III. *Zur Systematik der Electricitätslehre;* *von E. Cohn.*

Die Ueberlegungen, die im Folgenden mitgetheilt werden, sind einem Bedürfniss entsprungen, das seit den glänzenden experimentellen Erfolgen von Hertz wohl viele Fachgenossen empfunden haben: des neu gewonnenen Besitzes völlig froh zu werden durch eine systematische Darstellung der Electricitätslehre, die — frei von den Zufälligkeiten der historischen Entwicklung — von den einfachsten und allgemeinsten Gesetzen ausgehend, die Erfahrungsthat-sachen in deductiver Form aus denselben ableitet.

Ein derartiger Aufbau der Electricitätslehre war, auf noch unsicherer Grundlage, bereits vor 25 Jahren mit grosser Kühnheit von Maxwell versucht worden.¹⁾ — Neuerdings hat nun Hertz²⁾ die Aufgabe in umfassender Weise gelöst. Eine Behandlung desselben Gegenstandes kann daher auf Beachtung nur insoweit noch rechnen, als sie sich von der Hertz'schen unterscheidet. Dies ist in einigen Punkten der Fall betreffs eines Versuchs, den ich in gleicher Richtung unternommen hatte. Die Unterschiede sind freilich lediglich formale, — sie können auch nach der Natur der Sache nur solche sein. Sie beruhen wesentlich darauf, dass die Begriffe der electrischen und magnetischen Menge, sowie der Dielectricitätsconstante, der magnetischen Constante und des Leitungsvermögens nicht in die Grundlagen aufgenommen werden; dass hier vielmehr nur diejenigen Grössen auftreten, welche rein mechanisch — aus Länge, Masse und Zeit — definirbar sind, und — als Folge davon — soweit es sich um Constanten handelt, nur die „inneren“ Constanten der Körper.

1) Maxwell, Phil. Transactions f. 1865: A dynamical theory of the electromagnetic field.

2) H. Hertz, Gött. Nachr. f. 1890. p. 106, s. dort auch die Angaben betr. der Leistungen von Heaviside.

Meine Betrachtungen erstrecken sich zur Zeit nur auf isotrope Körper; für dieses Gebiet wenigstens wird, wie ich glaube, durch dieselben eine Vereinfachung erreicht.¹⁾

Grundgleichungen.

Wir bezeichnen als electromagnetisches Feld einen Raum, dessen Element $d\tau$ Energie von folgender Form enthält:

$$(1) \quad dW = dW_e + dW_m, \quad dW_e = \frac{1}{2} E^2 d\tau, \quad dW_m = \frac{1}{2} M^2 d\tau. \quad ^2)$$

Hierin bedeuten E und M zwei Richtungsgrößen, deren Componenten, XYZ für E und LMN für M , innerhalb eines homogenen Mediums durch folgende Beziehungen verknüpft sind:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = V \left(-\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial M}{\partial t} = V \left(-\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial N}{\partial t} = V \left(-\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} \frac{X}{T} + \frac{\partial X}{\partial t} = V \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \\ \frac{Y}{T} + \frac{\partial Y}{\partial t} = V \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \\ \frac{Z}{T} + \frac{\partial Z}{\partial t} = V \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right). \end{cases}$$

t ist die variable Zeit, xyz sind rechtwinklige Coordinaten eines materiellen Punktes, welche im Folgenden als von der Zeit unabhängig betrachtet werden; T und V sind Constanten des Mediums, und zwar, wie die Gleichungen zeigen, T eine Zeit, V eine Geschwindigkeit. Wir bezeichnen sie bezw. als „Relaxationszeit“ und „kritische Geschwindigkeit“ des Mediums. Wir nennen ferner dW die electromagnetische Energie des Elements $d\tau$, ihre Theile dW_e und dW_m bezw. die electriche und die magnetische Energie.

Folgerungen. — A. Allgemeine.

Multipliciren wir die Gleichungen (2) und (3) sämmtlich mit $dx \cdot dy \cdot dz = d\tau$ und der Reihe nach mit $LMNXYZ$ und addiren, so folgt:

1) Das Programm für die hier vorliegenden Ausführungen findet sich Wied. Ann. 38. p. 50. 1889. Diese selbst wären ohne den äusseren Anlass zur Beschleunigung der Publication weiter ausgedehnt und besser durchgearbeitet worden. Wie sie hier gegeben werden, lagen sie ihrem Inhalt nach seit Ende des letzten Winters vor.

