Ueber den Einfluss eines widerstehenden Mittels auf die Bewegung eines Pendels.

Von Herrn Prof. und Ritter *Bessel*.

Es sind gegenwärtig Veranlassungen vorhanden, auf das zurückzukommen, was in meinen „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels“ über die Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit enthalten ist. Ich werde dieselben im Laufe dieses Aufsatzes näher angeben, allein eine kurze Darstellung der Sache vorangehen lassen.

Die Erfindung des Einflusses der Flüssigkeit, setzt Betrachtungen sowohl über das Gleichgewicht, als auch über die Bewegung der Flüssigkeiten voraus. Die ersteren ergeben ohne alle Schwierigkeit, daß die bewegende Kraft des Pendels aus zwei anderen bewegenden Kräften zusammengesetzt ist: nämlich aus der in lothrechter Richtung wirkenden, an den Schwerpunkt des Pendels angebrachten, der Masse des Pendels gleichen Kraft der Schwere, und aus der ihr entgegengesetzt wirkenden, an den Schwerpunkt der äußeren Figur des Pendels angebrachten, der Masse der aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit gleichen Kraft. Die anderen dagegen entziehen sich, bei dem jetzigen Zustande unserer Kenntnisse der Hydrodynamik, der directen mathematischen Behandlung: es ist zwar nicht zu bezweifeln, daß die Flüssigkeit sich bewege, indem das Pendel sich bewegt, und eben so wenig, daß aus der Trägheit derselben fortwährende Verminderungen der lebendigen Kraft des Pendels entstehen, allein die Größe der Wirkungen dieser Ursachen, aus der gegebenen Beschaffenheit des Pendels und der Natur und Dichtigkeit der Flüssigkeit zu berechnen, übersteigt bis jetzt die Kräfte der Hydrodynamik.

Die erste — hydrostatische — Einwirkung ist seit *Newton* zur Reduction der Versuche über die Pendellängen angewandt worden, und ich habe dabei nur erinnert, daß die zur Berechnung angewandte Formel, im Falle eines nicht homogenen Pendels, eine Verbesserung erfordert, welche ich S. 34 meiner angeführten Schrift, angegeben habe. Von der zweiten — hydrodynamischen — Einwirkung, ist aber früher nur ein Theil, nämlich die Verminderung der lebendigen Kraft, oder der Widerstand welchen das Pendel

erfährt, berücksichtigt worden, und es ist gezeigt, daß seine erste Potenz nur auf die Weite, nicht aber auf die Dauer der Schwingung, einen Einfluss äußert. Die von der Bewegung des Pendels unzertrennliche Bewegung der Flüssigkeit, welche einen unmittelbaren Einfluss auf die Dauer erhält, ist zuerst in der erwähnten Abhandlung in Betracht gezogen. Da die Größe ihres Einflusses bis jetzt nicht theoretisch bestimmt werden kann, so habe ich gesucht, denselben aus den Versuchen zu eliminiren. Ich habe gezeigt, daß, wenn ein gleicher Zustand der Bewegung der Flüssigkeit nach einer vollendeten Schwingung des Pendels wiederkehrt (welche Voraussetzung nicht bezweifelt werden kann), der Einfluss dieser Bewegung sich auf eine Vermehrung des Moments der Trägheit des Pendels reducirt; diese Vermehrung aber habe ich durch Vergleichung der Schwingungszeiten zweier Pendel von gleicher Form, aber ungleichen Massen, bestimmt und aus dem Resultate geschafft.

1.

Die erste Veranlassung meines Zurückkommens auf diesen Gegenstand, ist der entstandene Zweifel, ob die letzte der angeführten Ursachen, von mir, oder von einem Anderen zuerst bemerkt worden ist. Mein Freund und College, Herr Professor *Neumann* hat mir nämlich eine Stelle in *Robinsons System of mechanical Philosophy* II. p. 359–362 gezeigt, aus welcher hervorgeht, daß der berühmte Hydrauliker *Dubuat* ähnliche Betrachtungen angestellt hat. Er zieht nämlich, bei der Bewegung der Körper in Wasser, eine Masse Wassers in Betracht, welche sich an die bewegten Körper anhängt *), und leitet die Größe derselben aus den Schwingungen eines Pendels in Wasser ab. Aus dem was *Robinson* anführt, erscheint zwar, daß *Dubuat*s Ansicht von der meinigen verschieden ist, indem er das sich mit dem Körper bewegende Wasser, als durch

*) „A quantity of water, which is made to adhere in some degree to a body, which is carried along through still water etc.“

Anziehung oder Klebrigkeit mit demselben verbunden, etwa wie eine den Körper umgebende, während der Bewegung ihn nicht verlassende Hülle betrachtet, wogegen ich die Nothwendigkeit, daß die Flüssigkeit sich bewege, wenn der Körper seinen Ort in derselben verändert, verfolgt habe; allein in wiefern beide Ansichten gleich oder verschieden sind, und ob *Dubuat* eine dem Wasser eigenthümliche Eigenschaft, sich den Körpern anzuhängen, oder die allgemeine Natur der Flüssigkeiten, nämlich den durch die Bewegung des Körpers leer werdenden Raum wieder auszufüllen und dadurch in Bewegung versetzt zu werden, verfolgt hat, muß durch Vergleichung des eigenen Werkes *Dubuats*, welches nicht zu meiner Verfügung ist, ausgemittelt werden. So wie aber kein Zweifel darüber obwaltet, daß das Eigenthumsrecht an der neuen Art die Pendelversuche von dem Einflusse der Luft zu befreien, nur gebührt, so vermute ich auch, daß der Uebergang von *Dubuats* Bemerkungen zu der Bewegung eines Pendels in der Luft, wenigstens nicht unmittelbar am Tage liegen müsse, indem es nicht wahrscheinlich ist, daß *Borda* und *Proni*, welche beide sich eifrig mit den Pendelversuchen beschäftigt haben, und von denen der letztere bekanntlich ein großer Hydrauliker ist, *Dubuats*, bereits 1779 erschienenes Werk, nicht gekannt haben sollten.

