

XXXIII. Anordnung der Massenpunkte in den Flächen regulärer Krystalle.

Von

Fr. Haag in Rottweil.

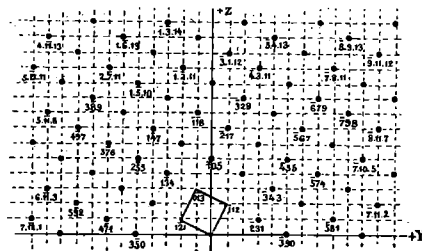
(Mit 13 Figuren im Text.)

Im letzten Abschnitt meines Programms*) habe ich »die Vertheilung der Massenpunkte auf den Flächen« nur für den besonderen Fall untersucht, dass diese Punkte Raumpgitter bilden. Jene Untersuchungen bilden den Ausgangspunkt für die vorliegende Abhandlung und führen zugleich zu der graphischen Lösung der Aufgabe: die Indices aller in einer gegebenen Zone liegenden Flächen zu finden. Es ist nothwendig, das Wesentliche davon zu wiederzuholen.

$$\begin{aligned} \text{Sind} \quad (1) \quad hx + ky + lz &= 0 \\ (2) \quad h, x + k, y + l, z &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen zweier Ebenen (hkl) und (h, k, l) , so werden dieselben befriedigt durch Werthe, welche sich verhalten wie die ganzzahligen Coordinaten eines Punktes $[xyz]$. Gleichung (1) ist die Gleichung der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ursprung, wenn x, y und z als constant, h, k und l als veränderlich betrachtet werden. Man erhält somit durch Aufsuchen aller ganzzahligen Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, die Indices aller in der Fläche (hkl) liegenden Kanten, damit aber auch alle in der Zone $[hkl]$ liegenden Ebenen. Nun sind Punkte mit ganzzahligen Coordinaten Eckpunkte des kubischen Raumpgitters und (hkl) ist eine Netz-

Fig. 1.



*) Ref. in dieser Zeitschr. 1888, 14, 504.

ebene in demselben; die in der Ebene liegenden Gitterpunkte bilden ein Netz, dessen Projection auf die YZ -Ebene auf einfache Weise, am besten auf carrirtem Papier, angefertigt werden kann. Fig. 4 auf S. 585 stellt die Projection des Netzes in der Fläche (534) dar.

Anmerkung. Die Fläche (534) ist durch den Ursprung des Coordinatensystemes gelegt; ihre Gleichung

$$5x + 3y + z = 0$$

wird befriedigt durch die angesetzten Werthe. Der Ursprung des Coordinatensystemes [000] ist ein Gitterpunkt. Die in den Coordinatenebenen liegenden Punkte sind am leichtesten zu bestimmen; so erhält man mit

$$x = 0: \quad [0\bar{7}3].$$

Die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit dem Ursprunge ist eine Deckschiebung der Netzebene, d. h. durch eine Verschiebung gleich und parallel mit dieser Strecke wird das Netz mit sich selbst zur Deckung gebracht. In der Fortsetzung liegen die Punkte [026], [039] u. s. f., welche in der Figur nicht bezeichnet worden sind.

$$y = 0 \text{ liefert } [\bar{7}05].$$

Wird ausgehend von diesem Punkte die Deckschiebung [073] wiederholt ausgeführt (Addition und Subtraction), so erhält man eine Reihe neuer Punkte, z. B. [712]; [705] — [073] = [712]. So wird das Netz durch Aneinanderreihen von Deckschiebungen vervollständigt. Die Verbindungslinie eines jeden Netzpunktes mit dem Ursprunge ist eine Deckschiebung der Netzebene und eine Zone der Fläche (534). Die Länge einer Deckschiebung $[xyz]$ ist $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Die zwei kleinsten Werthe dieser Wurzel liefern die Indices der beiden dichtesten Zonen oder die Seiten des von Bravais berechneten Grundparallelogramms. In unserem Falle ist es ein Rhombus mit den Seiten [724] und [712]. Die Diagonalzonen [073] und [234] können durch Addition und Subtraction daraus abgeleitet werden.

