Zur zahlenmäßigen Darstellung der musikalischen Intervalle.

Von Adolf Schmidt.

(Eingegangen am 21. Oktober 1920.)

Die kürzlich hier von J. Würschmidt vorgeschlagene Darstellung der musikalischen Intervalle durch die Logarithmen der Schwingungszahlen-Verhältnisse [Schw.-V.]¹⁾ kehrt im Grunde genommen zu der ursprünglichen, einfachen Zählung von Tonstufen zurück, die in der Harmonielehre üblich ist und auch in den Namen der Töne zum Ausdruck kommt. Sie verfeinert sie nur, indem sie die Verschiedenheit dieser Stufen in exakter zahlenmäßiger Form und damit zugleich in möglichst einfacher, einheitlicher Weise zur Darstellung bringt.

Dabei bleibt zunächst die Einheit der Stufen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Grundzahl der benutzten Logarithmen willkürlich. Wenn letztere a. a. O. ohne besondere Begründung gleich 10 (oder vielmehr $10^{0,00001}$) gesetzt wird, so war dafür wohl nur die Rücksicht auf die Bequemlichkeit der Rechnung maßgebend, die jedoch sachlichen Erwägungen gegenüber um so eher zurücktreten sollte, als es sich ja nur um eine einmalige, bei der späteren Anwendung der vorgeschlagenen Bezeichnungsweise einfach zu übernehmende Vorarbeit handelt. Und sachlich ist die getroffene Wahl, die dem grundlegenden Intervall der Oktave, mit dem fortwährend zu rechnen ist, die unbequeme Stufenzahl 30103 gibt, doch schwerlich zu rechtfertigen. Viel näher hätte es gelegen, gerade dieses Intervall als Einheit zu wählen und dementsprechend das Schw.-V. 2 der Oktave zur Grundzahl der Logarithmen zu machen.

Noch besser aber, weil bei allen Angaben von Tonunterschieden unmittelbar anschaulich und an Gewohntes anknüpfend, ist es, dieses Intervall in zwölf Stufen zu zerlegen, als Einheit somit den durchschnittlichen Betrag des halben Tones festzusetzen. Die Töne der gleichschwebenden Stimmung werden dann auf die denkbar einfachste Art, nämlich durch die ganzen Zahlen 0, 1, 2 ... 12 bezeichnet, während

¹⁾ J. Würschmidt, ZS. f. Phys. 3, 89—97, 1920.

die entsprechenden Töne einer anderen Stimmung durch die Abweichungen ihrer Stufenzahlen von jenen ganzen Zahlen charakterisiert werden. Ich habe mich dieser Bezeichnungsweise und ihrer bildlichen Darstellung auf einem Kreise seinerzeit im physikalischen Schulunterricht bedient, dabei als Gedächtnisstütze die Anlehnung an das Zifferblatt einer Uhr (mit d am Orte der XII, was eine zur lotrechten Mittellinie symmetrische Anordnung der c -Dur-Skala ergibt) benutzend. Die gebräuchliche Veranschaulichung der Quintenfolge durch den Quintenzirkel verwendet dasselbe naheliegende Hilfsmittel, das besonders dem musikalisch nicht Gebildeten die Übersicht und schnelle Auffassung der Tonverhältnisse sehr erleichtert.

Nennt man die so definierten Stufenzahlen λ , die a. a. O. eingeführten A , so ist offenbar

$$\lambda = 12 \cdot A : 30103 = 0,00039863 A = [6,60057] A.$$

Die nachstehende Übersicht enthält die hiernach aus den Zahlen der Tabelle 6 a. a. O., S. 97 abgeleiteten, zur Verhütung von Abrechnungsfehlern aber außerdem selbständig berechneten Stufenwerte aller in der Musiktheorie berücksichtigten Töne. (Die doppelte Berechnung ließ einen Druckfehler in Tabelle 6 erkennen. Es muß dort bei a nicht 22744, sondern 22724 heißen.) Hinzugefügt ist unter μ die abgerundete, dem gleichnamigen Tone der gleichschwebend temperierten Skala entsprechende Stufenzahl und unter ϱ die Abweichung von diesem, gemessen in einer später zu besprechenden Einheit. Wie man unmittelbar sieht, ist sehr nahe $\lambda = \mu + 0,02 \varrho$.