2.

Die zweite Veranlassung meines gegenwärtigen Aufsatzes ist eine, in den Mailänder Ephemeriden für 1831 enthaltene Abhandlung des Herrn *Gabriel Piola*. Er entwickelt darin den Einfluß des Widerstandes auf die Bewegung vollständiger als bisher geschehen, und findet im Ausdrucke der Dauer einer ganzen Schwingung, ein dem Producte der Quadrate des Schwingungswinkels und des Widerstandes proportionales Glied, welches aus den früheren, nur in der ersten Potenz des Widerstandes vollständigen Auflösungen derselben Aufgabe nicht hervorgegangen war. Von diesem Gliede glaubt Herr *Piola* zeigen zu können, daß es beträchtlichen Einfluß auf die Schwingungszeiten erhalte, und hinreiche, das was ich der Bewegung der Flüssigkeit zugeschrieben habe, durch den Widerstand allein zu erklären. Auf diese Folgerung werde ich unten zurückkommen, jetzt aber eine Integration derselben Differentialgleichung der Bewegung des Pendels, welche Herr *Piola* auf eine sehr verschiedene Art integrirt hat, mittheilen. Es ist dieses die Differentialgleichung welche man erhält, wenn man den Widerstand im Verhältnisse des Quadrats der Geschwindigkeit voraussetzt und von welcher Herr *Poisson* (Méc. I. §. 273) das erste Integral angegeben hat.

Herrn *Piolas* Bezeichnungen zufolge ist diese Gleichung

$$[1] \dots 0 = \frac{d^2 \omega}{dt^2} - a \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 + b \sin \omega$$

wo ω den Winkel des Pendels mit der Lothlinie, a und b die, resp. von dem Widerstande und von der Schwere abhängigen Coefficienten bedeuten. Multiplicirt man sie mit $d\omega$ und eliminirt man d : durch eine neue veränderliche Größe γ , welche man so annimmt, daß

$$[2] \dots b \cos \gamma = b \cos \omega - \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2$$

ist, so verwandelt sie sich in

$$\sin \gamma d\gamma = 2a (\cos \omega - \cos \gamma) d\omega$$

oder

$$0 = \sin \gamma d\gamma + 2a \cos \gamma d\omega - 2a \cos \omega d\omega$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{-2a\omega}$, so wird sie ein vollständiges Differential, welches

$$[3] \dots \begin{cases} C = e^{-2a\omega} \cos \gamma + 2a \int e^{-2a\omega} \cos \omega d\omega \\ = e^{-2a\omega} \cos \gamma + \frac{2a}{1+4aa} e^{-2a\omega} (\sin \omega - 2a \cos \omega) \end{cases}$$

ergiebt. Zur Bestimmung der Constante C ist die Bedingung vorhanden, daß der Anfang der Schwingung, oder $\frac{d\omega}{dt} = 0$, bei einem gegebenen Werthe von $\omega = \alpha$ statt findet; sie giebt für den Anfang der Schwingung $\gamma = \omega = \alpha$, oder

$$[4] \dots C = \frac{e^{-2a\alpha}}{1+4aa} [aa\alpha + 2a \sin \alpha]$$

Die Schwingung erreicht ihr Ende wenn $\frac{d\omega}{dt}$ wieder verschwindet, oder $\cos \gamma$ und $\cos \alpha$ wieder gleich werden, welches für $\gamma = -\omega$ stattfindet. Bezeichnet man daher den Werth von ω , bei welchem die Schwingung sich endigt, durch $-\beta$, so erhält man

$$C = \frac{e^{2a\beta}}{1+4aa} [\cos \beta - 2a \sin \beta]$$

und daher

$$[5] \dots e^{2a\beta} [\cos \beta - 2a \sin \beta] = e^{-2a\alpha} [\cos \alpha + 2a \sin \alpha]$$

aus welcher Gleichung also der Winkel des Pendels mit der Lothlinie, am Ende der Schwingung gefunden wird.

Um die Dauer der Schwingung zu finden, muß man die Gleichung [2] integrieren. Sie ist

$$dt \sqrt{2b} = \frac{+ d\omega}{\sqrt{(\cos \omega - \cos \gamma)}}$$

und zwar gilt das obere oder das untere Zeichen, jenachdem ω , während der Schwingung, sich positiv oder negativ

verändert. Nimmt man das letztere, oder den Winkel α am Anfange der Schwingung positiv an, und setzt man für

$\cos \gamma$ seinen Ausdruck [3], so ist die Dauer der Schwingung

$$T = \sqrt{\frac{1+4aa}{2b}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-a\omega} d\omega}{\sqrt{[(\cos \omega + 2a \sin \omega) e^{-2a\omega} - (\cos \alpha + 2a \sin \alpha) e^{-2a\alpha}]}}$$

Dieses Integral werde ich, durch die von mir, in der ersten Beilage meiner angeführten Schrift angewandte Methode suchen, aber, dem jetzigen Zwecke gemäß, die Annäherung nicht auf die erste Potenz des Widerstandes beschränken. Indem der größte Werth von

$$(\cos \omega + 2a \sin \omega) e^{-2a\omega}$$

= 1 ist, kann man

$$[6] \dots (\cos \omega + 2a \sin \omega) e^{-2a\omega} = \cos \varphi,$$

so wie die ähnliche Function von $\alpha = \cos \varphi'$ setzen, und $\sqrt{(1+4aa)} e^{-a\omega} d\omega$ durch α , φ und $d\varphi$ ausdrücken, so daß die Form des Integrals

$$[7] \dots T = \frac{1}{\sqrt{2b}} \int \frac{\Phi d\varphi}{\sqrt{(\cos \varphi - \cos \varphi')}} \quad \Phi d\varphi$$

wird. Die Grenzen dieses Integrals werden, der Gleichung [5] zufolge, $-\varphi'$ und $+\varphi'$.