2) Die Bezeichnungen sind gegenüber Wied. Ann. 38. p. 51. 1889 etwas geändert, da die Einführung des Factors 2 die Formeln vereinfacht.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} dW = -\frac{1}{T} E^2 d\tau + V \left[\frac{\partial}{\partial x} (MZ - NY) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (NX - LZ) + \frac{\partial}{\partial z} (LY - MX) \right] d\tau, \end{array} \right.$$

d. h.: die in der Zeiteinheit dem Element zuwachsende Energie zerfällt in zwei Theile:

a) einen stets negativen vom Betrage $(1/T)E^2 d\tau$. (Derselbe wird erfahrungsmässig in Wärme verwandelt und als „Joule'sche Wärme“ bezeichnet).

b) einen anderen von variablem Vorzeichen. Der letztere kann dargestellt werden durch Energiemengen, welche durch die Oberfläche des Elements eintreten, und zwar muss man jedem Oberflächenelement dS einen Beitrag zuweisen: $\pm V \cdot E_s \cdot M_s \sin(E_s, M_s) dS$, wo, wie im folgenden, $E_s(M_s)$ die in die Fläche dS fallende Componente von $E(M)$ bezeichnen soll, und das Vorzeichen durch die gegenseitige Lage von E_s, M_s und der inneren Flächennormale bestimmt ist. Eine Energiemenge also, welche als eintretende erscheint für das eine von zwei längs dS zusammenstossenden Raumelementen, ist eine austretende für das andere. — Indem man den Inhalt der Gl. (4) in dieser Form ausspricht, ergibt sich die Ausdehnung auf einen endlichen Raum τ ohne weiteres.

Unsere Gleichungen beziehen sich also nicht auf Räume, innerhalb deren Umsetzungen von electromagnetischer Energie gegen andere Energieformen in umkehrbarer Weise vor sich gehen. Die sogenannten electromotorischen Flächen sind daher aus den von uns betrachteten Räumen auszuschliessen.

V erweist sich nach obigem als ein Maass der Geschwindigkeit, mit welcher in dem betrachteten Medium die Energie sich ausbreitet; $1/T$ als ein Maass der Schnelligkeit, mit welcher bei Ausschluss der Einwanderung von aussen die Energie erlischt.

Betrachten wir nun ein Raumelement $d\tau$ an der Grenzfläche zweier Medien, die durch verschiedene Werthe von V und T charakterisirt sind.

Der in der Zeiteinheit erfolgende Energiezuwachs ist für dasselbe nur dann von der Ordnung von $d\tau$, wenn das Product $V E_s M_s \sin(E_s, M_s)$ zu beiden Seiten der Grenzfläche S denselben Werth hat. Diese nothwendige Bedingung ist für be-

liebige und beliebig gelegene E und M erfüllt, wenn für jedes Medium Coëfficienten ϵ und ν existiren, derart, dass:

$$(5) \quad \epsilon \nu = V \quad \text{ist und}$$

(6_a) ϵE_s und (6_b) νM_s stetig sind an der Grenze. ϵ und ν sind hierdurch als Verhältnisszahlen definirt; das ϵ oder ν eines für sich allein betrachteten Körpers hat gar keine Bedeutung. Es sind „äussere“ Constanten der Körper im Gegensatz zu den „inneren“ Constanten V und T .

Lassen wir für einen Augenblick die Normale der Grenzfläche mit der x -Axe zusammenfallen, so sind also stetig ϵY und ϵZ und folglich auch $\epsilon(\partial Y/\partial z)$ und $\epsilon(\partial Z/\partial y)$; es folgt dann aus der ersten der Gleichungen (2): $(1/\nu)(\partial L/\partial t)$ ist stetig an der Trennungsfläche. — Aus der ersten der Gleichungen (3) folgt dasselbe für $X/\epsilon T + \partial/\partial t(X/\epsilon)$. — Bezeichnen wir also allgemein die Componenten nach der Normale n mit E_n und M_n , so folgt:

$$\frac{E_n}{T\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_n}{\epsilon} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M_n}{\nu} \right) \quad \text{sind stetig.}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{X}{T\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{X}{\epsilon} \right) = u, \quad \frac{Y}{T\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Y}{\epsilon} \right) = v, \quad \frac{Z}{T\epsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Z}{\epsilon} \right) = w,$$

und nennen $\mathfrak{C}$ die Resultante von uvw , so lassen sich diese Aussagen schreiben:

$$(7_a) \quad \mathfrak{C}_{n_1} + \mathfrak{C}_{n_2} = 0; \quad (7_b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M_{n_1}}{\nu_1} + \frac{M_{n_2}}{\nu_2} \right) = 0.$$