	λ	μ	ϱ		λ	μ	ϱ		λ	μ	ϱ
c	0,000	0	0	e	3,863	4	— 7	as	8,352	8	+ 18
$\bar{c}$	0,215	0	+ 11	e	4,078	4	+ 4	$gisis$	8,433	9	— 29
$\overline{deses}$	0,411	0	+ 21	fes	4,274	4	+ 14	$\underline{a}$	8,844	9	— 8
$\overline{cis}$	0,707	1	— 15	fes	4,489	4	+ 25	$\underline{a}$	9,059	9	+ 3
$\overline{cis}$	0,922	1	— 4	$\overline{eis}$	4,570	5	— 22	$\underline{b}$	9,254	9	+ 13
$\overline{des}$	1,117	1	+ 6	$\overline{eis}$	4,785	5	— 11	$\overline{bb}$	9,469	9	+ 24
$\overline{des}$	1,332	1	+ 17	$\overline{f}$	4,980	5	— 1	$\overline{ais}$	9,550	10	— 23
$\overline{cisis}$	1,414	2	— 30	$\overline{f}$	5,196	5	+ 10	$\overline{ais}$	9,765	10	— 12
$\overline{cisis}$	1,629	2	— 19	$\overline{fis}$	5,687	6	— 16	$\underline{b}$	9,961	10	— 2
$\overline{d}$	1,824	2	— 9	$\overline{fis}$	5,902	6	— 5	$\underline{b}$	10,176	10	+ 9
$\overline{d}$	2,039	2	+ 2	$\overline{ges}$	6,313	6	+ 16	$\overline{aisis}$	10,472	11	— 27
$\overline{eses}$	2,450	2	+ 23	$\overline{fisis}$	6,394	7	— 31	$\underline{h}$	10,668	11	— 17
$\overline{dis}$	2,531	3	— 24	$\overline{fisis}$	6,609	7	— 20	$\underline{h}$	10,883	11	— 6
$\overline{dis}$	2,746	3	— 13	$\overline{g}$	7,020	7	+ 1	$\overline{ces}$	11,293	11	+ 15
$\overline{es}$	3,156	3	+ 8	$\overline{ases}$	7,430	7	+ 22	$\overline{ces}$	11,508	11	+ 26
$\overline{es}$	3,371	3	+ 19	$\overline{gis}$	7,726	8	— 14	$\overline{his}$	11,589	12	— 21
$\overline{disis}$	3,453	4	— 28	$\underline{a}$	8,137	8	+ 7				

Für die einfachen Grundintervalle ergeben sich folgende Stufenwerte:

Großer ganzer Ton (Schw.-V. $\frac{9}{8}$):	$2 + j = 2,03910 = 2 + 0,03910$
Kleiner " " (" $\frac{10}{9}$):	$2 + j' = 1,82404 = 2 - 0,17596$
Großer halber " (" $\frac{16}{15}$):	$1 + i = 1,11731 = 1 + 0,11731$
Kleiner " " (" $\frac{25}{24}$):	$1 + i' = 0,70673 = 1 - 0,29327$
Komma (" $\frac{81}{80}$):	$k' = 0,21506$

Wie es sein muß, ist $i + i' = j'$ und $j - j' = k'$.