Mit Hülfe unserer graphischen Methode wurde die folgende Zonentafel berechnet. Diese Methode ist eine Anwendung der Raumgittertheorie von Bravais. Er selbst hat seine, auf den Anschauungen Hatty's fussende Theorie im Gegensatze zur geometrischen Krystallographie von Weiss »Molekularmethode« genannt.

Die Tafel der Zonen für die Fläche (hkl) liefert ebenso die Ebenen für die Zone $[hkl]$. Bei einer jeden Form sind nur die zwei dichtesten Zonen, die Seiten des Grundparallelogramms, mit Klammern versehen.

Tafel der Zonen für die Fläche (hkl) .

	(hkl)	Zonen in der Würfel- fläche		$[111]$ Rhomben- dodeka- ederkante	$[211]$ Diagonal- zone des Oktaeders	$[321]$ Kanten- zone von (210)	$[321]$ in der Oktaeder- fläche	$[hkl]$ und $[h\bar{l}l]$ in der Rhombendodekaeder- fläche	Weitere Zonen
		(100)	(010)						
Würfel	(100)	[001]	[001]	[110]			$\begin{Bmatrix} 12\bar{5}, 1\bar{5}2 \\ 21\bar{3}, 2\bar{3}1 \\ 31\bar{2}, 3\bar{2}1 \end{Bmatrix}$		$[0pq]$
Oktaeder	(111)	[011]	[101]	[110]	$\begin{Bmatrix} 11\bar{2}, 1\bar{2}1 \\ 211 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} 12\bar{5}, 1\bar{5}2 \\ 21\bar{3}, 2\bar{3}1 \\ 31\bar{2}, 3\bar{2}1 \end{Bmatrix}$		$[\bar{h}(h-l), l]$
	(110)	[001]	[001]	[110]	$112, 11\bar{2}$	$2\bar{2}1, 221$	$11\bar{2}, 1\bar{2}1$		$[\bar{l}p]$
Pyramidenwürfel	(210)	[001]	[001]	[120]	$1\bar{2}1, 121$	$1\bar{2}2, 122$	$1\bar{2}3, 123$	$11\bar{3}, 113, 2\bar{2}3, 223, 114, 332$	$\begin{Bmatrix} h \\ 2, h, p \end{Bmatrix}$
	(320)	[001]	[001]	[230]			$2\bar{3}1, 231$	$2\bar{3}3, 233$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3, h, h, p \end{Bmatrix}$
Pyramidenoktaeder	(321)	[012]	[102]	[110]		$1\bar{2}2, 122$		$2\bar{3}2, 232, 11\bar{4}$	$314, 1\bar{3}4, 132, 542, 534$
	(331)	[013]	[103]	[110]			$1\bar{2}3, 123$	$2\bar{3}3, 233, 133, 11\bar{6}$	$1\bar{3}6, 316, 543, 536, 553$
	(332)	[033]	[033]	[110]				$11\bar{3}, 133, 533$	$31\bar{6}, 136, 516, 543, 736$
	(553)	[035]	[305]	[110]				$255, 525$	$[125], [215], 445, 635$
Ikositetraeder	(211)	[011]	[102]	[120]	[111]		$2\bar{3}1, 231$	$11\bar{3}, 133$	$\begin{Bmatrix} h+l \\ 2, h, l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h-l \\ 2, h, l \end{Bmatrix}$
	(311)	[011]	[103]	[130]	$[121], [112]$			$11\bar{4}, 114, 233$	$251, 215, 271, 545, 572$
Hexakisoktaeder	(411)	[011]	[104]	[140]		$[122]$		$233, 235, 271$	$253, 235, 271$
	(322)	[011]	[203]	[230]		$[221], [212]$		$133, 252, 225$	$244, 217, 151, 654$
	(433)	[011]	[304]	[340]				$[322], 334, 343$	$362, 326, 653$
	(833)	[071]	[308]	[380]				$[344], 353, 335$	$362, 326, 371$
Hexakisoktaeder	(321)	[012]	[103]	[230]	121			$133, 115$	$214, 344, 354, 325, 571$
	(421)	[012]	[104]	[120]	112		152	$232, 252, 144, 116, 344$	$352, 216, 156, 372$
	(431)	[013]	[104]	[340]		$[122]$	251	$353, 117$	$155, 215, 151, 326, 571$