Indem wir die Gleichungen (3), resp. (2) der Reihe nach nach x , y und z differenziren und addiren, leiten wir für das Innere eines homogenen Körpers noch ab:

$$(8_a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{und:}$$

$$(8_b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L}{\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M}{\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{N}{\nu} \right) \right] = 0.$$

Wir nennen die hier aufgetretenen Vektoren:

ϵE und νM elektrische, resp. magnetische Feldintensität¹⁾,

1) Entsprechend dem allgemeinen Gebrauch für den Erdmagnetismus.

E/ε und M/ν electriche, resp. magnetische Polarisation¹⁾,
 $\mathfrak{C}$ electricchen Gesamtstrom²⁾,
 $E/\varepsilon T$ „ Leitungsstrom.²⁾

Der Inhalt der Gleichungen (7) und (8) lässt sich geometrisch sehr anschaulich darstellen: Wir ziehen für jeden der Vektoren E/ε , M/ν und $\mathfrak{C}$ repräsentative Linien, deren Richtung in jedem Punkt die Richtung des Vectors angibt, und in solcher Dichtigkeit, dass die Anzahl derselben, welche die Flächeneinheit durchsetzt, die Grösse der zur Fläche senkrechten Componente anzeigt. Die Linien für E/ε und M/ν sollen „electriche, resp. magnetische Kraftlinien“, diejenigen für $\mathfrak{C}$ „Stromlinien“ heissen. Die Klammergrössen der Gleichungen (8_a) und (7_b) bezeichnen dann die Anzahl von magnetischen Kraftlinien, welche in der Volumeinheit eines homogenen Körpers, resp. auf der Flächeneinheit einer Unstetigkeitsfläche ihren Ursprung nehmen (Kraftlinien, welche dort endigen, negativ gerechnet), und die Gleichungen sagen folglich aus:

Die Endpunkte solcher Kraftlinien haben unveränderliche Lage im Raum. Ebenso drücken die Gleichungen (8_a) und (7_a) aus: Weder im Innern homogener Körper, noch auf Flächen, an denen sprungweise Aenderungen der Eigenschaften erfolgen, befinden sich Endpunkte von Stromlinien.

Dann aber wird man berechtigt sein, zu schliessen: Das gleiche gilt auch da, wo das Medium seine Eigenschaften continuirlich ändert; also allgemein:

Die Endpunkte magnetischer Kraftlinien haben feste Lage im Raum.

Endpunkte von Stromlinien existiren in unserem Raum nicht.

Dieser Schluss wird mathematisch dadurch ausgedrückt, dass an Stelle der Gleichungen (2) und (3) für inhomogene Körper — und folglich mit allgemeiner Gültigkeit —, die folgenden treten:

$$(2_a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L}{\nu} \right) = - \frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial z} \text{ u. s. w.}$$

1) Nach Hertz.

2) Nach Maxwell; es wäre erwünscht, den „Leitungsstrom“ einfach als „Strom“ bezeichnen zu können; dann fehlt aber ein Name für $\mathfrak{C}$.

$$(3_a) \quad \frac{X}{T\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{X}{\varepsilon} \right) = \frac{\partial(\nu N)}{\partial y} - \frac{\partial(\nu M)}{\partial z} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnen wir ferner mit ϱ die Anzahl electricischer Kraftlinien, die von der Volumeinheit ausgeht:

$$(9) \quad -\frac{\partial \left(\frac{X}{\varepsilon} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{Y}{\varepsilon} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{Z}{\varepsilon} \right)}{\partial z} = \varrho,$$

so schreibt sich (8_a) für einen homogenen Körper:

$$\frac{\varrho}{T} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \text{ woraus } \varrho = \varrho_0 e^{-\frac{t}{T}}.$$

Hier scheiden sich zwei Classen von Körpern. — Körper, für welche T einen endlichen Werth hat, nennt man „Leiter der Electricität“; innerhalb dieser geht ϱ bei beliebigem Anfangszustand gegen den festen Endwerth 0. Körper, für welche T unendlich ist, heissen „Isolatoren“; in ihnen hat ϱ unveränderliche Werthe. Nimmt man hinzu, dass für die Grenzfläche zweier Isolatoren aus (7_a) folgt:

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{E_{n_1}}{\varepsilon_1} + \frac{E_{n_2}}{\varepsilon_2} \right] = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = 0,$$

wo σ_{12} die Anzahl electricischer Kraftlinien angibt, die von der Flächeneinheit der Grenzfläche ausgehen, so lässt sich für diese Linien folgender Satz aussprechen: Aus beliebigem Anfangszustand geht stets ein Zustand hervor, in welchem innerhalb homogener Leiter keine Endpunkte electricischer Kraftlinien liegen und von nun an sich auch nicht mehr bilden; — innerhalb der Isolatoren und auf den Grenzflächen zweier Isolatoren unveränderliche Endpunkte —, und nur auf den Grenzflächen von Leitern bewegliche Endpunkte vorhanden sind.

B. Stationärer Zustand.

Es möge das Feld an den Grenzen des Raumes τ unveränderlich erhalten werden; dann wird auch die Energievertheilung in τ einem unveränderlichen — stationären — Zustand zustreben. Derselbe sei eingetreten. Dann wird aus den Gleichungen (2_a):

$$\frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial y} = \frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial z} = \frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial x} = \frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial y}.$$

Beachtet man, dass auch an Unstetigkeitsflächen die tan-

gentialen Componenten von ϵE nach (6_a) stetig sind, so folgt, dass es eine im ganzen Raum τ stetige Function U gibt von der Beschaffenheit, dass:

$$(11) \quad \epsilon X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \epsilon Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \epsilon Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Sie heisst das electrostatische Potential. Führt man sie in den Ausdruck von W_e ein, so folgt durch partielle Integration:

$$(12) \quad W_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_S U \sigma dS + \frac{1}{2} \sum_{S_{12}} \int U \sigma_{12} dS_{12} + \frac{1}{2} \int_{\tau} U \cdot \rho d\tau.$$

Hier bedeuten die S_{12} Unstetigkeitsflächen im Innern von τ , S die Grenzfläche von τ .

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \\ \text{und } \sigma_{12} &= - \left[\frac{1}{\epsilon_1^2} \frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{1}{\epsilon_2^2} \frac{\partial U}{\partial n_2} \right] \end{aligned} \right.$$

haben die in (9) und (10) angegebene Bedeutung, und:

$$(13) \quad \sigma = \frac{E_n}{\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial U}{\partial n}$$

bezeichnet die Anzahl der Kraftlinien, welche von der Einheit der Oberfläche S in das Innere von τ tritt.

In der obigen Darstellung erscheinen die ρ und σ als Functionen von U ; das electricische Feld ist durch die Werthe von U gegeben.

Aus (12) und (13) folgt aber in bekannter Weise: Durch Festsetzung der Werthe der ρ und σ ist umgekehrt innerhalb des Raumes τ das — stetige — U bis auf eine additive Constante, und folglich das Feld vollkommen bestimmt.

Man bezeichnet ρ als räumliche Dichte, σ als Flächendichte der „Electricität“, $\rho d\tau$ und σdS als „Electricitätsmengen“. Das allgemeine Symbol einer solchen sei e .

Diesen Electricitätsmengen kommen folgende Eigenschaften zu: Bildet man ihre Summe für einen beliebigen Raum τ , so kommt:

$$(14) \quad \sum e = \int_S \sigma dS + \sum_{S_{12}} \int \sigma_{12} dS_{12} + \int_{\tau} \rho d\tau = 0,$$

wie sich durch Ausführung des Raumintegrals sofort ergibt. Die algebraische Summe der für ein beliebig begrenztes Feld einzuführenden Electricitätsmengen ist also unveränderlich, nämlich $= 0$. Von ihnen sind die der Oberfläche S zuzuschreibenden σdS durch die Wahl von S bedingt, sie verschieben sich mit der Verschiebung der Grenzfläche und sie verschwinden, wenn dieselbe in ein Gebiet hinausgeschoben wird, wo die electricische Energie gleich Null ist. Sie vertreten für die Darstellung des Feldes in τ den durch die Oberfläche S ausgeschlossenen Theil des Feldes. Diese Electricitätsmenge auf S ist entgegengesetzt gleich der von S eingeschlossenen Menge.