Für die Töne c, d, e, f, g erhält man:

$$0, 2 + j, 4 + j + j', 5 + j + j' + i, 7 + 2j + j' + i.$$

Die beiden letzten Werte ergänzen sich, da die Quarte die Umkehrung der Quinte bildet, zu 12. Es ist danach $3j + 2j' + 2i = 0$ und somit gilt streng

$$j' = -\frac{3}{2}j - i, \quad i' = -\frac{3}{2}j - 2i, \quad k' = \frac{5}{2}j + i.$$

Damit ließen sich bereits alle Tonleitern bequem und übersichtlich aufbauen. Der zufällige Umstand indessen, daß mit praktisch mehr als ausreichender Genauigkeit $i = 3j$ ist, wie ein Blick auf die mitgeteilten Zahlen ($i = 0,11731, j = 0,03910$) zeigt, gestattet noch eine weitere Vereinfachung¹⁾. Hieraus und aus den soeben abgeleiteten Beziehungen folgt nämlich, daß man mit x als dem Werte 0,01955

$$j = 2x, \quad j' = -9x, \quad i = 6x, \quad i' = -15x, \quad k' = 11x$$

setzen darf. Auf die Einheitsstufe entfallen danach rund 51, genauer 51,15 x ; gleichfalls abgerundet ist der große ganze Ton gleich 104 x , der kleine gleich 93 x , der große halbe Ton gleich 57 x und der kleine gleich 36 x . Mit diesen Zahlen wird man indessen nicht rechnen, sondern die anschaulicheren Ausdrücke $2 + 2x, 2 - 9x, 1 + 6x, 1 - 15x$ verwenden, aus denen sich auch ohne weiteres die übrigen Intervalle zusammensetzen lassen. So folgt die kleine Terz: $3 + 8x$, die große $4 - 7x$, die reine Quarte: $5 - x$, die übermäßige Quarte: $6 - 16x$, die reine Quinte: $7 + x$, die kleine und die große Sexte: $8 + 7x$ und $9 - 8x$, die kleine und die große Septime $10 + 9x$ und $11 - 6x$ usw.²⁾.

1) Geht man auf die Bedeutung von i und j zurück, so erkennt man dies als eine Folge davon, daß $(\sqrt[12]{2})^5$, wofür kurz ε^5 geschrieben werden mag, dem rationalen Werte $\frac{16}{15} : (\frac{9}{8})^3$ außerordentlich nahekommt. Es ist

$$\varepsilon^5 - 3j = \frac{15}{16} \cdot (\frac{9}{8})^3 \varepsilon^5 = 1,00000097 \text{ und danach } i - 3j = 0,0000167.$$

2) In den bildlichen Darstellungen a. a. O., Fig. 1 und 2 kommt auf 1 x fast genau 0,5 mm. Dasselbe würde mit gleich guter Annäherung auf einem Kreise von 100 mm, genau auf einem solchen von 97,7 mm Durchmesser zutreffen.

Die aufeinanderfolgenden Schritte in den Tonleitern sind:

Dur	2 + 2κ	2 - 9κ	1 + 6κ	2 + 2κ	2 - 9κ	2 + 2κ	1 + 6κ
Moll, harmonisch	2 + 2κ	1 + 6κ	2 - 9κ	2 + 2κ	1 + 6κ	3 - 13κ	1 + 6κ
„ mel. aufst.					2 - 9κ	2 + 2κ	
„ „ abst.						2 + 2κ	2 - 9κ

Um nun von dieser Bezeichnung der Intervalle zu einer solchen der absoluten Tonlagen überzugehen, hat man nur noch den Anfangswert der Zählung festzusetzen. Das ohne weiteres Gegebene und allein Zweckmäßige ist es natürlich, ihn auf *c* zu verlegen und damit das *C* der gleichschwebenden Stimmung zusammenfallen zu lassen.

Jedem Ton kommt dann eine eindeutig bestimmte Zahl λ von der Form

$$\lambda = \mu + \varrho \cdot \kappa$$

zu, wobei μ und ϱ ganze, und zwar infolge der getroffenen Festsetzungen möglichst kleine Zahlen sind¹⁾.

Beschränkt man λ und μ auf den Bereich von 0 bis 11, so ist natürlich noch die Angabe der Oktave hinzuzufügen. Im übrigen ist zu bemerken, daß man eigentlich immer nur mit den Werten von ϱ zu rechnen braucht, da μ (die Stufe im engeren Sinne) stets durch die musikalische Bezeichnung des Tones oder Intervalls gegeben ist.