	(hkl)	Zonen in der Würfel- fläche			[111] Rhomben- dodeka- ederkante	[214] Diagonal- zone des Oktaeders	[234] Kanten- zone von (210)	[324] in der Oktaeder- fläche	$[hhl]$ und $[hll]$ in der Rhombendodekaeder- fläche	Weitere Zonen
		(400)	(010)	(004)						
Hexakisoktaeder	(432)	023	[102]	340		[124]	224		144, 323, 544, 227	125, 125, 265, 461
	(521)	[072]	705	250		[724]			713, 134, 456, 417, 355	473, 234, 374, 218
	(534)	073	705	350	[111]	[712], [124]		234	343, 255, 455, 418	134, 247, 471
	(532)	[023]	205	350				432	417, 455	244, 346, 464, 437
	(543)	034	305	450		[124]	[242]		413, 334, 455	447, 547, 574
	(632)	023	[103]	[720]		[124]		432	223, 343, 566	473, 426, 263, 326
	(734)	073	707	370		[112]			744, 383	475, 254, 235, 356
	(732)	023	207	370		[112]			[131], 415, 353	244, 454, 465
	(751)	[075]	707	570		[112]		423, 231	365	344, 453, 354
	(753)	035	307	570		[124]		[213]	414, 332, 545	454, 156, 449
	(824)	[072]	708	740				[132]	716, 272	724, 152, 164, 256
	(841)	074	708	[720]					714, 474	454, 234, 254
	(851)	075	708	580			[432]	234	[113], 344	354, 437
	(875)	057	508	780				[234]	[113], 322, 474	445, 354, 375
	(932)	023	209	[730]					[713], 416	453, 243, 356
	(986)	034	[203]	890				[234]	664	732, 265, 237, 635
	(10.4.3)	034	3.0.10	250		[712]				[132], 126, 362, 218, 392
	(10.5.4)	[075]	7.0.10	[720]					715, 255, 355	435, 235, 375
	(10.6.4)	076	7.0.10	350			[432]		[332], 714	346, 472
	(10.6.3)	[072]	3.0.10	350					334	[342], 326, 362, 374
	(10.8.7)	078	7.0.10	450					[322]	244, 146, 346
	(14.5.2)	025	2.0.14	5.14.0				[432]	[322]	244, 354, 374
	(14.5.3)	035	3.0.14	5.14.0				[432]	[713]	[123], 254, 364, 773
	(12.7.5)	[057]	5.0.12	7.12.0	[111]	[712]			585	278, 148, 239
	(15.3.4)	[073]	7.0.15	[750]					166	[743], 736, 463, 729, 476
	(21.7.5)	057	5.0.24	[730]					777	[217], [127], 547
	(25.6.2)	[073]	5.0.25	6.25.0						[274], [267], 384

Drei beliebige Systempunkte in der Netzebene bilden ein Dreieck, dessen Seitenlängen sich leicht bestimmen lassen. Ein solches Dreieck kann als Grundlage für die Anfertigung des Netzes benutzt werden. Fig. 2 ist das Netz der Fläche (543). Es wurde ausgegangen von dem Dreieck $[000]$, $[\bar{2}12]$, $[\bar{4}50]$ mit den Seiten $\sqrt{9}$, $\sqrt{44}$ und $\sqrt{24}$.

Werden die Parallelepipede des zu Grund gelegten kubischen Raumgitters oder deren Flächen centriert, so können neue Punkte in der Netzebene auftreten; dabei können die Mitte des Grundparallelogramms und dessen Seiten mit neuen Punkten besetzt werden. Es kann leicht festgestellt werden, wie diese Punkte in jedem einzelnen Falle zu liegen kommen.