Den Ausdruck von Φ kann man zwar, durch den *Lagrangeschen Lehrsatz*, direct entwickeln, allein die Rechnung wird leichter wenn man zuerst $\sin \frac{1}{2}\varphi = s$ durch $\sin \frac{1}{2}\omega = \sigma$, der Formel [6] gemäß ausdrückt, dann die Reihe umkehrt und den dadurch erhaltenen Ausdruck von σ durch s , zur Entwicklung von $-\frac{1}{a} \sqrt{(1+4aa)} e^{-a\omega}$ in eine, nach den Potenzen von s fortschreitende Reihe anwendet, deren Differential dann $= \Phi d\varphi$ ist.

Den Anfang der Entwicklung von $\cos \varphi$ nach den Potenzen von σ , findet man aus [6]

$$\cos \varphi = 1 - 2(1+4aa)\sigma^2 + \frac{16}{3}a(1+4aa)\sigma^3 - \text{etc.} \dots;$$

das Gesetz ihres Fortganges erkennt man am leichtesten durch die aus [6] hervorgehende Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2 X}{d\sigma^2} (\sigma - \sigma^3) - \frac{dX}{d\sigma} (2 - 3\sigma\sigma) - X \cdot 4(1+4aa)\sigma,$$

in welcher X für $\cos \varphi$ geschrieben ist. Setzt man nämlich

$$X = 1 + \alpha^{(2)}\sigma^2 + \alpha^{(3)}\sigma^3 + \alpha^{(4)}\sigma^4 + \text{etc.} \dots$$

so erhält man, durch diese Differentialgleichung, allgemein,

$$\alpha^{(n+2)} = \alpha^{(n)} \cdot \frac{(n-2)^2 + 16aa}{(n-1)(n+2)},$$

also für $n = 2, 3, 4 \dots$,

$$\alpha^{(4)} = \alpha^{(2)} \cdot \frac{16aa}{1 \cdot 4}; \quad \alpha^{(5)} = \alpha^{(3)} \cdot \frac{1+16aa}{2 \cdot 5}$$

$$\alpha^{(6)} = \alpha^{(4)} \cdot \frac{4+16aa}{3 \cdot 6}; \quad \alpha^{(7)} = \alpha^{(5)} \cdot \frac{9+16aa}{4 \cdot 7}$$

$$\alpha^{(8)} = \alpha^{(6)} \cdot \frac{16+16aa}{5 \cdot 8}; \quad \alpha^{(9)} = \alpha^{(7)} \cdot \frac{25+16aa}{6 \cdot 9}$$

u. s. w.

Man erhält hieraus für $ss = \frac{1}{2}(1-X)$ den Ausdruck

$$[8] \dots \frac{ss}{1+4aa} = \sigma^2 - \frac{2}{3}a\sigma^3 + 4a^2\sigma^4 - \frac{4}{15}a(1+16aa)\sigma^5 + \frac{8}{3}a^2(1+4aa)\sigma^6 - \text{etc.}$$

und durch Umkehrung dieser Reihe

$$[9] \dots \sigma = s' + \frac{2}{3}as'^3 + \frac{2}{3}a^2s'^4 + (\frac{2}{15}a + \frac{4}{15}a^2)s'^5 + (\frac{2}{3}a^2 + \frac{16}{15}a^3)s'^6 + \text{etc.}$$

wo, um abzukürzen, $s'\sqrt{(1+4aa)}$ für s geschrieben ist. Da nun

$$e^{-a\omega} = e^{-2s(s' + \frac{2}{3}as'^3 + \frac{2}{3}a^2s'^4 + \text{etc.})} \\ = 1 - 2as' + 2a^2s'^2 - (\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a^3)s'^3 + (\frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^4)s'^4 - (\frac{2}{15}a + \frac{2}{3}a^3 + \frac{4}{15}a^5)s'^5 + \text{etc.}$$

ist, so erhält man, indem man für σ seinen eben gefundenen Ausdruck setzt,

$$e^{-a\omega} = 1 - 2as' - \frac{2}{3}a^2s'^2 - (\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a^3)s'^3 - (\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^4)s'^4 - (\frac{2}{15}a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{8}{15}a^5)s'^5 - \text{etc.} \dots$$

Multipliziert man dieses mit $-\frac{\sqrt{(1+4aa)}}{a}$ und differentiiert man, so hat man endlich:

$$[10] \dots \Phi d\varphi = 2ds [1 + \frac{2}{3}as' + (\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a^3)s'^2 + (\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^4)s'^3 + (\frac{2}{3}a^2 + 6a^3 + \frac{2}{3}a^5)s'^4 + \text{etc.} \dots]$$