Mit Benutzung des neuen Ausdrucks wird ferner aus dem Satz p. 630: Electricität kann sich vorfinden in unveränderlicher Anordnung im Innern von Isolatoren und auf den Grenzflächen verschiedener Isolatoren gegeneinander, — in veränderlicher Anordnung auf den Oberflächen von Leitern —; im Innern von Leitern findet sich keine Electricität.

Das Vorstehende lässt sich so zusammenfassen: Wenn die electricische Intensität ein Potential besitzt, (wie dies im stationären Zustand der Fall ist), so lässt sich die electricische Energie eines Raumes darstellen durch Grössen — Electricitätsmengen genannt, — die im Inneren und auf der Oberfläche des Raumes bestimmte Werthe haben. Betrachtet man das ganze electricische Feld, so ist die Gesamtsumme aller Electricität unveränderlich, nämlich gleich Null: die Electricität ist unzerstörbar (freilich nur bei algebraischer Summirung). Sie kann im allgemeinen ihren Ort wechseln; ist aber ein Raum τ völlig von Isolatoren umgeben, so ist die Gesamtsumme der eingeschlossenen Electricität, die einen willkürlichen Werth haben kann, unveränderlich: Electricität lässt sich in einen allseitig begrenzten Raum einschliessen. Erleidet, im allgemeinen Fall, der Electricitätsinhalt eines Raumes τ eine Aenderung, so ändert sich gleichzeitig um denselben Betrag die Anzahl von Kraftlinien, welche von innen nach aussen die Oberfläche von τ durchsetzen; ist also in einem Zeitmoment der Electricitätsinhalt von τ gegeben, so genügt es, von da an die Vorgänge an der Oberfläche zu beobachten, um jederzeit den Electricitätsinhalt von τ angeben zu können.

Die hier besprochenen Eigenschaften theilt die Electricität mit der Materie; es sind diejenigen, welche, mathematisch formulirt, die sogenannte Continuitätsgleichung liefern.

C. Statische Erscheinungen.

Dem Raume τ werde keine Energie von der Begrenzung her zugeführt. Dann gibt (4):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_{\tau} \frac{1}{T} E^2 d\tau.$$

Die Energie nimmt ab, solange E in Körpern von endlichem T noch von Null verschiedene Werthe hat. Es folgt also ein specieller stationärer Zustand, der dadurch charakterisirt ist, dass in jedem Leiter $E = 0$ oder $U = \text{const.}$ ist. Dieser Zustand soll näher untersucht werden.

1. Electrostatik. — Bezüglich der electricischen Energie heben wir einen einzelnen Fall heraus: der von einer leitenden Hülle (h) eingeschlossene Raum τ enthalte einen homogenen Isolator (i) und beliebige Leiter (l). Im ersteren ist $\epsilon = \text{const.}$, in jedem Leiter, auch in der Hülle, ist $U = \text{const.}$ ρ soll überall $= 0$ ¹⁾ und die σ sollen in möglicher Weise gegeben sein; (— möglich sind in unserem Falle nur solche Anordnungen der ρ und σ , welche für jeden Leiter ein constantes U ergeben. —) Die Indices der ϵ , S und n mögen auf Isolator, Leiter, Hülle hindeuten, für ϵ_i werde aber ϵ gesetzt; mit r sei der Abstand einer Electricitätsmenge von dem Punkte, für welchen der Werth von U gilt, bezeichnet. Dann ist:

$$(15) \quad U = \frac{\epsilon^2}{4\pi} \left[\int_{S_h} \frac{\sigma_h dS_h}{r} + \sum_l \int \frac{\sigma_l dS_l}{r} \right] = \frac{\epsilon^2}{4\pi} \sum \frac{e}{r},$$

denn dieses in τ stetige U genügt, wie in der Potentialtheorie gezeigt wird, den Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = 0 \text{ im Isolator,} \\ -\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_l} \right) = \sigma_l \text{ an den Oberflächen der inneren Leiter,} \\ -\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_h} \right) = \sigma_h \text{ an der Oberfläche der Hülle,} \end{array} \right\}$$

1) Diese Voraussetzung ist für die folgenden Schlüsse keine nothwendige; sie entspricht aber den thatsächlichen Bedingungen der Versuche.