Die Mitte des Grundparallelogramms der Fläche (534) hat die Coordinaten: $0, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$; die Mitten der Seiten sind: $\frac{1}{2}, \bar{1}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$. Nun haben (im dodekaëdrischen Raumgitter) die Würfelmitten Coordinaten von der Form

$$m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2};$$

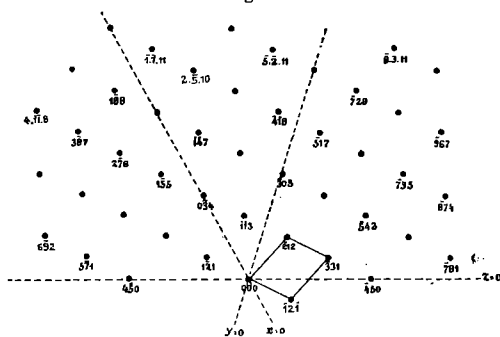
es liegen somit keine Würfelcentra in der Ebene (534). Dagegen die Centra der Würfelflächen haben Coordinaten von der Form

$$m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, p;$$

in der Fläche (534) sind somit für ein oktaëdrisches Gitter die Seiten und die Mitte des Grundparallelogramms mit Punkten besetzt. Ebenso sieht man, dass in der Fläche (543) für ein dodekaëdrisches Raumgitter nur die Mitte des Grundparallelogramms besetzt ist, und dass im oktaëdrischen Gitter keine neuen Punkte auftreten.

Sohncke hat in seiner »Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur« gezeigt, dass man für die Raumgitterpunkte 24-punkter setzen kann; statt dessen habe ich einen 48-punkter gesetzt, der sich aus zwei enantiomorphen 24-punktern zusammensetzt und dessen Eckpunkte den Flächen eines 48-flächners entsprechen. Dass dies zulässig ist, folgt auch aus der »Erweiterung der Theorie«^{*)}. Man braucht nur bei Construction eines »24-punktersystems« zwei Constructionspunkte anzunehmen, die symmetrisch

Fig. 2.



gegen eine Axenebene liegen, und erhält 48-punkter. Den Vielflachen des regulären Systems entsprechen Vielecke, welche an Stelle des 48-punkters treten können. Eines der Schraubensysteme, ein specieller Fall des »Gegenschraubensystems zweiter Art«, wurde abgeleitet durch Combination zweier kubischer Tetraëdersysteme, wobei die Tetraëder gegengestellt sind. Daraus nun lässt sich die Vermuthung schöpfen, dass allgemein bei Combinationen die n -punkter Gegenstellung haben können.

Wenn bei der folgenden Ableitung regelmässiger Punktsysteme in der Ebene neben anderen auch Punktsysteme mit gegengestellten n -punktern zu Grunde gelegt sind, so befinden wir uns immer noch auf dem Boden der erweiterten Theorie. Wir gehen davon aus, dass oktaëdrische und rhombendodekaëdrische Punktsysteme aus ineinandergestellten kubischen Systemen bestehen, bei welchen die n -punkter Gegenstellung annehmen können, combiniren somit mehrere Systeme mit gleichen Deckschiebungen und gleichen Axen, so dass die Axen parallel sind.

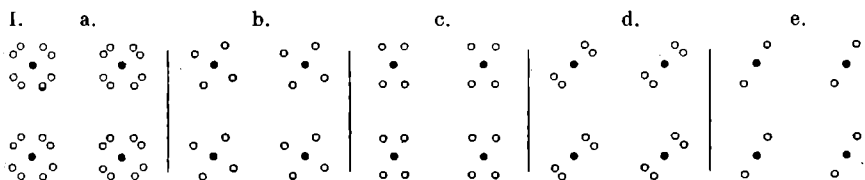
Unsere Methode, die in einer beliebigen Fläche liegenden Punktsysteme aufzusuchen, ist die folgende: Nach dem oben beschriebenen Verfahren wird zunächst das Grundparallelogramm construiert. Um die Eckpunkte desselben gruppiren sich die Ecken eines n -punkters $[hkl]$ wie die Zonen der betreffenden Form $[hkl]$ im Netz der Fläche.