Es ist nun noch die Formel [7] zu integrieren. Schreibt man $1-2ss$ und $1-2kk$ für $\cos \varphi$ und $\cos \varphi'$, so verwandelt sie sich in

$$T = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-k}^{+k} \frac{\frac{1}{2}\Phi d\varphi}{\sqrt{(kk-ss)}};$$

da die Glieder des Ausdrucks von $\Phi d\varphi$, welche ungerade Potenzen von s enthalten, aus dem Integrale verschwinden, und

$$\int_{-k}^{+k} \frac{s^{2n} ds}{\sqrt{(kk-ss)}} = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \pi k^{2n}$$

ist, so erhält man den Ausdruck der Schwingungszeit

$$[11] T = \frac{\pi}{\sqrt{b}} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}a^2}{1+4aa} k^2 + \frac{(\frac{9}{64} + \frac{9}{8}a^2 + \frac{25}{64}a^4)}{(1+4aa)^2} k^4 + \dots \right\}$$

Will man diesen Ausdruck, der nach den Potenzen von $k = \sin \frac{1}{2} \varphi$ geordnet ist, von dem anfänglichen Schwingungsmittel α unmittelbar abhängig machen und bezeichnet man $\sin \frac{1}{2} \alpha$ durch x , so hat man, der Formel [8] gemäß,

$$\frac{k}{1+4aa} = x^2 - \frac{3}{8}ax^3 + 4a^2x^4 - \text{etc.} \dots$$

zu setzen, wodurch man erhält:

$$[12] \dots T = \frac{\pi}{\sqrt{b}} [1 + (\frac{1}{2} + \frac{3}{8}a^2)x^2 - (\frac{3}{8}a + \frac{15}{64}a^3)x^3 + (\frac{9}{64} + \frac{15}{8}a^2 + \frac{49}{64}a^4)x^4 + \text{etc.} \dots]$$

Dieser Ausdruck ist von dem von Herrn *Piola* gefundenen nur darin verschieden, daß er nach den Potenzen von $\sin \frac{1}{2} \alpha$ geordnet ist, während der andere nach den Potenzen von α selbst fortschreitet. Er ist zur Anwendung auf die Pendelversuche, welche man immer bei kleinen Schwingungswinkeln macht, völlig hinreichend; allein wenn der Zweck der Versuche die Erfindung der Größe des Widerstandes wäre, und man deshalb das Pendel in sehr großen Winkeln schwingen ließe, so würde man Veranlassung haben, noch eine andere Integration der Differentialgleichung zu wünschen, welche nach den Potenzen des Widerstandes fortschreitet, allein von der Voraussetzung der Kleinheit von α befreit ist. Ich werde, bei dieser Gelegenheit, zeigen, von welchen Integralen sie abhängt.

Differentiirt man die Formel [6], so ergibt sie

$$\sin \varphi \cdot d\varphi = (1+4aa) \sin \omega e^{-2a\omega} d\omega$$

und man erhält daraus

$$\sqrt{(1+4aa)} e^{-a\omega} d\omega = \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{(1+4aa)}} \cdot \frac{e^{a\omega}}{\sin \omega} = \Phi d\varphi$$

so daß die hier zu machende Umformung des Differentials der Schwingungszeit auf die Entwicklung von

$$\Phi = \frac{\sin \varphi}{\sin \omega} \frac{e^{-a\omega}}{\sqrt{(1+4aa)}}$$

in eine von ω befreite, nach den Potenzen von a fortschreitende Reihe zurückkömmt. Bezeichnet man die Größe

$$\cos \omega = (\cos \omega + 2a \sin \omega) e^{-2a\omega}$$

durch $F\omega$, so ist [6]

$$\cos \varphi = \cos \omega - F\omega$$

und da man, nach dem *Lagrangeschen* Lehrsatz,

$$f\omega = f\varphi + F\varphi \cdot \frac{df\varphi}{d\cos \varphi} + \frac{d\{(F\varphi)^2 \frac{d^2 f\varphi}{d\cos^2 \varphi}\}}{1.2(d\cos \varphi)^2} + \text{etc.} \dots$$

hat, und

$$f\omega = \frac{e^{a\omega}}{\sqrt{(1+4aa) \sin \omega}}$$

also

$$\frac{df\varphi}{d\cos \varphi} = \frac{e^{a\varphi}(\cos \varphi - a \sin \varphi)}{\sqrt{(1+4aa) \sin \varphi^3}} = P$$

ist, so erhält man

$$\Phi = \frac{e^{a\varphi}}{\sqrt{(1+4aa)}} + \sin \varphi \cdot P F\varphi + \frac{\sin \varphi}{1.2} \frac{d\{(F\varphi)^2\}}{d\cos \varphi} + \text{etc.}$$

Setzt man nun für $F\varphi$ und P ihre Entwicklungen nach den Potenzen von a , nämlich

$$F\varphi = 2a \cdot y' - \frac{(2a)^2}{1.2} y'' + \frac{(2a)^3}{1.2.3} y''' - \text{etc.} \dots$$

$$P = \frac{\sqrt{(1+4aa)}}{\sin \varphi^3} (y + ay' + \frac{a^2}{1.2} y'' + \frac{a^3}{1.2.3} y''' + \text{etc.} \dots)$$

wo

$$\begin{aligned} y &= \cos \varphi \\ y' &= \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \\ y'' &= \varphi^2 \cos \varphi - 2\varphi \sin \varphi \\ y''' &= \varphi^3 \cos \varphi - 3\varphi^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

so erhält man, sehr leicht wenn man nicht über aa hinausgeht:

$$\begin{aligned} \Phi &= 1 + a \frac{\varphi + \varphi \cos \varphi^2 - 2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi^2} \\ &+ aa \left\{ \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)(6\varphi \cos \varphi - 6\sin \varphi + 4\sin \varphi^3)}{\sin \varphi^2} \right\} \\ &+ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Aus dem Integrale [7] verschwinden, wie auch dieser Ausdruck zeigt, die ungeraden Potenzen von a , weshalb der bis zu a^2 excl. richtige Ausdruck der Dauer der Schwingung:

$$[13] \therefore T = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \int \frac{\frac{1}{2} d\varphi}{\sqrt{(kk - ss)}} + \frac{aa}{\sqrt{b}} \int \frac{d\varphi \left[\frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)(3\varphi \cos \varphi - 3\sin \varphi + 2\sin \varphi^3)}{\sin \varphi^2} \right]}{\sqrt{(kk - ss)}}$$

ist. Das erste Glied dieses Ausdrucks ist bekanntlich die elliptische Transcendente der ersten Gattung; die Erfindung der übrigen wird vermuthlich durch die merkwürdigen Reihenentwicklungen unterstützt werden können, welche Herr Professor *Jacobi*, in seinen *Fundam. nov. Theoriae Funct. Ellipt.* gegeben hat.

3.

Ich werde jetzt die Abnahme, welche der Schwingungswinkel während einer Anzahl (n) von Schwingungen erfährt und die mittlere Dauer derselben untersuchen.

Wenn der Sinus des halben Winkels des Pendels mit der Lothlinie, am Anfange einer Schwingung durch x , am Ende derselben durch x' bezeichnet wird, so erhält man durch die Entwicklung [8] der beiden Glieder der Gleichung [5]:

$$x^2 + \frac{3}{8}ax^3 + 4a^2x^4 + \frac{4}{15}a(1+16aa)x^5 + \frac{8}{9}a^2(1+4aa)x^6 + \text{etc.} \\ = x^2 - \frac{3}{8}ax^3 + 4a^2x^4 - \frac{4}{15}a(1+16aa)x^5 + \frac{8}{9}a^2(1+4aa)x^6 - \text{etc.}$$

und durch die Umkehrung der ersten Reihe

$$[14] \dots x' = x - \frac{3}{8}ax^2 + \frac{6}{5}a^2x^3 - (\frac{4}{15}a + \frac{2}{15}a^3)x^4 \\ + (\frac{32}{15}a^2 + \frac{2}{15}a^3)x^5 - \text{etc.}$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch

$$x' = f x,$$

so hat man für die folgenden Schwingungen

$$x'' = f x'$$

$$x''' = f x''$$

u. s. w.

welches, wenn $x^{(n)}$ für das Ende der n ten Schwingung gilt, bis zu

$$x^{(n)} = f x^{(n-1)}$$

fortzusetzen ist. Der Ausdruck von $x^{(n)}$, durch x und die Anzahl der Schwingungen, erfordert, daß man die zwischen dem Anfange und dem Ende der Bewegung des Pendels vorkommenden x' , x'' , ... $x^{(n-1)}$ aus der Rechnung schaffe.

Um dieses zu erlangen werde ich das zu dem Anfange einer Schwingung, welche ich die m te benennen werde, gehörige $x^{(m-1)}$, durch k bezeichnen, und m als eine Function von k betrachten, oder

$$m = \Psi k$$

setzen. Wendet man dieselbe Bezeichnung auf das Ende derselben Schwingung an, oder setzt man auch

$$m+1 = \Psi k'$$

so hat man

$$1 = \Psi k' - \Psi k,$$

woraus die Function Ψ , unter Annahme der Relation [14] zwischen k und k' , zu bestimmen ist. Setzt man

$$\Psi k = C + \frac{\alpha}{k} + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3 + \text{etc.}$$

so ist also

$$1 = \alpha \left\{ \frac{1}{k'} - \frac{1}{k} \right\} + \beta (k' - k) + \gamma (k'^2 - k^2) + \text{etc.}$$

oder

$$k k' = (k' - k) [-\alpha + \beta k k' + \gamma k k' (k' + k) + \dots],$$

wodurch, wenn man für k' seinen Ausdruck [14] setzt,

$$\alpha = \frac{3}{8a}; \quad \beta = \frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a; \quad \gamma = -4aa; \text{ etc.}$$

und

$$[15] \dots m = C + \frac{3}{8ak} + \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a \right) k - 4aa k^2 + \text{etc.}$$

gefunden wird.

Wendet man diesen Ausdruck auf den Anfang der ersten und auf das Ende der letzten Schwingung an, so wird er

$$1 = C + \frac{3}{8ax} + \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a \right) x - 4aa x^2 + \text{etc.}$$

$$n+1 = C + \frac{3}{8ax^{(n)}} + \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a \right) x^{(n)} - 4aa x^{(n)2} + \text{etc.}$$

und der Unterschied beider Reihen ergibt:

$$[16] \dots n = \frac{3}{8a} \left(\frac{1}{x^{(n)}} - \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{3}{80a} + \frac{4}{15}a \right) (x - x^{(n)}) \\ + 4aa (x^2 - x^{(n)2}) - \text{etc.}$$

Hieraus erhält man $x^{(n)}$, explicite durch x und n ausgedrückt, wenn man die 5ten und höheren Potenzen von x wegläßt, und p für $1 + \frac{4}{3}anx$ schreibt,

$$[17] \dots x^{(n)} = \frac{x}{p} - \left(\frac{1}{10} + \frac{32}{45}aa \right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} \right) x^3 \\ + \frac{32}{3}a^3 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} \right) x^4 + \text{etc.}$$

Herrn *Piolas* ähnlicher Ausdruck (35) enthält auch die, in den Nennern der verschiedenen Glieder vorkommenden Potenzen von p in Reihen aufgelöst, welche nach den Potenzen von anx aufsteigen und deren Convergenz nicht angenommen werden kann; dieses wird aber dadurch unschädlich, daß Herr *Piola* die Reihe welche er findet, als geometrische Progression summiert. Es schien mir nicht überflüssig, diesen Uebelstand, durch eine anders geführte Rechnung, zu vermeiden.