und folglich, da: $\frac{\partial U}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n_h} = 0,$

auch den Bedingungen (13):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = 0 \text{ im Isolator,} \\ - \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{1}{\varepsilon_l^2} \frac{\partial U}{\partial n_l} \right] = \sigma_i, \quad - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial U}{\partial n_i} = \sigma_h, \end{array} \right\}$$

welche (s. oben) zur Festlegung von U genügen. Die electricische Energie wird nach (12) und (15):

$$(16) \quad W_c = \frac{1}{2} \sum e U = \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \sum_i e_i \sum_k \frac{e_k}{r_{ik}} = \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \sum_{ik} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}.$$

Ertheilen wir e_i eine virtuelle Verschiebung, so ist die geleistete Arbeit:

$$dA = -dW_c = -\frac{\varepsilon^2}{4\pi} e_i dl \sum_k \frac{e_k}{r_{ik}} k = \frac{\varepsilon^2}{4\pi} e_i \sum_k \frac{e_k}{r_{ik}^2} dr_{ik},$$

dA erscheint also als die resultirende Arbeit einer Anzahl von Elementarkräften, welche abstossend zwischen den einzelnen Electricitätsmengen wirken und den Werth:

$$\frac{\varepsilon^2}{4\pi} \frac{e_i e_k}{r_{ik}^2}$$

besitzen (Coulomb'sches Gesetz). — Aus solchen mechanischen Kräften also kann in unserem Falle die electricische Energie des Feldes abgeleitet werden.

Die von uns vorausgesetzten Verhältnisse haben den ersten quantitativen electricischen Untersuchungen zu Grunde gelegen. Die einfache Form des Kraftgesetzes, das sich hier ergab, zusammen mit der Thatsache, dass die darin auftretenden Grössen wesentliche Eigenschaften mit der Materie gemein haben, hat veranlasst, dass die Electricitätsmenge als Fundamentalgrösse in die Wissenschaft eingeführt wurde.

Der einzelne Isolator wird in seinen electrostatischen Beziehungen durch den Werth von ε charakterisirt. $K = 4\pi/\varepsilon^2$ heisst die „Dielectricitätsconstante“ des Isolators; sie kann, wie ε , nur als Verhältnisszahl definirt werden; man wählt conventionell als Vergleichsmedium den sogenannten leeren Raum. — Die Dielectricitätsconstante $4\pi/\varepsilon^2$ hat, wie die allgemeinen Gleichungen des Abschnittes A zeigen, eine Bedeutung für jeden Körper; sie fällt aber aus den Gleichungen

der Statik heraus für alle Körper mit endlichem T ; d. h. die Dielectricitätsconstanten von Leitern lassen sich aus electrostatischen Messungen nicht bestimmen.

Wir betrachten unter den Bedingungen von C:

2. Die magnetische Energie. — Da alle Grössen von der Zeit unabhängig sind, und überall entweder $E = 0$ oder $T = \infty$ ist, so wird aus (3_a):

$$\frac{\partial(\nu N)}{\partial y} = \frac{\partial(\nu M)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\nu L)}{\partial z} = \frac{\partial(\nu N)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\nu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\nu L)}{\partial y},$$

d. h. unter Beachtung von (6_b): Es existirt eine im ganzen Raum τ stetige Function Ω derart, dass:

$$(17) \quad \nu L = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \nu M = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \nu N = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Die magnetische Intensität leitet sich also bei statischen Zuständen in derselben Weise aus einem Potential ab, wie die electriche allgemein bei stationären Zuständen. Die magnetische Energie lässt sich folglich hier in derselben Weise aus „magnetischen Mengen“ herleiten, wie dort die electriche aus „electricchen Mengen“. Für $W_e U E \epsilon$ treten hier bezw. ein $W_m \Omega M \nu$. An Stelle der Dielectricitätsconstante K tritt die „magnetische Constante“ $\mu = 4\pi/\nu^2$. Ein Unterschied wird nur dadurch herbeigeführt, dass bezüglich der magnetischen Energie die Relaxationszeit allgemein unendlich ist. Es fehlen also hier die Körper, die den electricchen Leitern entsprechen. Daraus folgt, dass die magnetischen Mengen allgemein feste Lage haben, und dass innerhalb eines magnetischen Feldes keine Räume existiren, in denen die magnetische Energie den vorgeschriebenen Werth Null hat.