I. So erhält man in der Würfelfläche (400) als Zonen einer Form $[hk0]$:

$$[0\ h\ k], [0\ \bar{h}\ k], [0\ h\ \bar{k}], [0\ \bar{h}\ \bar{k}], [0\ k\ h], [0\ \bar{k}\ h], [0\ k\ \bar{h}], [0\ \bar{k}\ \bar{h}].$$

Diese acht Punkte bilden ein halbreghelmässiges (gleichwinkliges) Achteck mit den Symmetrieaxen Y und Z . Damit ist das quadratische Achteckpunktsystem (a) gefunden. Aus ihm ergeben sich durch Verschwinden der Hälfte aller Systempunkte das quadratische Vierpunktsystem erster (b), zweiter (c) und dritter Art (d) und aus diesen wieder das quadratische Zweipunktsystem (e).

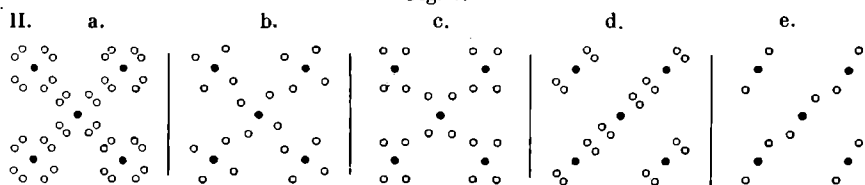
Fig. 3.



II. Im Netz der Würfelfläche treten nur in den Mitten der quadratischen Maschen, nicht in den Seiten, neue Punkte auf und zwar im oktaëdrischen Gitter. Um diese neuen Punkte können sich die n -Ecke entweder parallel oder in Gegenstellung gruppiren. Im ersten Falle erhält man

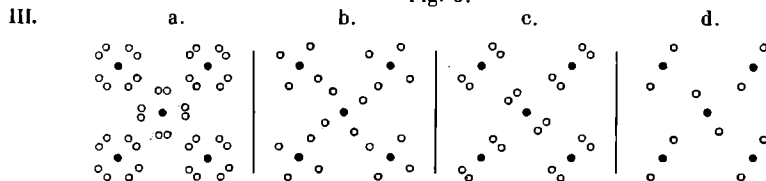
centriert-quadratische Punktsysteme, welche, abgesehen von der krystallographischen Orientirung, identisch sind mit den vorigen.

Fig. 4.



III. Im zweiten Falle ergeben sich die quadratischen abwechselnden Systeme: ein Achtpunktsystem (a), ein Vierpunktsystem erster Art (b), zweiter Art (c) und ein Zweipunktsystem (d).

Fig. 5.



Dazu kommt noch das einfache quadratische Netz (das quadratische Einpunktsystem); wir haben also in der Würfffläche, wenn wir von der krystallographischen Orientirung absehen, 10 verschiedene Punktsysteme.

IV. In der Oktaëderfläche liegen sechs verschiedene Zonen der Form [324]. Die entsprechenden zwölf Punkte bilden ein halbregelmässiges Zwölfeck. Das Grundparallelogramm besteht aus zwei gleichseitigen Dreiecken, dessen Seiten den Schnittlinien der Oktaëderfläche mit den Axenebenen parallel laufen und Symmetrieachsen für das Zwölfeck sind. Durch Verschwinden der Hälfte aller Systempunkte werden aus dem Zwölfeck entweder gleichseitige oder gleichwinklge Sechsecke und aus beiden gleichseitige Dreiecke. Es ergeben sich demnach: das hexagonale Zwölfpunktsystem (a), das Sechspunktsystem erster (b), zweiter (c) und dritter (d) Art und das hexagonale Dreipunktsystem (e).

Fig. 6.