Die Zeit welche das Pendel anwendet um n Schwingungen zu vollenden, ist, der Formel [12] zufolge,

$$= \frac{\pi}{\sqrt{b}} [n + Fx + Fx' + Fx'' + \dots + Fx^{(n-1)}]$$

wo

$$Fx^{(m)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}a^2 \right) x^{(m)2} - \left(\frac{3}{8}a + \frac{16}{9}a^3 \right) x^{(m)3} \\ + \left(\frac{9}{64} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{4}{9}a^4 \right) x^{(m)4} - \text{etc.}$$

ist; oder die mittlere Dauer einer dieser Schwingungen ist

$$= \frac{\pi}{\sqrt{b}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \Sigma x^{(m)} \right\}$$

Der Formel [17] gemäß, ist das zu dem Anfange der $m+1$ ten Schwingung gehörige $x^{(m)}$

$$= \frac{x}{p} - \left(\frac{1}{10} + \frac{32}{45}a^2 \right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} \right) x^3 \\ + \frac{32}{3}a^3 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} \right) x^4 - \text{etc.}$$

wo $p = 1 + \frac{3}{2} a x n$ ist; substituirt man dieses in dem Ausdrucke von $F_{X^{(m)}}$, so erhält man

$$F_{X^{(m)}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a^2\right) \frac{x^2}{p^2} - \left(\frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^3\right) \frac{x^3}{p^3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a^2\right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4}\right) x^4 + \left(\frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^3\right) \frac{x^5}{p^4} + \frac{1}{2} a^5 \frac{x^6}{p^5} \text{ etc.}$$

Die Summe sämmtlicher Werthe von $F_{X^{(m)}}$, von $m = 0$ bis $m = n-1$ genommen, ist, nach der *Bernoullischen* Entwicklung,

$$= \int_0^n F_{X^{(m)}} dm + \psi_0 - \psi_n$$

wo

$$\psi_m = \frac{1}{2} F_{X^{(m)}} - \frac{1}{2} \frac{dF_{X^{(m)}}}{dm} + \frac{1}{240} \frac{d^3 F_{X^{(m)}}}{dm^3} - \text{etc.}$$

ist. Entwickelt man diese Formel so weit, als sie auf die Coefficienten der n ten Potenz des Schwingungswinkels Einfluß erhält; so findet man

$$\int_0^n F_{X^{(m)}} dm = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} a^2\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{x}{a} - \left(\frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^3\right) \left(1 - \frac{1}{p^3}\right) \frac{x^3}{a} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a^2\right) \left(1 - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) \frac{x^3}{a} + \left(\frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^3\right) \left(1 - \frac{1}{p^3}\right) \frac{x^3}{a}$$

$$\psi_0 - \psi_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} a^2\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) x^2 - \left(\frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^3\right) \left(1 - \frac{1}{p^4}\right) x^4$$

Jedes Glied dieser beiden Theile von $\Sigma F_{X^{(m)}}$ enthält den Factor

$$1 - \frac{1}{p} = \frac{3 a x n}{2 p},$$

sondert man ihn ab, so ergibt der n te Theil ihrer Summe den Ausdruck der mittleren Dauer einer Schwingung:

$$[18] \dots \frac{\pi}{\sqrt{b}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a^2\right) \frac{x^2}{p} + \left(\frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^3\right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) x^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a^2\right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^3}\right) x^4 \right\}$$

Auch diesen Ausdruck hat die Rechnung des Herrn *Piola* so ergeben, daß die Potenzen von $p = 1 + \frac{3}{2} a x n$ in den Nennern, in nicht convergirende Reihen aufgelöst erscheinen.

4.

Nachdem Herr *Piola* die Abnahme des Schwingungswinkels und die Dauer einer Schwingung aus der Theorie bestimmt hat, wendet er die beobachtete Abnahme des ersteren an, um dadurch die Größe a , von welcher beide abhängen, aus dem Ausdrucke der letzteren zu eliminiren. Wenn man die von x^2 und x^4 abhängigen Theile der Formel

[17] wegläßt, indem sie für so kleine Schwingungswinkel, als bei den Pendelversuchen vorzukommen pflegen, unbedeutend sind, hat man

$$p = 1 + \frac{3}{2} a x n = \frac{x}{x^{(n)}}$$

oder

$$a = \frac{3(x - x^{(n)})}{5 a x x^{(n)}}$$

Setzt man dieses in den Ausdruck [18] der Dauer einer Schwingung, und vernachlässigt man darin ebenfalls x^4 , so erhält man diese Dauer:

$$[19] \dots T = \frac{\pi}{\sqrt{b}} \left\{ 1 + \frac{x x^{(n)}}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(x - x^{(n)})^2}{n n x x^{(n)}} \right\}$$

Dieses ist also die beobachtete mittlere Dauer von n Schwingungen; die für einen unendlich kleinen Schwingungswinkel stattfindende t , sollte man daher aus der Gleichung

$$[20] \dots T = t \left\{ 1 + \frac{x x^{(n)}}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(x - x^{(n)})^2}{n n x x^{(n)}} \right\}$$

folgern. Indem man aber das neu hinzugekommene letzte Glied der Formel bisher nicht berücksichtigt hat, hat man einen anderen Werth von t , welchen ich durch t_1 bezeichnen werde, durch die Gleichung

$$T = t_1 \left\{ 1 + \frac{x x^{(n)}}{4} \right\}$$

finden müssen, welcher den wahren, mit hinreichender Annäherung, nach der Formel

$$t = t_1 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(x - x^{(n)})^2}{n n x x^{(n)}} \right\} = t_1 (1 - z)$$

ergehen wird.