Die Werte von μ und ϱ sind nun aber voneinander nicht unabhängig; vielmehr ist ϱ durch μ bereits bestimmt, wenn auch bei den durch chromatische Veränderung entstandenen Tönen nicht eindeutig. Soll diese Abhängigkeit hervorgehoben werden, so kann ϱ_μ geschrieben werden. Die nachstehende Übersicht zeigt diesen Zusammenhang; dabei stehen in der ersten Zeile die durch Erhöhung des vorausgehenden, in der dritten die durch Erniedrigung des folgenden Tones um $(1 - 15\kappa)$, d. h. um einen kleinen halben Ton, entstandenen Töne.

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	(12)
ϱ		-15		-13		-22	-16		-14		-23		-21
	0		2		-7	-1		1		-8		-6	
		17		8	14		16		7		9	15	

¹⁾ Die Analogie dieser Darstellung mit der üblichen Benennung und Schreibweise der Noten mit ihren erhöhenden oder erniedrigenden Vorzeichnungen ist offensichtlich. Hier wie dort liegt eine Reihe von Hauptstufen zugrunde, und jeder Ton wird durch zwei Angaben (von denen die eine im besonderen Falle fehlen kann) definiert: die ihm systematisch zugehörige, benachbarte Hauptstufe und seine Abweichung davon (die Null sein kann). Auch die doppelte Vorzeichnung findet hier ihr Gegenstück, insofern ϱ im allgemeinen Falle als Summe von zwei Werten ($\varrho_\mu^\nu = \varrho_\mu + \varrho_\nu$ nach der weiterhin benutzten Bezeichnung) entsteht.

Die pythagoreische Stimmung ergibt, beiderseits nur bis zur Mitte fortgesetzt, folgendes Bild:

μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ϱ {	0	-5	2	-3	4	-1	6	1	-4	3	-2	5
							-6					

Der hier auftretende Schlußfehler, das pythagoreische Komma, ist $k = 12\kappa = k' + \kappa$.

Mit Hilfe der obigen Übersicht läßt sich nun sofort die seine genaue Höhe angegebende Bezeichnung des Tones der Stufe ν in der auf dem Tone der Stufe μ aufgebauten Tonleiter ablesen. Es gilt für ihn offenbar

$$\lambda = (\mu + \nu) + (\varrho_\mu + \varrho_\nu)\kappa.$$

Beispielsweise ist die große Sexte ($\nu = 9$) in der es-Dur-Tonleiter ($\mu = 3$) gegeben durch

$$\lambda = 9 + 3 - 8\kappa + 8\kappa \equiv 0,$$

d. h. *c*, und die kleine Terz ($\nu = 3$) in *fis*-Moll ($\mu = 6$) wird

$$6 + 3 - 16\kappa + 8\kappa = 9 - 8\kappa,$$

d. h. *a*. Die sämtlichen so entstehenden Töne und ihre ϱ -Werte [die man $\varrho_{\mu,\nu}$ oder ϱ_μ^ν nennen könnte, wenn ihre Herkunft angedeutet werden soll]¹⁾ sind in der Tabelle am Anfang zusammengestellt. Hier seien noch die Werte von ϱ für die diatonischen Haupttonleitern angefügt:

μ	(9)	(10)	(11)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>c</i> -Dur				0		2		-7	-1		1		-8		-6
<i>a</i> -Moll	-8		-6	0		-9		-7	-1		-14				
<i>c</i> -Moll				0		2	8		-1		1	7			-6

Die entsprechenden Zahlen für jeden anderen Grundton sind hieraus unmittelbar abzulesen, indem man das ϱ des Grundtons den Angaben der ersten oder dritten Reihe hinzufügt.

Potsdam, Telegraphenberg, Oktober 1920.

¹⁾ Der dabei nach dem Obigen bestehende Mangel an Eindeutigkeit wird durch den Namen des Tons beseitigt, könnte aber, wenn nötig, auch durch die Stellung der Indizes gehoben werden.