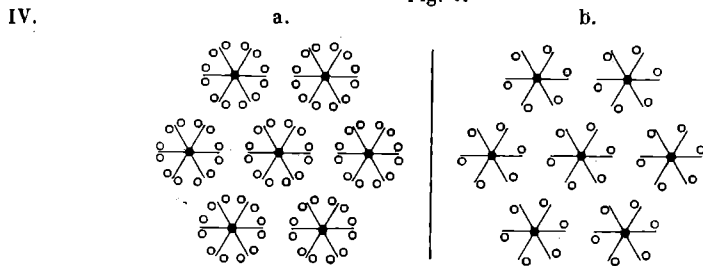
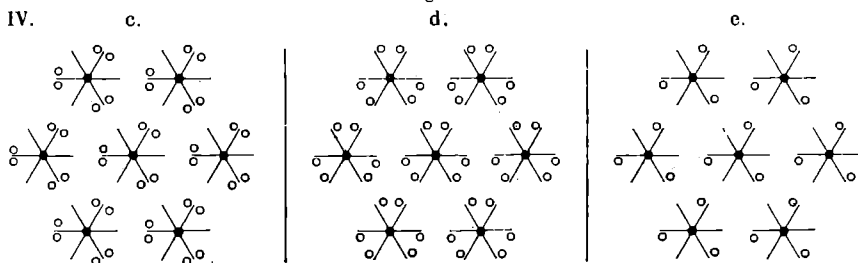


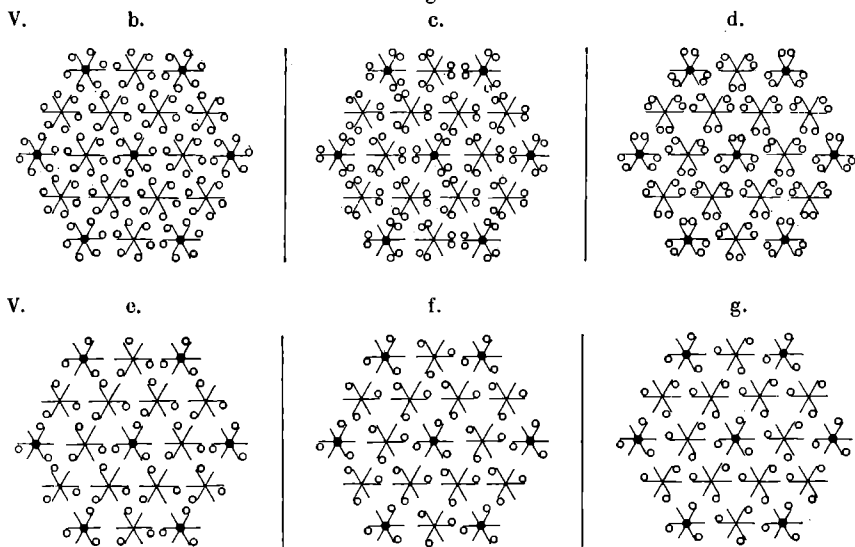
Fig. 6.



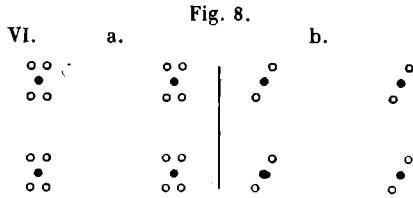
V. Im Netz der Oktaëderfläche treten neue Punkte auf für ein oktaëdrisches Raumgitter und zwar so, dass sowohl die Seiten als die Mitte des Rhombus (Grundparallelogramms) centriert werden. Befinden sich die neuen n -Ecke in Parallelstellung mit den vorigen, so entstehen keine neuen Systeme. Das hexagonale abwechselnde Zwölfpunktsystem Va. wurde nicht gezeichnet. Aus ihm ergeben sich 3 abwechselnde Sechspunktsysteme, welche den einfachen Sechspunktsystemen entsprechen b, c und d, und weiterhin drei abwechselnde Dreipunktsysteme. Das erste (e) zeigt symmetrische Gegenstellung der abwechselnden Dreiecke, das zweite (f) parallele Gegenstellung. Beim dritten (g) können die abwechselnden Dreiecke durch Parallelverschiebung längs einer Axe in symmetrische Lage gebracht werden.