Ich werde jetzt den Einfluß dieser Verbesserung auf die, in meiner angeführten Abhandlung, sowohl aus den Versuchen mit einer Kugel von Messing, als aus denen mit einer Kugel von Elfenbein abgeleiteten Längen des einfachen Secundenpendels berechnen. Bezeichnet man diese Länge durch λ , die verbesserten Schwingungszeiten des langen und des kurzen Pendels durch t und t' , die Längen beider Pendel durch l und l' , so hat man

$$\lambda = \frac{l - l'}{t - t'}.$$

und indem man t und t' durch t_1 und t'_1 ausdrückt,

$$\lambda = \frac{l - l'}{t_1 t'_1 (1 - z)^2 - t'_1 t_1 (1 - z')^2}$$

woraus die anzubringende Verbesserung der Länge des einfachen Secundenpendels

$$= 2\lambda \frac{l z - l' z'}{l - l'}$$

hervorgeht.

Um den Zahlenwerth dieser Verbesserung auszumitteln, habe ich die mittleren Werthe der halben Schwingungswinkel, mit welchen meine Versuche anfangen und sich endigen, aufgesucht. Die 11 Bestimmungen mit der Kugel von Messing haben ergeben

	langes Pendel.	kurzes Pendel.
Anfang	3163"	2845"
Ende	1248	1554
n	4000	5932

die 4 Bestimmungen mit der Kugel von Elfenbein:

	langes Pendel.	kurzes Pendel.
Anfang	3020"	3330"
Ende	1107	1080
n	1000	2473

Die Werthe von l und l' sind, mit hinreichender Annäherung, 1305,5 Lin. und 441,5 Lin., λ ist = 440,81 Lin. Aus diesen Angaben folgt die Verbesserung der aus den Versuchen gefolgerten Werthe von λ , für die Kugel von Messing = 0^l,000007, für die Kugel von Elfenbein = + 0^l,000127. Das Endresultat meiner Versuche, im 21^{sten} $\frac{1}{2}$ meiner Abhandlung, würde, durch Anbringung dieser Verbesserung um die völlig unmerkliche Gröfse — 0^l,000026 verändert worden sein. Schreibt man einen Theil der beobachteten Abnahme des Schwingungswinkels, den Hindernissen zu, welche die Bewegung des Pendels an seinem Aufhängungspunkte erfährt, so erhält man die eben berechneten Verbesserungen noch kleiner; es scheint aber, daß diese Ursache, wenigstens bei meinen Versuchen, keinen grofsen Einfluss auf die Schwingungswinkel geüßert hat.

Hieraus geht hervor, daß die weitere Entwicklung der Theorie des Widerstandes, welche auch das Quadrat desselben berücksichtigt, weit entfernt bleibt, den grofsen Unterschied zwischen den aus der schwereren und der leichteren Kugel gefolgerten Längen des Sekundenpendels, welcher 0^l,2324 beträgt, zu erklären. Man konnte dieses zwar, auch ohne die eben gemachte Berechnung der Versuche, nicht anders erwarten, indem eine Verbesserung, welche nur einen Theil des Products der Quadrate der kleinen Gröfsen κ und α beträgt, keinen erheblichen Einfluss erhalten kann; allein dennoch habe ich diese Berechnung hier angeführt, indem Herr *Piola* glaubt, daß ebendieselbe Verbesserung hinreiche, das zu erklären, was ich der Bewegung der Luft zugeschrieben habe.

Indessen zieht Herr *Piola* aus den Beobachtungen der Schwingungen der verschiedenen Pendel in Wasser, welche ich im 21^{sten} $\frac{1}{2}$ meiner angeführten Schrift mitgetheilt habe,

das entgegengesetzte Resultat, nämlich, daß das bisher vernachlässigte Glied im Ausdrucke der Schwingungszeit hinreiche, die grofsen Unterschiede zwischen der Rechnung und der Beobachtung zu erklären, und daß es nicht nöthig sei, der Bewegung der Flüssigkeit einen Einfluss zuzuschreiben. — Eigentlich können diese Versuche nicht zur Bestimmung oder zur Elimination von α angewandt werden, indem der Schwingungswinkel am Ende der Versuche von mir gar nicht angegeben worden ist, also seine Abnahme, und damit α , unbekannt bleibt; allein Herr *Piola* kehrt die Aufgabe um, und sucht denjenigen Werth des Schwingungswinkels am Ende der Versuche, welcher angenommen werden muß, damit die Verschiedenheit der beobachteten und der aus der *Newtonschen* Theorie berechneten Schwingungszeiten, ohne die Voraussetzung eines Einflusses der Bewegung des Wassers, durch die Formel [20] allein erklärt werden könne. Diesen Werth findet er so, daß er ihm mit meiner Aeusserung — die Versuche seien bis zu den kleinsten Schwingungswinkeln fortgesetzt worden, welche noch gehörig gesehen werden konnten — vereinbar erscheint. — Jedoch beruht dieses nur auf einem begangenen Fehler und einem Misverständnisse; wenn man beide berichtigt, so erhält man ein völlig verschiedenes Resultat.

