),$$

(wiederum für $m=0$ die Hälfte genommen): eine Formel, die mit dem Theile von (15.), in welchem nur die geraden n und m summiert werden, und nur die Cosinus, nicht die Sinus der Vielfachen des Winkels φ vorkommen, bis auf die Constanten übereinstimmt. Will man auch die Gleichheit dieser nachweisen, so muß man zeigen, daß

$$47. \quad \frac{4n+1}{4} \cdot a_{2n,2m} = \frac{1}{\int_0^\pi (P_{2n,2m}[\cos \theta])^2 \sin \theta \partial \theta}$$

ist (für $m=0$ die Hälfte der rechten Seite genommen); welches sich auch aus den bekannten Eigenschaften der P leicht wird nachweisen lassen.

In der That ist

$$\int_{-1}^{+1} (P_n[x])^2 \partial x = \frac{2}{2n+1}, \text{ also} \\ \int_{-1}^{+1} (P_{n,0}[x])^2 \partial x = \frac{2}{(2n+1)} \cdot \frac{(1.2.3 \dots n)^2}{(1.3.5 \dots (2n+1))^2} = \frac{2}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{a_{n,0}},$$

so daß die Gleichung (47.) für $m=0$ bewiesen ist, Um auch die anderen Fälle zu umfassen, betrachte ich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}} \partial x,$$

welches nach der Integration durch Theile in das Integral

$$- \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}} \cdot \frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}} \partial x$$

übergeht. Es ist nämlich

$$\int \frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}} = \frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}} \\ - \int \frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}} \cdot \frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}} \partial x.$$

Für $x = \pm 1$ verschwindet aber der außerhalb des Integralzeichens befindliche Theil, da nach (24.)

$$\frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}} = \frac{(x^2-1)^{m+1}}{(n+m+1)!} \cdot (n-m-1)! \cdot \frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}}.$$

Zugleich ist auch nach (25.) und (25.*)

$$(P_{n,m}[x])^2 = \frac{(-1)^m}{((n-m+1)(n-m+2)\dots(2n))((n+m+1)(n+m+2)\dots(2n))} \cdot \frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}} \cdot \frac{\partial^{n+m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m}},$$

also, zufolge der so eben bewiesenen Beziehung,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (P_{n,m}[x])^2 \partial x &= \frac{(-1)^{m+1}}{((n-m+1)(n-m+2)\dots(2n))((n+m+1)(n+m+2)\dots(2n))} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n-m-1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m-1}} \\ &\quad \times \frac{\partial^{n+m+1}(x^2-1)^n}{\partial x^{n+m+1}} \cdot \partial x \\ &= \frac{(n-m)}{(n+m+1)} \cdot \int_{-1}^{+1} (P_{n,m+1}[x])^2 \partial x; \end{aligned}$$

woraus man endlich, mit Benutzung des Werthes von $\int_{-1}^{+1} (P_{n,0}[x])^2 \partial x$,

$$\int_{-1}^{+1} (P_{n,m}[x])^2 \partial x = \frac{(n+m)(n+m-1)\dots(n+1)}{(n-m+1)(n-m+2)\dots n} \cdot \frac{2}{(2n+1)} = \frac{4}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{a_{n,m}}$$

zieht; womit ein Satz bewiesen ist, der die Gleichung (47.) als speciellen Fall in sich begreift.