Rechnen wir dazu noch das hexagonale Einpunktsystem, so haben wir in der Oktaëderfläche 43 verschiedene Punktsysteme.

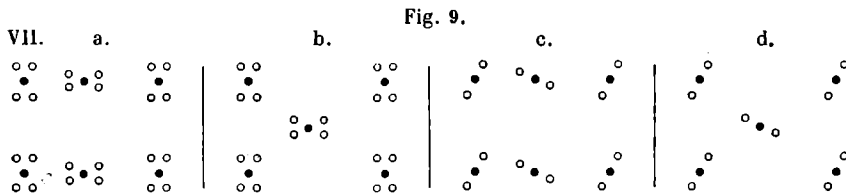
Fig. 7.



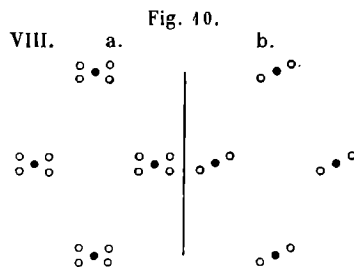
VI. Formen mit rechteckigem Grundparallelogramm sind: (410) , $(hk0)$, (211) , (332) , (411) , (433) , (833) , (524) , $(10.6.3)$. Wie bei den folgenden mit rhombischem Grundparallelogramm finden sich bei ihnen mindestens einmal zwei Zonen derselben Form z. B. in der Fläche $(10.6.3)$: $[\bar{3}26]$ und $[3\bar{6}2]$; die Ecken des zugehörigen n -Punkters bilden ein Rechteck (Vierpunkt), dessen Seiten parallel zu den Seiten des Grundparallelogramms sind. Danach ergeben sich das rechteckige Vier- (a) und Zweipunktsystem (b).



VII. Zwei gegenüberliegende Seiten in diesem oder die Mitte des Grundparallelogramms können im oktaëdrischen und dodekaëdrischen Gitter mit neuen Punkten besetzt sein. Nur abwechselnde Vier- und Zweipunkte liefern weitere Systeme, da im Allgemeinen rechteckig centrierte Systeme mit rhombischen identisch sind. Somit haben wir noch ein rechteckiges abwechselndes Vier- (a) und Zweipunktsystem (c), sowie ein rechteckig abw. centriertes Vier- (b) und Zweipunktsystem (d). Mit dem rechteckigen Maschennetz zählen wir sieben verschiedene rechteckige Punktsysteme.

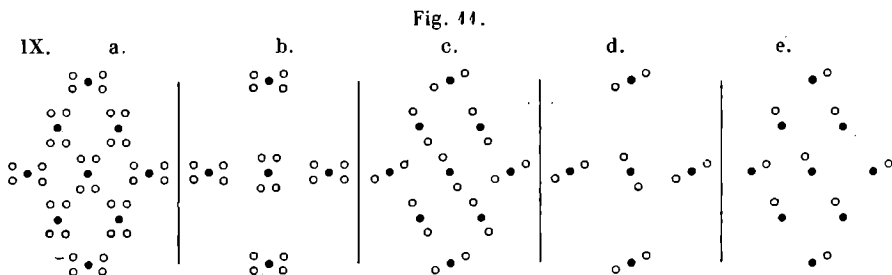


VIII. Formen mit rhombischem Grundparallelogramm sind: (224) , (322) , (344) , (334) , (553) , (534) , $(15.3.4)$, $(24.7.5)$. Die Eckpunkte des Rhombus können, wie bei Nr. VI gezeigt wurde, durch Vierpunkte oder Zweipunkte ersetzt sein. Es ergeben sich demnach das rhombische Vier- (a) und Zweipunktsystem (b).