Der Fehler besteht darin, daß (Ephem. de Milan. p. 74) eine unrichtige Formel angewandt worden ist. Ich habe oben schon bemerkt, daß Herrn *Piolas* Formeln erst dadurch richtig werden, daß er die divergirenden Reihen wie geometrische Progressionen summiert; dieses aber ist hier unterlassen, und es wird die Formel

$$T = t \left\{ 1 + \frac{3}{32} \frac{(\kappa - \kappa^{(n)})^2}{n \kappa \kappa^{(n)}} \right\}$$

angewandt, während [20], oder da man den directen Einfluss des Schwingungswinkels, bei so wenig genauen Versuchen vernachlässigen kann,

$$[21] \dots\dots T = t \left\{ 1 + \frac{3}{32} \frac{(\kappa - \kappa^{(n)})^2}{n \kappa \kappa^{(n)}} \right\}$$

hätte angewandt werden sollen: welche Formel auch Herr *Piola* früher richtig angiebt. Das Misverständnis, welches jedoch weit geringeren Einfluss erhält als dieser Fehler, ist, daß Herr *Piola* den Schwingungswinkel von etwa 2°, mit welchem ich die Versuche angefangen habe, für die anfängliche Entfernung des Pendels von der Lothlinie, oder für den halben Schwingungswinkel ansieht. Die Auflösung der Gleichung [21] ergiebt

$$\kappa^{(n)} = \kappa \tan g \frac{1}{2} m^2$$

wo

$$\tan g m = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{3t}{2(T-t)}}$$

ist; berechnet man hiernach die halben Schwingungswinkel am Ende der Versuche, welche man annehmen müßte, wenn man die beobachteten Zeiten durch die Formel [21] darstellen wollte, so findet man, indem man von denselben Zahlen

ausgeht, welche Herr *Piola*, als Resultate meiner Versuche, seiner Rechnung zum Grunde legt, aber den anfänglichen halben Schwingungswinkel $= 1^\circ$ setzt:

		T	t	π	halb.Schw. winkel, am Ende.
Kugel von Messing	{ langes Pendel	1,9085	1,8373	150,31	0,39
	{ kurzes —	1,1078	1,0693	108,07	0,80
Hohl-Cylinder	{ langes Pendel	2,7892	2,3928	35,66	1,60
	{ kurzes —	1,6385	1,4021	58,44	0,59
Hohl-Cylinder ohne Boden .	{ langes Pendel	2,5675	1,8339	38,84	0,56
	{ kurzes —	1,5042	1,0683	26,52	1,18

Diese halben Schwingungswinkel sind so sehr viel kleiner, als die, bei welchen ich die Versuche notwendig geschlossen haben muß, daß kein Zweifel darüber bleibt, daß die Versuche in Wasser, eben so wenig durch den Widerstand erklärt werden können, als die früher angeführten Versuche mit Kugeln von verschiedener Schwere, welche ich in der Luft habe schwingen lassen. — Ich glaube, daß die Schwingungswinkel am Ende der Versuche, größer gewesen sein müssen als $4'$ *), oder $\frac{1}{30}$ der anfänglichen; nimmt man dieses als Grenze an, so erhält man die Werthe von

$$t \cdot \frac{1}{3^2} \frac{(x - x^{(n)})^2}{n \pi x^{(n)}}$$

für die verschiedenen Versuche:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0''0004 \\ 0,0002 \\ 0,0049 \\ 0,0011 \\ 0,0032 \\ 0,0040 \end{array} \right.$$

*) Die diesem Winkel entsprechende Schwingungsweite ist für das kurze Pendel eine halbe Linie, für das lange anderthalb Linien; bei dem ersteren können weit kleinere Schwingungen beobachtet werden, als bei dem letzteren, indem es sich schneller bewegt.

Mehr als diese kleinen Theile der beobachteten Unterschiede $T - t$ würde also der Widerstand nicht erklären können. Wäre das Resultat, welches Herr *Piola* aus denselben Versuchen zieht, einigermaßen richtig, so müßten die Schwingungen am Anfange der Versuche eine sehr viel längere Dauer gehabt haben, als am Ende derselben, wie daraus folgt, daß die Unterschiede den Quadraten des Schwingungswinkels proportional sein müßten; die einzelnen Zeitangaben zwischen dem Anfange und dem Ende der Versuche, welche im 24^{sten} § meiner Schrift angeführt sind, zeigen aber keine Spur einer solchen Ungleichförmigkeit und sind also eben so unverträglich mit Herrn *Piolas* Meinung, wie alles Uebrige.

Schließlich muß ich noch bemerken, daß die Annahme des Widerstandes im Verhältnisse des Quadrats der Geschwindigkeit, auf welcher die Rechnungen des Herrn *Piola* beruhen, eine Hypothese ist, welche durch die Beobachtungen der Pendelschwingungen keinesweges gerechtfertigt wird. Da die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit nicht durch die Theorie bestimmt wird, so sollte man sie aus den Versuchen selbst ableiten, ehe man weitere Folgerungen daraus zieht. Was meine Versuche in dieser Beziehung ergeben, werde ich in einem zweiten Aufsatze mittheilen, den ich dem gegenwärtigen bald folgen zu lassen hoffe.

B e s s e l.

I n h a l t.

Ueber den Einfluß eines widerstehenden Mittels auf die Bewegung eines Pendels. Von Herrn Professor und Ritter *Bessel*. p. 221.

Ausgegeben 1831. Juni 8.