D. Stationäre Strömung.

Wir kehren zum allgemeinen Fall des stationären Zustandes (B) zurück. ϵE leitet sich also aus einem Potential U ab, und an die Stelle des Gesamtstromes C tritt sein einer Bestandtheil, der Leitungsstrom $E/\epsilon T$. Die Gleichungen (8_a) und (7_a) verwandeln sich in folgende:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 T} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 T} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 T} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{für das} \\ \text{Innere homogener oder stetig veränderlicher Körper,} \\ \frac{1}{\varepsilon_1^2 T_1} \frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{1}{\varepsilon_2^2 T_2} \frac{\partial U}{\partial n_2} = 0 \quad \text{für die Grenzfläche zweier} \\ \text{Körper,} \end{array} \right.$$

welche zusammen aussagen, dass sich in τ keine Endpunkte von Stromlinien (des Leitungsstromes) befinden. — Ist folglich der Körper 2 ein Isolator, 1 ein Leiter, so gilt für die Grenzfläche:

$$(18_a) \quad \frac{1}{T_1 \varepsilon_1^2} \frac{\partial U}{\partial n_1} = 0 \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{\varepsilon_1 T_1} E_{n_1} = 0,$$

d. h. durch eine solche Grenzfläche tritt keine Stromlinie aus dem Leiter aus.

Nun sei der Raum τ vollständig begrenzt von der Mantelfläche S_0 , mit welcher er an einen Isolator grenzt, und zwei Schnittflächen S_e und S_a . Aus (18) und (18_a) folgt dann, dass durch S_e ebensoviel Stromlinien in bestimmter

Richtung hindurchgehen, wie durch S_a , und dass dasselbe für eine beliebige Schnittfläche S gilt.

Die Anzahl dieser Stromlinien:

$$(19) \quad - \int_S \frac{1}{\varepsilon^2 T} \frac{\partial U}{\partial n} dS = \int_S \frac{1}{\varepsilon T} E_n dS = i$$

heißt die „Intensität des electrischen (Leitungs-)Stromes“, der in den Raum τ durch die Fläche S_e eintritt und durch S_a aus ihm austritt.

Mittelst partieller Integration und durch Berücksichtigung von (18) und (18_a) erhält man ferner für denselben Raum τ :

$$(20) \quad \int_{\tau} \frac{E^2}{T} d\tau = - \int_{S_e} \frac{1}{\varepsilon^2 T} \frac{\partial U}{\partial n} U dS_e + \int_{S_a} \frac{1}{\varepsilon^2 T} \frac{\partial U}{\partial n} U dS_a.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung beweist man in bekannter Weise: Ist eine Function U , welche in τ stetig ist und den Bedingungen (18) und (18_a) genügt, an den Flächen S_e und S_a gegeben, so ist sie dadurch in τ vollständig bestimmt.

Seien nun S_e und S_a so gewählt, dass $U_e = \text{const.}$ und $U_a = \text{const.}$; und sei ferner für den Specialfall $U_e = 1$, $U_a = 0$: $U = v$; dann ist im allgemeinen Fall:

$$U = U_a + (U_e - U_a)v;$$

denn diese Function U genügt allen Bedingungen. Es folgt aus (19):

$$(21) \quad iw = U_e - U_a, \quad \frac{1}{w} = - \int_S \frac{1}{\epsilon^2 T} \frac{\partial v}{\partial n} dS;$$

w ist unabhängig von den Potentialwerthen U_e und U_a ; es ist bestimmt durch Form und Material des Leiters und heisst der „electriche Widerstand“ desselben für die gegebenen Aequipotentialflächen.

Sei speciell der Leiter homogen. v ist dann vollständig bestimmt durch die Bedingungen:

$$\Delta v = 0 \text{ innerhalb } \tau, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ an } S_0, \quad v_e = 1, \quad v_a = 0.$$

Die Constanten ϵ und T kommen folglich im Ausdruck von v nicht vor. Also stellt sich w dar als das Product aus $\epsilon^2 T$ und einem zweiten Factor, der allein durch die geometrischen Verhältnisse bestimmt ist. Die Constante $\lambda = 1/\epsilon^2 T$; die hiernach eine Substanz bezüglich des stationären electricen Stromes charakterisirt, heisst das „specifische electriche Leitungsvermögen“ derselben. — λ ist wie die Dielectricitätsconstante K eine „äussere“ Constante des Mediums; dagegen $K/4\pi\lambda = T$ eine der beiden „inneren“ Constanten.