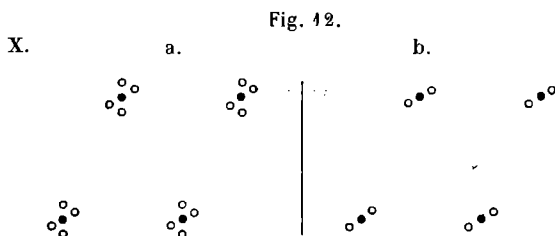


IX. Bei den zwei ersten der angeführten Formen wird im oktaëdrischen Gitter nur die Mitte des Grundparallelogramms mit neuen Punkten besetzt. Bei den übrigen werden auch die Seiten besetzt; neue Systeme liefern die abwechselnden Vier-, Zwei- und Einpunkte: das rhombische abwechselnde Vier- (a) und Zweipunktsystem (c), das rh. abw. centrierte Vier- (b) und Zweipunktsystem (d), sowie das rh. abwechselnde Einpunktsystem (e).

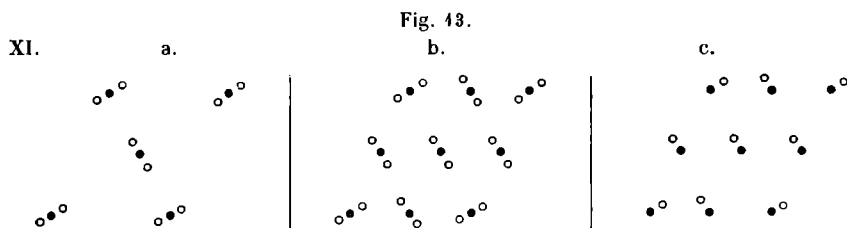
Zählen wir das rhombische Maschennetz hinzu, so haben wir acht verschiedene rhombische Systeme.



X. Die Hexakisoktaëder haben im Allgemeinen (s. Nr. VI und VIII) ungleichseitige und ungleichwinklige Grundparallelogramme (Rhomboiden). Im Netz der Fläche findet man dann immer nur eine einzige Zone derselben Form; die Ecken des Grundparallelogramms können daher durch Zweipunkte ersetzt werden. Eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel bildet die Form (543). Im Netz der Fläche (543) finden sich zwei Zonen derselben Form: $[\bar{5}47]$ und $[5\bar{7}4]$ (s. Fig. 2). Die vier in die Fläche (543) fallenden Punkte des 48-Punktlers $[754]$ bilden ein Rechteck oder einen Vierpunkt, der an Stelle der Eckpunkte des Grundparallelogramms treten kann. Zu bemerken ist noch, dass $[\bar{5}47] \perp [\bar{4}2\bar{7}]$. Es ist nicht gelungen, ausser dem so abgeleiteten rhomboidischen Vierpunktsystem (a) noch weitere aufzufinden. Es kommen somit bei den übrigen rhomboidischen Systemen nur Zwei- (b) und Einpunkte in Betracht.



XI. Im dodekaëdrischen und oktaëdrischen Gitter können die Mitte des Grundparallelogramms, zwei gegenüberliegende Seiten oder alle vier Seiten und die Mitte mit Punkten besetzt sein; aber nur abwechselnde Zwei- und Einpunkte liefern neue Systeme: das rhomboidische abwechselnde Zweipunktsystem erster (a) und zweiter Art (b), und endlich das rh. abw. Einpunktsystem (c). Mit dem rhomboidischen Maschennetz zählen wir sechs verschiedene rhomboidische Punktsysteme.



Wie schon früher bemerkt worden, sind die centrirte quadratischen Systeme II, wenn es nur darauf ankommt, alle aufgefundenen ebenen Punktsysteme aufzuzählen, identisch mit den quadratischen I. Es wurden aber weiterhin nur die wesentlich verschiedenen Systeme ohne Rücksicht auf ihre krystallographische Stellung aufgeführt; wir zählen im Ganzen 44 solcher Systeme.

Jedes System kann noch mit Systemen gleicher Art combinirt werden; so können z. B. bei jedem System die Eckpunkte des Grundparallelogramms hinzutreten, weil das einfache Maschennetz einen speciellen Fall eines jeden Systems darstellt.