Führt man λ in den Ausdruck für die Joule'sche Wärme ein, so ergibt sich dieselbe für die Zeiteinheit zu $\lambda(\epsilon E)^2 d\tau$, also bei gegebener Feldintensität proportional mit λ .

E. Veränderlicher Zustand ohne Gesamtstrom.

Die Gleichungen für das Innere eines homogenen Körpers lassen sich befriedigen durch die Annahmen: die magnetische Energie ist dauernd gleich Null, für die electriche besteht ein Potential; sie ändert sich zeitlich gemäss den Gleichungen:

$$(22) \quad \frac{X}{T} + \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \quad \frac{Y}{T} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad \frac{Z}{T} + \frac{\partial Z}{\partial t} = 0.$$

Dieselben drücken aus, dass der electriche Gesamtstrom Null ist. Die Abwesenheit magnetischer Kräfte bedingt, dass einem beliebig gewählten Theil dieses Raumes keine Energie von aussen zugeführt wird. Das Vorhandensein eines electriche Potentials hat zur Folge, dass auch hier, wie in B , die electriche Energie sich als Function von „Electricitätsmengen“ darstellen lässt. Die Lösung von (22) ist:

$$(23) \quad X = X_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad Y = Y_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad Z = Z_0 e^{-\frac{t}{T}}.$$

Sie sagt aus, dass die electriche Kraftlinien bei unveränderter Form in sich zusammenfallen (wobei die verschwindende electriche Energie in Wärme verwandelt wird). Dieser Vorgang gibt die einfachste Anschauung der Bedeutung von T . — Er kann ferner dazu dienen, die Begriffe der Elec-

tricitätsmenge und der Stromintensität miteinander zu verknüpfen.

Seien S_e und S_a einander einschliessende Flächen, n_e und n_a Normalen derselben nach Angabe der Figur. Da in dem — von einem homogenen leitenden Medium erfüllten —

Zwischenraum τ durchweg $\rho = 0$ ist, so hat nach (14):

$$\int_S \sigma dS = \int_S \frac{E_n}{\epsilon} dS$$

denselben Werth für jede Fläche S , welche S_e von S_a trennt. Die durch (19) definirte Grösse i ist also auch in unserem Falle für alle diese Flächen die gleiche, und kann in jedem Augenblicke als Intensität des von S_e nach S_a fliessenden Leitungsstromes bezeichnet werden.

Insbesondere ist:

$$i = \int_{S_e} \frac{1}{\epsilon T} E_{n_e} dS_e = \int_{S_a} \frac{1}{\epsilon T} E_{n_a} dS_a.$$

Dieser Ausdruck wird aber in unserem Falle nach (22):

$$\begin{aligned}
 i &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_e} \frac{1}{\epsilon} E_{n_e} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_a} \frac{1}{\epsilon} E_{n_a} dS_a \\
 &= - \frac{\partial e_e}{\partial t} = + \frac{\partial e_a}{\partial t},
 \end{aligned}$$

wo nach (13) e_e und e_a die Electricitätsmengen auf S_e und S_a sind, von denen wir die electricische Energie des eingeschlossenen Raumes τ herleiten können. Die Intensität des Leitungsstromes von S_e nach S_a kann also gedeutet werden als die in der Zeiteinheit von S_e nach S_a übergeführte Electricitätsmenge.

Es ist aber zu bemerken, dass sich uns diese Beziehung nur für die hier betrachteten ganz speciellen Verhältnisse ergeben hat. Will man die obige Deutung auf die stationäre Strömung übertragen, so muss man die Vorstellung dahin erweitern, dass der scheinbar stationäre Zustand aus einem fortwährenden Zusammenfallen und Wiedererstehen electricischer Kraftlinien hervorgeht.¹⁾

Im Vorstehenden sind — aus den angenommenen Grundgleichungen — die Begriffe der Electricitätsmenge, der magnetischen Menge, der Stromintensität, der electricischen und magnetischen Constanten entwickelt. Es ergaben sich für diese Grössen dieselben Eigenschaften, durch welche sie auch in älteren Darstellungen definirt sind. An dieser Stelle kann also der hier vorgeschlagene Lehrgang in jeden der bisher üblichen übergeführt werden.

Strassburg i. E., 7. Juni 1890.

1) Nur diese beiden speciellen Arten der Strömung (unter D und E) können hier in Frage kommen; denn nur für diese Fälle kommt der „Electricitätsmenge“ überhaupt eine Bedeutung für die Darstellung des Feldes zu.